

Applications linéaires : révisions et compléments.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Généralités.

Définition 1 a. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev. Soit f une application de E dans F . On dit que f est linéaire ssi :

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \alpha \in \mathbb{K}, f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v) \quad (1)$$

b. Soit E un $\mathbb{K}$ ev. Une application linéaire f de E dans E est appelée endomorphisme de E .

c. Soit E un $\mathbb{K}$ ev. Une application linéaire f de E dans $\mathbb{K}$ est appelée forme linéaire sur E .

On note $\mathcal{L}(E, F)$ (resp. $\mathcal{L}(E)$) l'ensemble des applications linéaires de E dans F (resp. des endomorphismes de E).

Remarque 1 On vérifie que $(1) \Leftrightarrow \forall (u, v) \in E^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$ et $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u \in E, f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Définition 2 a. Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev. Soit f une application linéaire de E dans F .

On dit que f est un isomorphisme de E dans (sur) F si f est une bijection de E dans (sur) F .

b. Soit E un $\mathbb{K}$ ev. Un endomorphisme bijectif de E est appelé automorphisme de E .

On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Définition 3 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Le noyau de f , noté $\text{Ker } f$, est le sous-ensemble de E :

$$\text{Ker } f = \{u \in E / f(u) = 0_F\}.$$

L'image de f , noté $\text{Im } f$, est le sous-ensemble de F :

$$\text{Im } f = \{v \in F / \exists u \in E, v = f(u)\}.$$

On rappelle que :

Proposition 1 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

a. $\text{Ker } f$ est un sous-espace vectoriel de E .

b. f est injective si et seulement si $\text{Ker } f = \{0_E\}$.

c. $\text{Im } f$ est un sous-espace vectoriel de F .

d. f est surjective si et seulement si $\text{Im } f = F$.

2 Exemples fondamentaux.

2.1 Homothéties vectorielles.

2.1.1 Définition.

Définition 4 Soit E un $\mathbb{K}$ ev. Soit $k \in \mathbb{K}$. L'homothétie vectorielle de rapport k est l'application $h_k : \begin{matrix} E \rightarrow E \\ u \mapsto ku \end{matrix}$

Remarquons que h_0 est l'application nulle, notée $0_{\mathcal{L}(E)}$ ou θ et h_1 est l'application identique, notée Id_E ou e .

On vérifie facilement que $\forall k \in \mathbb{K}, h_k \in \mathcal{L}(E)$ et que si $k \neq 0$, h_k est un automorphisme de E , de bijection réciproque $h_k^{-1} = h_{\frac{1}{k}}$.

2.1.2 Complément : caractérisation d'une homothétie.

Proposition 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que, pour tout $u \in E$, il existe $k_u \in \mathbb{K}$ (dépendant a priori de u) tel que $f(u) = k_u u$. Alors f est une homothétie vectorielle. Autrement dit : il existe une constante $k \in \mathbb{K}$ tel que $\forall u \in E, f(u) = ku$.

Preuve. Soient u et v deux vecteurs non nuls de E . Montrons que $k_u = k_v$. Distinguons deux cas :

1^{er} cas : u et v sont colinéaires. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que $v = \alpha u$. On a $f(v) = f(\alpha u) = \alpha f(u) = \alpha k_u u$ et aussi $f(v) = k_v v = k_v \alpha u$. Comme $\alpha \neq 0$ et $u \neq 0_E$, on a donc $k_u = k_v$.

2^e cas : u et v ne sont pas colinéaires. Soit $w = u + v$. On a $f(w) = k_w w = k_w u + k_w v$ et aussi $f(w) = f(u) + f(v) = k_u u + k_v v$. D'où $(k_w - k_u)u + (k_w - k_v)v = 0_E$.

Comme la famille (u, v) est libre, on déduit de l'égalité précédente que $k_u = k_v (= k_w)$. □

2.2 Projecteurs et projections vectorielles.

2.2.1 Définition d'un projecteur.

Définition 5 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un projecteur de E ssi $f^2 (= f \circ f) = f$.

