Problème 1.

1. Notons f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t>0,\ f(t)=\dfrac{\sin^2 t}{t^2}$. Alors f est continue sur $]0,+\infty[$ et $J=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ converge.

En effet : *i)* Comme $\sin t \underset{t\to+\infty}{\sim} t$, $J_1=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$ existe car f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=\displaystyle\lim_{t\to0^+} f(t)=1$.

ii) $J_2=\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge par comparaison de fonctions positives car, pour tout $t\geq 1$, $0\leq f(t)\leq \dfrac{1}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge.

2. *Question très classique*. Intégrons par parties $\displaystyle\int_\varepsilon^A \sin(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt$ en prenant $t\mapsto 1-\cos t$ comme primitive de la fonction sinus :

$$\int_\varepsilon^A \sin(t)\cdot\frac{1}{t}\,dt=[\frac{1-\cos t}{t}]_\varepsilon^A+\int_\varepsilon^A\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt=\frac{1-\cos A}{A}-\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}+\int_\varepsilon^A\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt.$$

• D'une part, comme $1-\cos(\varepsilon)\underset{\varepsilon\to0}{\sim}\dfrac{\varepsilon^2}{2}$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0}\frac{1-\cos\varepsilon}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\varepsilon}{2}=0$, et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1-\cos A}{A}=0$ par encadrement car pour tout $A>0$, $0\leq\dfrac{1-\cos A}{A}\leq\dfrac{2}{A}$ et $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{2}{A}=0$.

• D'autre part, l'intégrale généralisée $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$ existe : notons g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall t>0$, $g(t)=\dfrac{1-\cos t}{t^2}$.

Cette fonction g est continue sur $]0,+\infty[$, $K_1=\displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$ existe, g étant prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0)=\displaystyle\lim_{t\to0^+} g(t)=\frac{1}{2}$, et $K_2=\displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge par comparaison de fonctions positives car, pour tout $t\geq1$, $0\leq g(t)\leq\dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge.

A ce stade du raisonnement, on peut déjà affirmer que $I=\displaystyle\lim_{\varepsilon\to0^+,\,A\to+\infty}\int_\varepsilon^A\frac{\sin t}{t}\,dt$ existe avec : $I=K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$.

• Il reste à prouver que $K=J$. Pour cela on utilise l'égalité : $1-\cos t=2\sin^2(\frac{t}{2})$ et le changement de variable $s=\frac{t}{2}$ (effectué d'abord dans $K(\varepsilon,A)=\displaystyle\int_\varepsilon^A\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt$) conduit bien à : $K=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 s}{s^2}\,ds=J$.

3. Posons pour tout $t\in]0,\frac{\pi}{2}]$, $i_n(t)=\dfrac{\sin^2(nt)}{t^2}$ et $a_n(t)=\dfrac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}$. Les fonctions i_n et a_n sont continues sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ et prolongeables par continuité en 0 en posant : $i_n(0)=n^2$, $a_n(0)=n^2$ car $\sin t\underset{t\to+\infty}{\sim} t$. D'où l'existence des intégrales I_n et A_n.

De même, posons pour tout $t\in]0,\frac{\pi}{2}[$, $b_n(t)=\dfrac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t}$. La fonction b_n est continue sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et prolongeable par continuité en 0 et en $\frac{\pi}{2}$ en posant : $b_n(0)=n^2$, $b_n(\frac{\pi}{2})=0$ car $\sin t\underset{t\to0}{\sim} t$, $\tan t\underset{t\to0}{\sim} t$ et $\displaystyle\lim_{t\to\frac{\pi}{2}^-}\tan t=+\infty$. D'où l'existence de l'intégrale B_n.

4. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $(\varepsilon,X)\in]0,\frac{\pi}{2}[^2$ tel que $\varepsilon<X$. On effectue d'abord le changement de variable : $u=nt$ dans $I_n(\varepsilon,X)=\displaystyle\int_\varepsilon^X\frac{\sin^2(nt)}{t^2}\,dt$:

$$I_n(\varepsilon,X)=n\int_{n\varepsilon}^{nX}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du,$$

puis en faisant tendre ε vers 0^+ et X vers $\frac{\pi}{2}^-$, on obtient : $I_n=n\displaystyle\int_0^{n\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du$. Enfin d'après 2.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{I_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du=\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(u)}{u^2}\,du=J=I.$$

5. a. *i)* Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. On a bien :

$$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b)&=(\sin a\cos b+\sin b\cos a)(\sin a\cos b-\sin b\cos a)=(\sin a\cos b)^2-(\sin b\cos a)^2\\&=\sin^2 a\cos^2 b-\sin^2 b\cos^2 a=\sin^2 a(1-\sin^2 b)-\sin^2 b(1-\sin^2 a)=\sin^2 a-\sin^2 b.\end{aligned}$$

ii) D'après *i)*, on a : $\sin^2((n+2)t)-\sin^2((n+1)t)=\sin((2n+3)t)\sin(t)$ et $\sin^2((n+1)t)-\sin^2(nt)=\sin((2n+2)t)\sin(t)$.

