Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n° 5 (2. 12. 2024)**

I. Exercices à revoir

Exercice 1. Nature des intégrales généralisées suivantes :

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^5-1}},\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(1+e^x)}},\ \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{sh} x}\,dx, \int_0^{+\infty} \ln(t)\,e^{-t}\,dt,\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\sqrt{x}\,)}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

Exercice 2. Prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

Exercice 3. `[La fonction Gamma]`. On pose : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\,dt$, $x \in \mathbb{R}$.

1. Prouver que $\Gamma(x)$ existe si et seulement si $x > 0$.
2. Vérifier que $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et en déduire la valeur de $\Gamma(n)$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

II. Exercices à étudier [Voir exercices corrigés : intégrales généralisées, CVD et TITT]

Exercice 4. Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}}\,dx$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}$.

Exercice 6. `[CVD]` Soit f l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x > 0$, $f(x) = e^{-x}\ln(x)$.

1. Démontrer que $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge absolument.

2. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n \ln(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

2. a. Prouver l'existence de I_n.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = (1 - \dfrac{x}{n})^n \ln(x)$ si $x \in]0, n]$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$.

2. b. Etudier la convergence simple sur $]0, +\infty[$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. c. Vérifier que $\forall t \in [0, 1[$, $\ln(1-t) \leq -t$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x > 0$, $|f_n(x)| \leq |f(x)|$.

2. d. Vérifier que $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ et prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = I$.

Exercice 7. `[TITT]` Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$. On note $I(a, b)$ l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)}\,dx$.

1. Déterminer un équivalent de $\operatorname{sh}(t)$ quand t tend vers 0 et un équivalent de $\operatorname{sh}(t)$ quand t tend vers $+\infty$. En déduire que l'intégrale $I(a, b)$ converge.

2. Vérifier que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\operatorname{sh}(ax)}{\operatorname{sh}(bx)} = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)bx}\operatorname{sh}(ax)$.

3. Enoncer le théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables.

4. Justifier que $I(a, b) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2a}{(2n+1)^2b^2 - a^2}$.