2.2.2 Définition d'une projection vectorielle.

Définition 6 Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Soient F et G deux sev supplémentaires dans E , i.e. $E = F \oplus G$.

Soit $u \in E$, $\exists!(u', u'') \in F \times G$ tel que $u = u' + u''$. L'application $p : \begin{matrix} E \rightarrow E \\ u \mapsto u' \end{matrix}$ est un endomorphisme de E , appelé projection sur F , de direction G (ou parallèlement à G).

Vérifions que p est bien linéaire : soient u et $v \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons : $u = u' + u''$ et $v = v' + v''$, avec $u', v' \in F$ et $u'', v'' \in G$. On a : $\alpha u + v = (\alpha u' + v') + (\alpha u'' + v'')$, avec $\alpha u' + v' \in F$ et $\alpha u'' + v'' \in G$ car F et G sont deux sev de E . Donc, par définition de p , $p(\alpha u + v) = \alpha u' + v' = \alpha p(u) + p(v)$.

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $A \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$. Pour tout $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division de P par A . Prouver que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est un projecteur de E .

Remarque 2 *Eléments caractéristiques d'une projection vectorielle : noyau et image.*

Reprenons les notations de la définition 6 : Soit $u \in E$. Posons : $u = u' + u''$, avec $u' \in F$ et $u'' \in G$.

$u \in \text{Ker } p \Leftrightarrow u' = 0_E \Leftrightarrow u \in G$. Donc $\text{Ker } p = G$. De plus, par définition de p , $\text{Im } p \subset F$ et plus précisément, $\text{Im } p = F : \forall u \in F, u = p(u)$, car $u = u + 0_E$ et $0_E \in G$! De fait, on a $\forall u \in E, p(u) = u \Leftrightarrow u'' = 0_E \Leftrightarrow u \in F$.

Donc $\text{Im } p = F = \text{Ker}(p - e) = \{u \in E / p(u) = u\}$.

Remarque 3 Soient p une projection vectorielle et $u \in E$. On a $p^2(u) = p(p(u)) = p(u') = u' = p(u)$. Donc $p^2 = p$. Autrement dit, une projection vectorielle de E est un projecteur.

Remarque 4 Soit p une projection vectorielle. On vérifie facilement que $e - p$ est la projection vectorielle sur G , de direction F (ou parallèlement à F).

2.2.3 Un projecteur est une projection vectorielle.

Enonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 1 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = f$. Alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont deux sev supplémentaires de E et f est la projection vectorielle sur $\text{Im } f$, de direction $\text{Ker } f$.

Preuve. Soit u un vecteur quelconque de E . On a $u = (u - f(u)) + f(u)$. Comme $f(u - f(u)) = f(u) - f^2(u) = 0_E$, $u - f(u) \in \text{Ker } f$. De plus, $f(u) \in \text{Im } f$. Le vecteur u est donc la somme d'un vecteur de $\text{Ker } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } f$. Par conséquent, $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$. Considérons maintenant $v \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. On a $f(v) = 0_E$ et $\exists w \in E$ tel que $v = f(w)$. Donc $v = f(w) = f^2(w) = f(v) = 0_E$. Ainsi, $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0_E\}$. On vient donc de prouver que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$: u s'écrit donc d'une seule façon comme la somme d'un vecteur de $\text{Im } f$ (le vecteur $f(u)$) et d'un vecteur de $\text{Ker } f$ (le vecteur $u - f(u)$). En d'autres termes (cf. Définition 6), le vecteur $f(u)$ est l'image de u par la projection vectorielle p sur $\text{Im } f$, de direction $\text{Ker } f$. Donc $f = p$. □

2.3 Endomorphismes involutifs et symétries vectorielles.

2.3.1 Définition d'un endomorphisme involutif.

Rappelons que l'on note plus simplement e l'application Id_E .

