Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n^o 12.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

Montrer que $E(\dfrac{1}{1+X}) = \dfrac{1-(1-p)^{n+1}}{(n+1)p}$.

Exercice 2. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4P(X = n+2) = 5P(X = n+1) - P(X = n)$.
Déterminer la loi de X.

Exercice 3. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire deux boules simultanément. On appelle X le plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 4. Une boîte contient n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 3$). On tire simultanément trois jetons. On note X le plus petit numéro tiré, Z le plus grand numéro tiré, et Y l'autre numéro tiré.

1. Soit $k \in [\![1, n-3]\!]$. Calculer $P(X \geq k)$. En déduire la loi et l'espérance de X.

2. Déterminer la loi et l'espérance de Y et Z.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.

1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$.

2. Déterminer la loi de $X - Y$.

Exercice 6. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes.

1. Déterminer la loi de $Y_k = X_k X_{k+1}$.

2. Déterminer l'espérance et la variance de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Exercice 7. Un joueur dispose de N dés discernables à 6 faces équilibrés. Il lance ces dés et met de côté les dés donnant un 6 (s'il y en a) et relance les autres. On note S_1(resp. S_2) le nombre de 6 obtenus après un (resp. deux) lancer(s).

1. Quelle est la loi de S_1 ?

2. Déterminer la loi de S_2. *Indication : utiliser le système complet d'événements* $(S_1 = 0), \ldots, (S_1 = N)$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante : si $X = k \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = k$ et si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $\{1, \cdots, n\}$. Calculer la loi de Y et son espérance. Vérifier que $E(Y) \geq E(X)$. Etait-ce prévisible ?

Exercice 9. Soit X une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Déterminer l'espérance des v.a. $\dfrac{1}{X+1}$ et $\dfrac{1}{(X+1)(X+2)}$. En déduire l'espérance de la v.a. $\dfrac{1}{X+2}$.

Exercice 10. Soit X une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
Si X prend la valeur $2n+1$, $n \in \mathbb{N}$, Y prend la valeur 0 et si X prend la valeur $2n$, $n \in \mathbb{N}$, Y prend la valeur n.

Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.

Exercice 11. On effectue une première série de lancers d'une pièce équilibrée et on note N le rang du premier Pile obtenu. On effectue alors une seconde série de N lancers et on note X le nombre de Pile obtenu lors de cette série. Déterminer la loi de X et la loi de N.

Exercice 12. Soit $n \geq 2$. Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.

2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules de l'urne, une à une avec remise. On s'arrête lorsque pour la première fois le numéro tiré est supérieur ou égal aux numéros tirés précédemment. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Préciser $X_n(\Omega)$. Justifier que $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(X_n > j) = \dfrac{\binom{n}{j}}{n^j}$.

2. Déterminer la loi de X_n.

3. *On rappelle que si Y est une variable aléatoire à valeurs dans* $\{0, \ldots, n\}$, $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(Y \geq k)$.

Calculer l'espérance de X_n et préciser $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\frac{j}{n})^k$.

2. k urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On extrait au hasard une boule de chaque urne.
Soit X_n la v.a. égale au plus grand numéro obtenu.

2. a. Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. Calculer $P(X_n \leq j)$.

2. b. Déterminer la loi de X_n.

2. c. Déterminer un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 15. Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. On note $V(X)$ sa variance.

1. Prouver que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $V(X) \leq E((X-m)^2)$.

2. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq X \leq b$. Prouver que $V(X) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 16. Soit X une variable alétoire réelle, majorée par un réel M, et d'espérance finie.

Montrer que pour tout $x < M$, $P(X \leq x) \leq \dfrac{M - E(X)}{M - x}$.

Exercice 17. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer la probabilité que la matrice aléatoire $\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$ soit inversible.

Exercice 18. **1.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire telle que X^2 est d'espérance finie. Justifier que :
$$E((X-\lambda)^2) = V(X) + (\lambda - E(X))^2.$$
2. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur un même espace probabilisé telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n^2)$ existe, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = \lambda$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - \lambda| \geq \varepsilon) = 0$.

