Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 13.

Exercice 1. On note $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < \cdots < a_n$. On pose pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$: $f_k(x) = e^{a_k x}$, $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que la famille $(f_1, \cdots, f_n)$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose : $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$.
Montrer que $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = (P(1), P(2))$.
1. Vérifier que f est linéaire et écrire la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 4. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. Soit f l'application de E dans E définie par : $\forall P \in E$, $f(P) = P - P'$.
1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Soit $Q \in E$. Montrer que l'unique antécédent de Q par f est une combinaison linéaire des polynômes $Q, Q', \cdots, Q^{(n)}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \mapsto AM$.
1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.
2. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?
3. Déterminer la trace de f.

Exercice 6. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont deux matrices semblables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Montrer que $E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f \Rightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
2. Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
3. Montrer que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Rightarrow E = \operatorname{Im} f \oplus \operatorname{Ker} f$.

Exercice 8. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égal à 2 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{rg}(f) = 1$.
1. Démontrer que $f \circ f = \operatorname{tr}(f) f$.
2. Donner un exemple d'un endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ avec $\operatorname{rg}(f) = 1$ et vérifier l'égalité de la question précédente.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$ev. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f^2 - 7f + 12Id_E = 0$.
1. Montrer que f est bijectif et exprimer f^{-1} à l'aide de Id_E et de f.
2. Vérifier que $f - 3Id_E$ et $4Id_E - f$ sont deux projecteurs.
3. Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f - 3Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 4Id_E)$.

Exercice 11. 1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que f est une projection vectorielle que l'on précisera.
2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 13 & -8 & -12 \\ 12 & -7 & -12 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
Montrer que g est une symétrie vectorielle que l'on précisera.

Exercice 12. `[Noyaux et images itérées d'un endomorphisme]` Soit E un $\mathbb{K}$ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.
1. Vérifier que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\operatorname{Ker} f^k \subset \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^{k+1} \subset \operatorname{Im} f^k$.

On suppose désormais que E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Montrer qu'il existe $k \in \{1, \cdots, n\}$ tel que $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$. *On note* $p = \min\{k \in \{1, \cdots, n\} / \operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}\}$.
3. Vérifier que $\forall k \geq p$, $\operatorname{Ker} f^k = \operatorname{Ker} f^{k+1}$ et $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k+1}$.
4. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f^p \oplus \operatorname{Im} f^p$.

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id_E$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note : $E_\lambda(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda Id_E)$.
Prouver que $E = E_1(f) \oplus E_j(f) \oplus E_{j^2}(f)$.

Exercice 14. Soient $f_1, \ldots, f_n$ des projecteurs d'un espace vectoriel E tels que $f_1 + \cdots + f_n = Id_E$ et pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $i \neq j$, $f_i \circ f_j$ est l'endomorphisme nul de E.
1. Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f_i est une projection vectorielle.
2. Vérifier que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{Im} f_i$.

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + 2f$.
Prouver que $E = \operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Ker}(f + Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$.

Exercice 16. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit θ l'endomorphisme nul de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = \theta$.

2. Montrer que si $p+q$ est un projecteur, alors $p+q$ est la projection sur $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q$.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Montrer que $\operatorname{rg}(f^2) \leq \dfrac{n}{2}$.

Exercice 18. `[Théorème d'Hadamard]`. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$, $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Le but de cet exercice est de prouver que A est inversible en raisonnant par l'absurde :

On suppose donc A non inversible. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A.

1. Justifier l'existence d'une colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AX = 0$. *Indication : considérer* $\operatorname{Ker} f$.

2. On pose alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \cdots, 0)\}$, et $M = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$.

Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_k| = M$. Obtenir une contradiction en considérant la $k^{\text{ième}}$ ligne du système $AX = 0$.

Exercice 19. Soit E un $\mathbb{K}$ev. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Exercice 20. 1. Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, x + 2y - z = 0\}$ et $D = \operatorname{Vect}((1, 0, -1))$.

Montrer que P et D sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

2. On note p la projection vectorielle sur D, de direction P ; q la projection vectorielle sur P, de direction D ; et s la symétrie vectorielle par rapport à P, de direction D.

2. a. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $u' = p(u) = (x', y', z')$. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. b. Déterminer la matrice de q et la matrice de s dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.