Définition 7 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est un endomorphisme involutif (ou une involution) de E ssi $f^2 (= f \circ f) = e$.

2.3.2 Définition d'une symétrie vectorielle.

Définition 8 Soit E un $\mathbb{K}$ ev. Soient F et G deux sev supplémentaires dans E , i.e. $E = F \oplus G$.

Soit $u \in E$, $\exists!(u', u'') \in F \times G$ tel que $u = u' + u''$. L'application $s : \begin{matrix} E \rightarrow E \\ u \mapsto u' - u'' \end{matrix}$ est un endomorphisme de E , appelé symétrie (vectorielle) par rapport à F , de direction G (ou parallèlement à G).

Vérifions que s est bien linéaire : soient u et $v \in E$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons : $u = u' + u''$ et $v = v' + v''$, avec $u', v' \in F$ et $u'', v'' \in G$. On a : $\alpha u + v = (\alpha u' + v') + (\alpha u'' + v'')$, avec $\alpha u' + v' \in F$ et $\alpha u'' + v'' \in G$ car F et G sont deux sev de E . Donc, par définition de s , $s(\alpha u + v) = \alpha u' + v' - \alpha u'' - v'' = \alpha(u' - u'') + v' - v'' = \alpha s(u) + s(v)$.

Remarque 5 Soient s la symétrie par rapport à F , de direction G et p la projection vectorielle sur F , de direction G . On vérifie que $s = 2p - e$. Comme $p \in \mathcal{L}(E)$, on retrouve que $s \in \mathcal{L}(E)$.

Remarque 6 Eléments caractéristiques d'une symétrie : vecteurs invariants et vecteurs transformés en leurs opposés.

Reprenons les notations de la définition 6 : Soit $u \in E$. Posons : $u = u' + u''$, avec $u' \in F$ et $u'' \in G$.

On a : $s(u) = u \Leftrightarrow u' - u'' = u' + u'' \Leftrightarrow u'' = 0_E \Leftrightarrow u \in F$. Donc $F = \text{Ker}(s - e)$.

De même, $s(u) = -u \Leftrightarrow u' - u'' = -u' - u'' \Leftrightarrow u' = 0_E \Leftrightarrow u \in G$. Donc $G = \text{Ker}(s + e)$.

Remarque 7 Soient s une symétrie vectorielle et $u \in E$.

Reprenons les notations de la définition 8. Comme $u' \in F$ et $u'' \in G$, on a, d'après la remarque 6 :

$s^2(u) = s(s(u)) = s(u' - u'') = s(u') - s(u'') = u' - (-u'') = u$. Donc $s^2 = e$.

Autrement dit, une symétrie vectorielle de E est un endomorphisme involutif.

Remarque 8 Soit s la symétrie par rapport à F , de direction G . On vérifie que $-s$ est la symétrie vectorielle par rapport à G , de direction F .

2.3.3 Un endomorphisme involutif est une symétrie vectorielle.

Enonçons maintenant le résultat principal de cette section.

Théorème 2 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = e$. Alors $\text{Ker}(f - e)$ et $\text{Ker}(f + e)$ sont deux sev supplémentaires de E et f est la symétrie vectorielle par rapport à $\text{Ker}(f - e)$, de direction $\text{Ker}(f + e)$.

Preuve. Soit $u \in E$. Posons $u' = \frac{1}{2}(u + f(u))$ et $u'' = \frac{1}{2}(u - f(u))$. On a $u = u' + u''$. Comme $f(u') = \frac{1}{2}(f(u) + f^2(u)) = \frac{1}{2}(u + f(u)) = u'$, $u' \in \text{Ker}(f - e)$. On montre de même que $f(u'') = -u''$, i.e. $u'' \in \text{Ker}(f + e)$. Le vecteur u est donc la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f - e)$ et d'un vecteur de $\text{Ker}(f + e)$. Par conséquent, $E = \text{Ker}(f - e) + \text{Ker}(f + e)$.