Exercice 19. Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ si n est pair et la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-p)$ si n est impair.

Soit $\omega \in \Omega$. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, en posant :

$$Y(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / X_n(\omega) = 1\} \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\,;\text{ et } Y(\omega) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Justifier que $P(Y=0) = 0$. Déterminer la loi de Y.

2. Montrer que Y est d'espérance finie égale à $\dfrac{1+p}{1-p+p^2}$.

Exercice 20. Le nombre de pièces sortant d'une usine en une semaine est une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25.

1. Montrer que la probabilité que la production d'une semaine dépasse 75 pièces est inférieure à $\dfrac{2}{3}$.

2. Montrer que la probabilité que l'usine produise en une semaine entre 40 et 60 pièces est supérieure à $\dfrac{3}{4}$.

Exercice 21. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$ et $k \in \mathbb{N}$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq k) = 0$.

2. Vérifier que si $n > \frac{k}{p}$, $(X_n \leq k) \subset (|X_n - np| \geq np - k)$ puis retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 22. Soient X et Y deux v.a. indépendantes suivant respectivement la loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer (et reconnaître) la loi de X sachant $X+Y=n$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ telles que la loi de X est la loi uniforme sur $\{1,2,\dots,n\}$ et pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, la loi de Y sachant $X=k$ est la loi uniforme sur $\{1,\dots,k\}$. Déterminer la loi de Y.

Exercice 24. Soient $p \in]0,1[$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y). Montrer que Y suit la loi de Poisson de paramètre λp.

2. Déterminer la loi de $Z = X - Y$. Etablir l'indépendance des variables aléatoires Y et Z.

Exercice 25. Soient X et Y deux v.a. sur un même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que :
$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=j)\cap(Y=k)) = C(j+k)2^{-j-k}.$$
1. Déterminer la valeur de C.

2. Déterminer les lois marginales. X et Y sont-elles indépendantes ?

3. Calculer $P(X=Y)$.

Exercice 26. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. mutuellement indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $x > 0$.

1. Justifier que $P(\dfrac{S_n}{n} \geq x) \leq \dfrac{1}{nx^2}$.

2. a. Soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer l'espérance de la v.a. $\exp(tS_n)$.

2. b. Montrer, en utilisant l'inégalité de Markov avec $\exp(tS_n)$, que pour $\forall t > 0$, $P(\dfrac{S_n}{n} \geq x) \leq e^{-ntx}(\mathrm{ch(t)})^n$.

3. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) \leq e^{\frac{t^2}{2}}$. *Indication : utiliser les DSE(0).*

4. En déduire finalement que $P(\frac{S_n}{n} \geq x) \leq e^{-n\frac{x^2}{2}}$ et que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} P(\frac{S_n}{n} \geq x)$ converge.

Exercice 27. Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m,p)$.

1. Déterminer la fonction génératrice de $X+Y$. En déduire la loi de $X+Y$.

2. En redéterminant directement la loi de $X+Y$, déduire de 1. que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j} = \binom{n+m}{k}$ (formule de Vandermonde).

3. Soit $k \in [\![0, n+m]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=k$.

Remarque. Cette loi est appelée loi hypergéométrique $\mathcal{H}(k,n,m)$, de paramètres k, n et m.

4. Une urne contient n boules blanches et m boules noires. On tire k boules de l'urne.
Soit Z la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenus. Déterminer la loi de Z.

Exercice 28. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de loi suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Soient $Z = \min(X,Y)$ et $U = \max(X,Y)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(X \geq n)$ et $P(Z \geq n)$.

2. Quelle loi suit la v.a. Z ?

3. Déterminer la loi de U.

4. Calculer $E(U)$.

Exercice 29. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que la v.a $X+1$ soit de loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
1. Déterminer la fonction génératrice de X. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

2. Soient $X_1, \cdots, X_r$ des v.a. mutuellement indépendantes de même loi que X, et $S_r = X_1 + \cdots + X_r$.

2. a. Calculer $E(S_r)$ et $V(S_r)$.

2. b. Déterminer la fonction génératrice de S_r.

2. c. En déduire la loi de S_r.