▷ On rappelle que pour tout $(p,q)\in\mathbb{R}^2$, $\sin(p)-\sin(q)=2\sin(\dfrac{p-q}{2})\cos(\dfrac{p+q}{2})$. D'où :

$$\begin{aligned}\sin^2(nt)-2\sin^2((n+1)t)+\sin^2((n+2)t)&=(\sin^2((n+2)t)-\sin^2((n+1)t))-(\sin^2((n+1)t)-\sin^2(nt))\\&=\sin((2n+3)t)\sin(t)-\sin((2n+1)t)\sin(t)\\&=\sin(t)(\sin((2n+3)t)-\sin((2n+1)t)\\&=\sin(t)\cdot2\sin(t)\cos(2(n+1)t)=2\sin^2(t)\cos(2(n+1)t).\end{aligned}$$

5. b. Soit $(\varepsilon, X) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$ tel que $\varepsilon < X$. D'après 5. a. et la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin^2((n+2)t)}{\sin^2 t}\,dt - 2\int_\varepsilon^X \frac{\sin^2((n+1)t)}{\sin^2 t}\,dt + \int_\varepsilon^X \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,dt = 2\int_\varepsilon^X \cos(2(n+1)t)\,dt.$$

Et en faisant tendre ε vers 0^+ et X vers $\frac{\pi}{2}^-$, on obtient :

$$A_{n+2} - 2A_{n+1} + A_n = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2(n+1)t)\,dt = [\frac{\sin(2(n+1)t)}{n+1}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2(\sin((n+1)\pi) - \sin(0)) = 0$$

car $\forall k \in \mathbb{Z}$, $\sin(k\pi) = 0$.

5. c. La suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique : $r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2 = 0$.
Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = (an+b)1^n = an + b$. Comme $A_0 = 0$ et $A_1 = \frac{\pi}{2}$, on a : $b = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = n\frac{\pi}{2}$.
Remarques : i) comme la valeur de A_n était donnée, on pouvait montrer ce résultat par récurrence (forte),
ii) On pouvait aussi observer que la suite $(A_{n+1} - A_n)$ est constante.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\dfrac{1}{\sin^2 t} - \dfrac{1}{\tan^2 t} = \dfrac{1-\cos^2 t}{\sin^2 t} = 1$.
Soit $(\varepsilon, X) \in]0, \frac{\pi}{2}[^2$ tel que $\varepsilon < X$. D'après ce qui précède, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_\varepsilon^X \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t}\,dt - \int_\varepsilon^X \frac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t}\,dt = \int_\varepsilon^X \sin^2(nt)\,(\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{\tan^2 t})\,dt = \int_\varepsilon^X \sin^2(nt)\,dt.$$

Et en faisant tendre ε vers 0^+ et X vers $\frac{\pi}{2}^-$, on obtient en « linéarisant » $\sin^2(nt)$:

$$A_n - B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(nt)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2nt))\,dt = \frac{1}{2}[t - \frac{\sin(2nt)}{2n}]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin(n\pi)}{2n}) = \frac{\pi}{4}$$

car $\sin(n\pi) = 0$.

7. *i)* On peut démontrer ces deux inégalités en utilisant les propriétés de l'intégrale : Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$. On a :
$\sin x = \sin x - \sin 0 = \displaystyle\int_0^x \underbrace{\cos t}_{\leq 1}\,dt \leq \int_0^x 1\,dt = x$, et $\tan x = \tan x - \tan 0 = \displaystyle\int_0^x \underbrace{(1+\tan^2 t)}_{\geq 1}\,dt \geq \int_0^x 1\,dt = x$.

ii) D'après *i)* on a, pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $0 < \sin^2 t \leq t^2 \leq \tan^2 t$, d'où $\dfrac{\sin^2(nt)}{\tan^2 t} \leq \dfrac{\sin^2(nt)}{\sin^2 t} \leq \dfrac{\sin^2(nt)}{t^2}$.
En intégrant l'inégalité précédente de 0 à $\frac{\pi}{2}$, on obtient : $B_n \leq I_n \leq A_n$, par propriété de l'intégrale.