Considérons maintenant $v \in \text{Ker}(f - e) \cap \text{Ker}(f + e)$. On a $f(v) = v$ et $f(v) = -v$ donc $v = 0_E$.

Ainsi, $\text{Ker}(f - e) \cap \text{Ker}(f + e) = \{0_E\}$. On vient donc de prouver que $E = \text{Ker}(f - e) \oplus \text{Ker}(f + e)$.

Le vecteur u s'écrit donc d'une seule façon comme la somme d'un vecteur de $\text{Ker}(f - e)$ (le vecteur u') et d'un vecteur de $\text{Ker}(f + e)$ (le vecteur u''). Comme $f(u) = u' - u''$, le vecteur $f(u)$ est (cf. Définition 8) l'image $s(u)$ du vecteur u par la symétrie vectorielle s par rapport à $\text{Ker}(f - e)$, de direction $\text{Ker}(f + e)$. Donc $f = s$. $\square$

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose, pour tout $P \in E$, $f(P) = P(1 - X)$.

a. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est une symétrie vectorielle de E .

b. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Calculer $f((\frac{1}{2} - X)^k)$.

c. Préciser les éléments caractéristiques de f .

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose, pour tout $M \in E$, $f(M) = {}^t M$.

a. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(E)$ et que f est une symétrie vectorielle de E .

b. Préciser les éléments caractéristiques de f .

3 Endomorphismes nilpotents. Matrices nilpotentes.

3.1 Définitions.

Définition 9 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est nilpotent s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \theta$ où θ est l'endomorphisme nul de E .

Définition 10 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$, où 0 désigne ici la matrice nulle de $M_n(\mathbb{K})$.

Définition 11 Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, nilpotent. Le plus petit entier du sous ensemble (non vide) $\{k \in \mathbb{N}^*, f^k = \theta\}$ de $\mathbb{N}^*$ est appelé indice de nilpotence de f . L'indice de nilpotence de f est l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^{p-1} \neq \theta$ et $f^p = \theta$.

Définition 12 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, nilpotente. Le plus petit entier du sous ensemble (non vide) $\{k \in \mathbb{N}^*, A^k = 0\}$ de $\mathbb{N}^*$ est appelé indice de nilpotence de A . L'indice de nilpotence de A est l'unique entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^{p-1} \neq 0$ et $A^p = 0$.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Posons, pour tout $P \in E$, $f(P) = P'$.

Montrer que f est un endomorphisme nilpotent de E et préciser son indice de nilpotence.

3.2 Compléments.

Dans ce paragraphe, E est un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n . La propriété suivante, que vous devez savoir redémontrer, compare en particulier l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent de E et la dimension de E .

Proposition 3 Soit f un endomorphisme nilpotent de E , d'indice p . Soit $u \in E$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_E$. Alors :

1. La famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est une famille libre de E .
2. L'indice de nilpotence p de f est inférieur ou égal à n et, en particulier, $f^n = \theta$.

Preuve. 1. Soient $a_0, \dots, a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(u) = 0_E$. Par linéarité de f^{p-1} , on a :

$$0_E = f^{p-1}(0_E) = f^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k f^k(u)\right) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k f^{k+p-1}(u) = a_0 f^{p-1}(u)$$

car $\forall r \geq p$, $f^r(u) = \theta(u) = 0_E$. D'où $a_0 = 0$ car, par hypothèse, $f^{p-1}(u) \neq 0_E$.

De même, en considérant successivement pour $j \in \{1, \dots, p-1\}$, $f^{p-j-1}\left(\sum_{k=j}^{p-1} a_k f^k(u)\right)$, on obtient que, pour tout $j \in \{1, \dots, p-1\}$, $a_j = 0$.

