Changement de bases.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices de passage. Changement de bases pour un vecteur

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n. Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.

Définition 1 *La matrice de passage de la base B à la base B', notée $P_{B,B'}$, est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont chaque colonne d'indice j, $j \in \{1, \cdots, n\}$, est formée des coordonnées (ou composantes), relativement à B, du vecteur e'_j.*

Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. Posons $e'_j = p_{1j}e_1 + \cdots + p_{nj}e_n$. La matrice $P_{B,B'}$ est donc, par définition, la matrice $(p_{ij})_{1 \le i,j \le n}$.

Définition 2 *Soit $x \in E$. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. La matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ s'appelle la matrice colonne des coordonnées (ou composantes) de x dans B. On la note $Mat_B(x)$ ou plus simplement X.*

Proposition 1 *Soit $x \in E$. Soient $X = Mat_B(x)$ et $X' = Mat_{B'}(x)$. Soit P la matrice de passage de B à B'. Alors*

$$\boxed{X = PX'.}$$

Preuve. Rappelons que, par définition de P, $\forall j \in \{1, \cdots, n\}$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$. On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j\right) e_i$$

D'où $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j$ $(*)$, par unicité de la décomposition du vecteur x dans la base B.
Il reste à remarquer que les n égalités $(*)$ sont équivalentes à l'égalité matricielle $X = PX'$. $\square$

Exemple élémentaire. Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soient $e'_1 = (-2, 1)$ et $e'_2 = (3, -2)$. Vérifier que $B' = (e'_1, e'_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Soit $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Exprimer les coordonnées x' et y' de u dans B' en fonction de x et de y.

Proposition 2 *Soient B et B' deux bases de E. Alors $P_{B,B'} \in GL_n(\mathbb{K})$ et $P_{B,B'}^{-1} = P_{B',B}$.*

Preuve. Soit $x \in E$. Soient $X = Mat_B(x)$ et $X' = Mat_{B'}(x)$. Posons $P = P_{B,B'}$ et $Q = P_{B',B}$.
D'après la proposition 1, on a $X = PX'$ et $X' = QX$. Donc $X = P(QX) = (PQ)X$. En remplaçant dans l'égalité précédente X par les colonnes de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on obtient que $PQ = I_n$. On obtient de même $QP = I_n$ à partir de l'égalité $X' = (QP)X'$ vérifiée par toute colonne X'. D'où $PQ = QP = I_n$. $\square$

Remarque 1 *Soit $A = (a_{ij}) \in GL_n(\mathbb{K})$. Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n et $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.*
Posons, pour tout $j \in \{1, \cdots, n\}$, $e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$. La famille $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base de E et A peut donc être considérée comme la matrice de passage de B à B' : soit $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\alpha_1 e'_1 + \cdots + \alpha_n e'_n = 0_E$.
L'égalité précédente se traduit matriciellement par l'égalité matricielle : $AX = 0$ où X est la colonne $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.
D'où $X = (A^{-1}A)X = A^{-1}(AX) = A^{-1}0 = 0$ et B' est bien une famille libre (de n vecteurs) donc une base de E.

2 Matrice d'une application linéaire

Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension p et F un $\mathbb{K}$ev de dimension n.
Soient $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $C = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
Posons, pour tout $j \in \{1, \cdots, p\}$, $f(e_j) = a_{1j}\varepsilon_1 + \cdots + a_{nj}\varepsilon_n = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i$.

Définition 3 *La matrice de f, relativement aux bases B et C, notée $Mat_{B,C}(f)$, est la matrice de $M_{n,p}(\mathbb{K})$:*

$$Mat_{B,C}(f) = (a_{ij})_{1 \le i \le n, 1 \le j \le p}.$$

Dans le cas $E = F$ et $B = C$, on note plus simplement $Mat_B(f)$ la matrice $Mat_{B,B}(f)$.

Définition 4 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons B_c la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $Mat_{B_c}(f) = A$.*
On dit que f est l'endomorphisme (de $\mathbb{K}^n$) canoniquement associé à A.

