Spé PC **Interrogation de mathématiques n° 5 (2. 12. 2024)** **Durée : 35 mn**

Exercice 1. `[2 points]` Justifier l'existence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}\,)}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

Exercice 2. `[4 points]` `[La fonction Gamma]`

On pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.

2. Vérifier que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. `[4 points]` Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx$.

1. Justifier l'existence de I.

2. Calculer I.

Exercice 4. `[6.5 points]` Soit f l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0$, $f(x) = e^{-x}\ln(x)$.

1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^n (1-\frac{x}{n})^n \ln(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$. *On admet l'existence de* I_n.

$\triangleright$ On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (1-\dfrac{x}{n})^n\ln(x)$ si $x \in]0,n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

2. a. Etudier la convergence simple sur $]0,+\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. b. *On admet que* $\forall t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leq -t$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

2. c. Vérifier que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ et prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = I$.

Exercice 5. `[4 points]` Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On note $I(a,b)$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{sh}(ax)}{\mathrm{sh}(bx)}\,dx$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée $I(a,b)$.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\mathrm{sh}(ax)}{\mathrm{sh}(bx)} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)bx}\,\mathrm{sh}(ax)$.