Devoir de mathématiques n° 6

Problème 1. *Calcul de* $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

1. Prouver l'existence de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, dt$.

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $A > 0$ tels que $\varepsilon < A$. Montrer, en intégrant par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A \sin(t) \cdot \frac{1}{t}\, dt$, que I existe et que $I = J$.

Indication : prendre $t \mapsto 1 - \cos t$ *comme primitive de* $\sin$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{t^2}\, dt$, $A_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\, dt$ et $B_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t}\, dt$.

3. Justifier l'existence des intégrales I_n, A_n et B_n.

4. Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = I$. *Indication : commencer par effectuer un changement de variable.*

5. *Calcul de* A_n.

5. a. Vérifier que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\sin(a + b)\sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\sin^2(nt) - 2\sin^2((n + 1)t) + \sin^2((n + 2)t) = 2\sin^2(t)\cos(2(n + 1)t) \ (*)$$

5. b. Déduire de l'égalité $(*)$ précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n = 0$.

5. c. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\dfrac{\pi}{2}$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $A_n - B_n = \dfrac{\pi}{4}$.

7. Justifier que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x \le x \le \tan x$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n \le I_n \le A_n$.

8. Prouver que $I = \dfrac{\pi}{2}$.

Problème 2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1 + t^3)^n}$.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'existence de I_n.

1. b. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$ en utilisant le théorème de convergence dominée.

1. c. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} (-1)^n I_n$.

1. d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de $J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3t^2}{(1 + t^3)^{n+1}}\, dt$, puis calculer J_n.

1. e. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \ge \dfrac{1}{2} J_n$ et préciser la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\ge1} I_n$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = \dfrac{3n - 1}{3n} I_n$.

Indication : commencer par intégrer par parties $I_n(A) = \displaystyle\int_0^A 1 \cdot \frac{1}{(1 + t^3)^n}\, dt$, *avec* $A > 0$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \ln(n^{\frac{1}{3}} I_n)$.

3. a. Déterminer $C \in \mathbb{R}^*$ tel que $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{n^2}$.

3. b. En déduire l'existence d'une constante $\ell > 0$ (que l'on ne cherchera pas à calculer) telle que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^{\frac{1}{3}}}$.

4. Soit $J = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{t^3}{1 + t^3}\right) dt$.

4. a. Montrer que J existe.

4. b. Montrer en intégrant par parties que $J = -3I_1$.

4. c. Montrer avec un théorème d'intégration terme à terme que $J = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{I_n}{n}$.

Indication : utiliser le DSE(0) de $\ln(1 - x)$, $x \in]-1, 1[$.

Partie facultative.

Exercice 1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$. Soit $a > 0$.

1. Prouver que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty} \int_X^{X+a} (f(x) - \ell)\, dx = 0$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} (f(x+a) - f(x))\, dx$ converge.

3. *Exemple.* Calculer $\displaystyle I = \int_0^{+\infty} (\arctan(x+1) - \arctan(x))\, dx$.

Exercice 2. *Mines-Ponts PC-Math2-2019.*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et telle qu'il existe un réel $C > 0$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $|f(t)| \leq \dfrac{C}{t^2+1}$.

Pour tout $h > 0$, on pose : $\displaystyle S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$.

1. Justifier l'existence de $S(h)$ pour tout $h > 0$.

Soit $h > 0$. On pose pour tout $t \in \mathbb{R}^+$: $\varphi_h(t) = f(\lfloor \frac{t}{h} \rfloor h)$ où $\lfloor\ \rfloor$ est la fonction partie entière.

2. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\, dt$ converge absolument et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\, dt = S(h)$.

3. Montrer que pour tous $h \in]0, 1]$ et $t \in [1, +\infty[$, $|\varphi_h(t)| \leq \dfrac{C}{1 + (t-1)^2}$.

4. En déduire que $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} S(h) = \int_0^{+\infty} f(t)\, dt$.

Indication : utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

Exercice 3. **1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note : $\displaystyle I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2}\, dt$.

Vérifier que l'intégrale $I(x)$ converge et que $I(x) = I(1)|x|$.

2. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Déduire de 1. que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j|$.

3. Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Déduire de 2. que $\displaystyle\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j| \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |x_i|$