2. D'après 1. la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est une famille libre de E . Son cardinal p est donc inférieur ou égal la dimension n de E . Et comme $f^p = \theta$, $f^n = f^p \circ f^{n-p} = \theta \circ f^{n-p} = \theta$.

□

Considérons maintenant le cas particulier d'un endomorphisme nilpotent de E dont l'indice de nilpotence est égal à la dimension de E .

Proposition 4 Soit f un endomorphisme nilpotent de E , d'indice de nilpotence $n = \dim E$. Alors il existe une base B de E telle que

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Reprenons les notations de la proposition précédente. Soit $u \in E$ tel que $f^{n-1}(u) \neq 0_E$.

Alors $B = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ est une famille libre de n vecteurs de E , donc une base de E .

On vérifie enfin que la matrice de f dans cette base a bien la forme souhaitée.

□

Proposition 5 Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, nilpotente d'indice p . Alors $p \leq n$ et, par conséquent, $A^n = 0$.

Preuve. Notons B_c la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$, canoniquement associé à A . Comme $\forall k \in \mathbb{N}$, $Mat_{B_c}(f^k) = A^k$, on a $f^{p-1} \neq \theta$ car $A^{p-1} \neq 0$ et $f^p = \theta$ car $A^p = 0$. En d'autres termes, f est un endomorphisme nilpotent d'indice p du $\mathbb{K}$ ev de dimension n $\mathbb{K}^n$. Donc $p \leq n$ d'après la proposition 3 et $A^n = A^p A^{n-p} = 0 \cdot A^{n-p} = 0$.

□

4 Trace d'un endomorphisme.

4.1 Trace d'une matrice carrée.

Définition 13 Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. La trace de A , notée $\text{tr}A$, est la somme des termes diagonaux de A :

$$\text{tr}A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Remarque 9 Une matrice carrée et sa transposée ont la même trace.

Proposition 6 L'application $\text{tr} : \begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K} \\ M \mapsto \text{tr}M \end{matrix}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Posons $C = \alpha A + B = (c_{ij}) = (\alpha a_{ij} + b_{ij})$.

$$\text{Alors } \text{tr}(\alpha A + B) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii} + b_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \alpha \text{tr} A + \text{tr} B.$$

□

Proposition 7 $\forall (U, V) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}), \text{tr}(UV) = \text{tr}(VU)$.

Preuve. Posons $U = (u_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et $V = (v_{ij})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$. Notons $C = UV = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = VU = (d_{ij}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{tr}(UV) = \text{tr} C = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^p u_{ik} v_{ki} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n u_{ik} v_{ki} \right) = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^n v_{ki} u_{ik} \right) = \sum_{k=1}^p d_{kk} = \text{tr} D = \text{tr}(VU).$$

□

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de couple $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB - BA = A$. Montrer que A n'est pas inversible.

Proposition 8 Deux matrices semblables ont la même trace : $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$.

Preuve. Ce résultat s'obtient en utilisant l'associativité de la multiplication dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et la proposition 7 avec $U = P^{-1}$ et $V = AP$:

$$\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(P^{-1}(AP)) = \text{tr}((AP)P^{-1}) = \text{tr}(A(PP^{-1})) = \text{tr}(A).$$

Exercice 7. Soit $n \geq 2$. Déterminer deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non semblables telles que $\text{tr} A = \text{tr} B$.

4.2 Trace d'un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie.

Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n . Soient $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ et $(e') = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E .

Soit $P = P_{(e), (e')}$ la matrice de passage de la base (e) à la base (e') .

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Notons $A = \text{Mat}_{(e)}(f)$ et $A' = \text{Mat}_{(e')}(f)$. On a alors : $A' = P^{-1}AP$ et, d'après la proposition 8, $\text{tr} A' = \text{tr} A$.

D'où la définition suivante :

Définition 14 Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La trace de f est la trace de la matrice de f dans une base quelconque de E .

Exercice 8. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie. Soit p un projecteur de E . On a : $\text{tr}(p) = \dim \text{Im } p$.

