Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n^o 6 (10. 1. 2025)**

I. Etude du cours.

1. Etudier les preuves des propositions 3, 4 (« continuité croissante et décroissante ») et 5 du chapitre espaces probabililisés.

2. **a**) Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,

b) Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

II. Etude d'exercices.

Exercice 1. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On choisit une boule au hasard dans cette urne, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ? *On utilisera la formule de Stirling.*

3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Exercice 2. Un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. On note $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir pile lors de chaque lancer. S'il lui a fallu n lancers pour obtenir pile, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Exercice 3. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé.

Justifier que $P(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n) = 1 - \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=0}^{n} (1 - P(A_k))$.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

On considère la v.a. Y définie de la façon suivante :

$\triangleright$ Si $X = k \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = k$; et si $X = 0$, alors Y est égal (équiprobablement) à l'un des entiers de $\{1, \cdots, n\}$.

Calculer la loi de Y et son espérance. Vérifier que $E(Y) \geq E(X)$. Etait-ce prévisible avant d'effectuer les calculs ?

Exercice 5. Soit X une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

On considère la v.a. Y définie de la façon suivante :

$\triangleright$ Si X est impair, alors $Y = 0$ et si X est pair, alors $Y = \dfrac{X}{2}$.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 1. 1. Soient A_k l'événement : « la k-ième boule tirée est rouge», $k \in \mathbb{N}^*$, et B_n l'événement : « les n premières boules tirées sont rouges», $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $B_n = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ et en utilisant la formule des «probabilités composées» :

$$P(B_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{(2\cdot 4\cdots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

car $2\cdot 4\cdots 2n = (2\cdot 1)(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n) = 2^n n!$.

2. Soit C l'événement : «toutes les boules tirées sont rouges». On a : $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} \subset B_n$, donc par « continuité décroissante de P », $P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. La formule de Stirling donne un équivalent de $P(B_n)$: comme $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$, $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(\frac{2n}{e})^{2n}$, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\,(\frac{n}{e})^{2n}$, donc $P(B_n) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Par conséquent, $P(C) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0$.

3. Gardons les mêmes notations. On a cette fois : $P(B_n) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{3n-2}{3n-1} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{3k-2}{3k-1}$. Posons

$$S_n = \ln(P(B_n)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1-\frac{1}{3k-1}).$$

La série (à termes négatifs) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\ln(1-\frac{1}{3n-1})$ diverge par la règle de l'équivalent (négatif) car $\ln(1-\frac{1}{3n-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ diverge. Donc la suite *décroissante* et divergente $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$ et $P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = 0$. *Remarque.* On pouvait également considérer $\ln(P(B_n))$ dans la question 2. et ainsi prouver que $P(C) = 0$ sans utiliser la formule de Stirling.

Exercice 2. *Indications.*

Notons A_n l'événement : « il obtient pour la première fois pile lors du $n$ème lancer », B_n l'événement : « il tire le seul billet gagnant parmi les n billets proposés », $G_n = A_n \cap B_n$ l'événement : « il obtient pour la première fois pile lors du n ème lancer et il tire le billet gagnant », et enfin G l'événement : «le joueur gagne». On a $G = \bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ et comme les événements G_n sont incompatibles :

$$P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p\ln(p)}{1-p}$$

car $\forall x \in]-1,1[,\ -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

Exercice 3. Par propriétés de la probabilité P, on a :

$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcup_{n=0}^{N} A_n) = \lim_{N\to+\infty}(1-P(\overline{\bigcup_{n=0}^{N} A_n}) = \lim_{N\to+\infty}(1-P(\bigcap_{n=0}^{N}\overline{A_n}) = 1-\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=0}^{N} P(\overline{A_n}) = 1-\lim_{N\to+\infty}\prod_{n=0}^{N}(1-P(A_n))$$

car les événements $\overline{A_0},\cdots,\overline{A_N}$ sont aussi mutuellement indépendants.