Remarque 2 *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n. Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E.*
On a : $P_{B,B'} = Mat_{B',B}(Id_E)$.

Reprenons les notations précédentes. On a alors la proposition suivante :

Proposition 3 *Soit $x \in E$ et $X = Mat_B(x)$. Soit $y = f(x)$ et $Y = Mat_C(y)$. Soit $A = Mat_{B,C}(f)$. On a :*

$$\boxed{Y{=}AX}$$

Preuve. Posons $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i \varepsilon_i$. Comme f est linéaire, on a :

$$y = \sum_{j=1}^{p} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j (\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i) = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j)\varepsilon_i$$

D'où $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}x_j$, par unicité de la décomposition du vecteur y dans la base C.

Remarquons enfin pour terminer que les n égalités précédentes sont bien équivalentes à l'égalité matricielle $Y = AX$. □

On rappelle (exercice) :

Proposition 4 *Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$.*
a) $f \circ g \in \mathcal{L}(E)$ et $Mat_B(f \circ g) = Mat_B(f)Mat_B(g)$. En particulier, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Mat_B(f^k) = (Mat_B(f))^k$,
b) f est bijective si et seulement si $Mat_B(f)$ est inversible et dans ce cas, $Mat_B(f)^{-1} = Mat_B(f^{-1})$.

3 Changement de bases pour un endomorphisme. Matrices semblables

3.1 Changement de bases pour un endomorphisme

Proposition 5 *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie. Soient B et B' deux bases de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $P = P_{B,B'}$. Soient $A = Mat_B(f)$ et $A' = Mat_{B'}(f)$. On a :*

$$\boxed{A' = P^{-1}AP}$$

Preuve. Soient $x \in E$ et $y = f(x)$. Soient $X = Mat_B(x)$, $X' = Mat_{B'}(x)$, $Y = Mat_B(y)$ et $Y' = Mat_{B'}(y)$.
En utilisant les propositions 1 et 3 , on a : $X = PX'$, $Y = PY'$, $Y = AX$ et $Y' = A'X'$. D'où $PY' = APX'$.
Comme P est inversible (cf. Proposition 2), $Y' = P^{-1}APX'$. La proposition 3 permet de conclure. □

3.2 Matrices semblables

3.2.1 Définition.

Définition 5 *Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si :*

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP.$$

3.2.2 Propriétés élémentaires

On vérifie facilement (exercice) que :

Proposition 6 `[Relation d'équivalence dans` $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$`]`.
1. Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à elle-même.
2. Soient A, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A soit semblable à B. Alors B est semblable à A.
3. Soient A, B et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que A soit semblable à B et B soit semblable à C. Alors A est semblable à C.

3.2.3 Méthode pratique

On souhaite prouver que deux matrices données A et A' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables. Déterminer $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ ou plus simplement dans un premier temps telle que $PA' = AP$ revient à résoudre un système de n^2 équations à n^2 inconnues. Donc on évite en général de procéder ainsi.

On préfère procéder de la façon suivante :

1. On considère un $\mathbb{K}$ev E de dimension n, B une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $A = Mat_B(f)$.

On choisit généralement $E = \mathbb{K}^n$ et $B = B_c$ la base canonique de E. L'endomorphisme f est dans ce cas, par définition, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

2. On détermine alors une base B' de E telle que $A' = Mat_{B'}(f)$ (ou une base B' de $\mathbb{K}^n$ si $E = \mathbb{K}^n$ et $B = B_c$.)
D'après la proposition 5, A et A' sont semblables et $P = P_{B,B'}$ est telle que $A' = P^{-1}AP$: A et A' *représentent* un même endomorphisme.

3.2.4 Exercices

1. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Les matrices A et B sont-elles semblables ?

Même question avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. a. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Montrer que les deux matrices élémentaires E_{ii} et E_{jj} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont semblables.
3. b. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que J est semblable à nE_{11}.