Autrement dit, la trace d'un projecteur est égale à son rang. *Indication* : considérer une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$.

Exercice 9. Soit E un $\mathbb{K}$ ev de dimension n et s une symétrie vectorielle de E . Montrer que la trace de s est un entier de même parité que n .

En utilisant la définition précédente de la trace d'un endomorphisme et les propriétés de la trace d'une matrice carrée, on obtient que :

Proposition 9 1. L'application $\text{tr} : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathbb{K}$
 $f \mapsto \text{tr} f$ est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$.

2. $\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

5 Hyperplans et formes linéaires.

5.1 Généralités.

Définition 15 1. Soit E un $\mathbb{K}$ ev (de dimension finie ou non). Un sev H de E est un hyperplan de E si H admet un supplémentaire dans E de dimension 1.

2. Si E est de dimension finie $n \geq 2$, un hyperplan H est donc un sev de E de dimension $n - 1$.

Exercice 10. Justifier que $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y + 3z + 4t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

Proposition 10 Un sev H de E est un hyperplan de E ssi pour tout $a \notin H$, $E = H \oplus \text{Vect}(a)$.

Preuve. a. La condition est suffisante, par définition d'un hyperplan.

b. Soit H un hyperplan de E . Il existe donc $b \notin H$ tel que $E = H \oplus \text{Vect}(b)$.

Soit $a \notin H$. On a : $a = h + \alpha b$, avec $h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. α est non nul car $a \notin H$.

Soit $x \in E$. Il existe $y \in H$ et $k \in \mathbb{K}$ tel que $x = y + kb$. Alors $x = (y - \frac{1}{\alpha}h) + \frac{1}{\alpha}a$.

Donc $E = H + \text{Vect}(a)$ et plus précisément, $E = H \oplus \text{Vect}(a)$ car $H \cap \text{Vect}(a) = \{0_E\}$.

□

Proposition 11 Toute forme linéaire f non nulle sur E est surjective.

Preuve. Comme f est non nulle, il existe donc $u \in E$ tel que $f(u) = \alpha$, avec $\alpha \neq 0$.

Soit $k \in \mathbb{K}$ quelconque. On a $k = f(\frac{k}{\alpha}u)$. Donc $\text{Im } f = K$ et f est bien une surjection de E dans $\mathbb{K}$.

□

Le lien entre hyperplan de E et forme linéaire (non nulle) sur E est donné par le théorème suivant :

Théorème 3 *Un sev H de E est un hyperplan de E ssi H est le noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .*

Preuve. a. Supposons que H soit un hyperplan de E . Soit $b \notin H$. On a $E = H \oplus \text{Vect}(b)$.

Soit $u \in E$. Alors $\exists!(h, \lambda(u)) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $u = h + \lambda(u)b$. Soit $\lambda : \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{K} \\ u \mapsto \lambda(u) \end{matrix}$.

L'application λ est une forme linéaire non nulle sur E .

En effet, soit $(\alpha, \alpha') \in \mathbb{K}^2$ et $x' \in E$. Posons $x' = h' + \lambda(x')b$, avec $h' \in H$. Par définition de λ , on a :

$$\lambda(\alpha x + \alpha' x') = \lambda(\underbrace{\alpha h + \alpha' h'}_{\in H} + (\alpha \lambda(x) + \alpha' \lambda(x'))b) = \alpha \lambda(x) + \alpha' \lambda(x')$$

donc λ est bien linéaire et λ n'est pas la forme linéaire nulle car $\lambda(b) = 1$.

b. Soit f une forme linéaire non nulle sur E . Posons $H = \text{Ker } f$. Soit $b \in E$ tel que $f(b) \neq 0$.

Soit $x \in E$. Remarquons que $f(x - \frac{f(x)}{f(b)}b) = f(x) - f(x) = 0$. Donc $x - \frac{f(x)}{f(b)}b \in H$. Comme $x = x - \frac{f(x)}{f(b)}b + \frac{f(x)}{f(b)}b$, on a donc $E = H + \text{Vect}(b)$. Comme $b \notin H$, $H \cap \text{Vect}(b) = \{0_E\}$.