Exercice 4. • *Loi de Y.* La v.a. Y est à valeurs dans $\{1,\cdots,n\}$.
Soit $k \in \{1,\cdots,n\}$. Utilisons le système complet d'évènements $\{(X=0),\cdots,(X=n)\}$. On a :

$$\boxed{(Y=k)} = \bigcup_{i=0}^{n}((X=i)\cap(Y=k)) = ((X=0)\cap(Y=k))\cup((Y=k)\cap(X=k)) = \boxed{((X=0)\cap(Y=k)) \underset{inc.}{\cup} (X=k)}.$$

En effet, pour tout $i \in [\![1,n]\!]\backslash\{k\}$, l'événement $(X=i)\cap(Y=k)$ est impossible car si $X=i$, alors $Y=i\neq k$; et $(X=k)\subset(Y=k)$.
Par conséquent :

$$\boxed{P(Y=k)} = P((X=0)\cap(Y=k)) + P(X=k) = P(X=0)P_{(X=0)}(Y=k) + P(X=k) = \boxed{(1-p)^n\frac{1}{n} + \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}.$$

Remarque : on retrouve que :

$$\sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}(1-p)^n\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1.$$

• *Espérance de Y.* La v.a. (finie) Y a pour espérance :

$$\boxed{E(Y)} = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = (1-p)^n\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=\cancel{1}0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(1-p)^n + E(X)}.$$

Donc $E(Y) \geq E(X)$ ce qui était prévisible par croissance de l'espérance car $Y \geq X$.

Exercice 5. $\triangleright$ On rappelle que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.
Clairement Y est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i) Loi de Y. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculons $P(Y=m)$. On distingue deux cas suivant la valeur de m :

a) Cas $m=0$. Comme $(Y=0) = (X=0) \cup (X=1) \cup (X=3) \cup \cdots = (X=0) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X=2n+1)$ (union d'événements incompatibles),

$$P(Y=0) = P(X=0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1) = e^{-\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda}(1+\mathrm{sh}\lambda).$$

b) Cas $m \in \mathbb{N}^*$. On a : $(Y=m) = (X=2m)$ donc $P(Y=m) = P(X=2m) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2m}}{(2m)!}$.

Remarque. On retrouve bien que :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty} P(Y=m) &= P(Y=0) + \sum_{m=1}^{+\infty} P(Y=m) = e^{-\lambda}(1+\mathrm{sh}\lambda) + e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} \\ &= e^{-\lambda}(1+\mathrm{sh}\lambda) + e^{-\lambda}(\mathrm{ch}\lambda - 1) = e^{-\lambda}(\mathrm{ch}\lambda + \mathrm{sh}\lambda) = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

ii) Espérance de Y.

Le critère de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série (à termes strictement positifs) $\sum_{m\geq 1} mP(Y=m)$. Et on a :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{m=0}^{+\infty} mP(Y=m) = \sum_{m=1}^{+\infty} mP(Y=m) = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} \\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} 2m\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m}}{(2m-1)!} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} \underset{[k=m-1]}{=} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\,\mathrm{sh}\lambda\end{aligned}$$

iii) Variance de Y. Par le théorème du transfert, Y^2 est d'espérance finie car le critère de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série (à termes strictement positifs) $\sum_{m\geq 1} m^2P(Y=m)$, et on a :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_{m=0}^{+\infty} m^2P(Y=m) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2P(Y=m) = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m^2\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{\lambda^{2m}}{(2m-1)!} \\ &\underset{[k=m-1]}{=} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}((2k+1)+1)\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k)!} + \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}(\lambda\,\mathrm{ch}\lambda + \mathrm{sh}\lambda).\end{aligned}$$

Finalement : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}(\lambda\,\mathrm{ch}\lambda + \mathrm{sh}\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^2 e^{-2\lambda}\,\mathrm{sh}^2\lambda$.
Remarque. En explicitant $\mathrm{ch}\lambda$ et $\mathrm{sh}\lambda$, on obtient : $V(Y) = \frac{\lambda^2}{16}(1+4e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}) + \frac{\lambda}{8}(1-e^{-2\lambda})$.