D'où $E = H \oplus \text{Vect}(b)$ et H est bien un hyperplan de E .

Exemples. 1. Soit $\mathcal{E} = \{M \in M_n(\mathbb{R}) / \text{tr } M = 0\}$: $\mathcal{E}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle tr sur $M_n(\mathbb{R})$.

On déduit directement du théorème précédent que $\mathcal{E}$ est un hyperplan de $M_n(\mathbb{R})$. Donc $\dim \mathcal{E} = n^2 - 1$.

2. Soit $\mathcal{E} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1) = 0\}$: $\mathcal{E}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle f définie, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ par : $f(P) = P(1)$. On déduit directement du théorème précédent que $\mathcal{E}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc $\dim \mathcal{E} = n$. On pouvait aussi remarquer que $P \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P = (X - 1)Q$. Une base de $\mathcal{E}$ est donc la famille $((X - 1)X^k, k \in \{0, \dots, n - 1\})$.

Proposition 12 *Deux formes linéaires non nulles sur E sont proportionnelles ssi elles ont le même noyau.*

Preuve. a. Soient f et g deux formes linéaires non nulles proportionnelles. Soit $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $\forall u \in E, g(u) = kf(u)$. On a donc $g(u) = 0_E$ ssi $f(u) = 0_E$. Donc $\text{Ker } g = \text{Ker } f$.

b. Notons H l'hyperplan $\text{Ker } f$. Soit $b \in E$ tel que $f(b) \neq 0$. Rappelons que $E = H \oplus \text{Vect}(b)$ (cf. proposition 10).

Considérons la forme linéaire h définie par : $h = g - \frac{g(b)}{f(b)}f$. On a $\forall x \in H, h(x) = 0$ car $f(x) = g(x) = 0$, et $h(b) = 0$.

Soit $u \in E$. $\exists!(x, k) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $u = x + kb$. Par linéarité de h , $h(u) = h(x) + kh(b) = 0$.

La forme linéaire h est donc la forme linéaire nulle sur E et f et g sont donc proportionnelles car $g = \frac{g(b)}{f(b)}f$.

5.2 Cas où E est de dimension finie $n \geq 2$.

Remarque 10 *Soit f une forme linéaire non nulle sur E . D'après la proposition 11, $\text{Im } f = \mathbb{K}$ et d'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker } f = n - \dim \text{Im } f = n - 1$. On retrouve donc d'une autre manière que $\text{Ker } f$ est un hyperplan de E .*

Proposition 13 *Soit $(e) = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit H un hyperplan de E . Alors :*

1. *Il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ tel que*

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in H \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0.$$

On dit que $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ est une équation cartésienne de H relativement à la base (e) .

2. *Soit $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Si $b_1 x_1 + \dots + b_n x_n = 0$ est une équation cartésienne de H relativement à la base (e) , alors les deux n -uplets $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont colinéaires : $\exists k \in \mathbb{K}^*$ tel que $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i = ka_i$.*

Preuve. Soit f une forme linéaire non nulle telle que $H = \text{Ker } f$.

1. Soit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n \in E$. On a : $x \in H \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 f(e_1) + \dots + x_n f(e_n) = 0 \Leftrightarrow a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$, en notant, pour tout $i = 1, \dots, n, a_i = f(e_i)$.

2. Posons, pour tout $x \in E, g(x) = b_1 x_1 + \dots + b_n x_n$. Comme g est une forme linéaire non nulle sur E , de noyau H , d'après la proposition 12, il existe $k \in \mathbb{K}^*$ tel que $g = kf$. Par conséquent, $\forall i \in \{1, \dots, n\}, b_i = g(e_i) = kf(e_i) = ka_i$.