8. D'après 5. c., 6. et 7. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{A_n}{n} - \dfrac{\pi}{4n} \leq \dfrac{I_n}{n} \leq \dfrac{A_n}{n}$, c'est-dire : $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{4n} \leq \dfrac{I_n}{n} \leq \dfrac{\pi}{2}$.
D'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n} = \frac{\pi}{2}$ par le théorème des gendarmes et finalement, $I = \dfrac{\pi}{2}$ par 4.
Remarque : on peut aussi passer à la limite dans l'encadrement précédent. On obtient ainsi $\frac{\pi}{2} \leq I \leq \frac{\pi}{2}$. D'où $I = \frac{\pi}{2}$.

Problème 2.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$. La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et telle que $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3n}}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n}}$ existe car $3n \geq 3 > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)\,dt$ existe par la règle de l'équivalent positif, et donc I_n existe (car $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur $[0, 1]$).

1. b. *i)* `[CVS]` On distingue deux cas : si $t = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$; si $t > 0$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} (1+t^3)^n = +\infty$ car $1 + t^3 > 1$, et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = 0$. En d'autres termes, la suite de fonctions (continues) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction f (continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$) définie par : $f(t) = 1$ si $t = 0$ et $f(t) = 0$ si $t > 0$.

ii) `[Domination]` Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $|f_n(t)| = f_n(t) \leq \dfrac{1}{1+t^3} = f_1(t)$ (car $(1+t^3)^n \geq 1 + t^3$), et d'après 1. a. la fonction f_1 (ne dépendant pas de n) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Le théorème de convergence dominée permet de conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} 0\,dt = 0.$$

1. c. Posons $u_n = (-1)^n I_n$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est une série alternée car, I_n étant (strictement) positive comme intégrale (généralisée) d'une fonction continue (strictement) positive sur $[0, +\infty[$, u_n est (strictement) positif (resp. négatif) si n est pair (resp. impair). De plus, la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}^*}$, c'est-à-dire la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, est (strictement) décroissante car, par linéarité de l'intégrale,

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^{+\infty} (f_n(t) - f_{n+1}(t))\,dt = \int_0^{+\infty} \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt > 0$$

comme intégrale (généralisée) d'une fonction continue (strictement) positive, et enfin d'après 1. b. $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Donc la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge par le critère des séries alternées.

1. d. *i) Existence de* J_n. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $g_n(t) = \dfrac{3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}$. La fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}^+$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, et telle que $g_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{t^{3n+1}}$. Comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^{3n+1}}$ existe car $3n+1 \geq 4 > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} g_n(t)\,dt$ existe par la règle de l'équivalent positif, et donc J_n existe (car $\displaystyle\int_0^1 g_n(t)\,dt$ existe en tant qu'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$).
ii) Calcul de J_n. La dérivée (sur $\mathbb{R}^+$) de la fonction $t \mapsto (1+t^3)^{-n}$ est la fonction $t \mapsto -3nt^2(1+t^3)^{-n-1}$. D'où :

$$J_n = \lim_{T\to+\infty} \int_0^T \frac{3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt = \lim_{T\to+\infty} [-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1+t^3)^n}]_0^T = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{n}(1-\frac{1}{(1+T^3)^n}) = \frac{1}{n}.$$

1. e. Par linéarité de l'intégrale, on obtient : $2I_n - J_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t^3-3t^2+2}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt$. Une étude des variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $N : t \mapsto 2t^3 - 3t^2 + 1$ montre que $\forall t \geq 0,\ N(t) \geq N(1) = 1$. D'où $2I_n - J_n > 0$ comme intégrale (généralisée) d'une fonction continue (strictement) positive sur $[0, +\infty[$, c'est-à-dire $I_n > \dfrac{1}{2n}$ d'après 1. d. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ étant divergente, on déduit de la comparaison de termes positifs précédente que la série $\sum_{n\geq 1} I_n$ diverge .

2. Suivons l'indication. On intègre par parties $I_n(A)$:

$$\int_0^A 1\cdot(1+t^3)^{-n}\,dt = [t(1+t^3)^{-n}]_0^A - \int_0^A 3nt^3(1+t^3)^{-n-1}\,dt = \frac{A}{(1+A^3)^n} + 3n\int_0^A \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,dt.$$

En remarquant que $t^3 = (1+t^3) - 1$, on obtient : $I_n(A) = \dfrac{A}{(1+A^3)^n} + 3n(I_n(A) - I_{n+1}(A))$, puis, en faisant tendre A vers $+\infty$:

$$I_n = 3n(I_n - I_{n+1}),$$

c'est-à-dire $I_{n+1} = \dfrac{3n-1}{3n} I_n = (1 - \dfrac{1}{3n})I_n$.
Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$ et $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} = 1 - \dfrac{1}{3n} < 1$. On retrouve la stricte décroissance de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ établie en 1. c.
3. a. Utilisons les propriétés de la fonction ln et 2. :

$$v_{n+1} - v_n = \ln((n+1)^{\frac{1}{3}} I_{n+1}) - \ln(n^{\frac{1}{3}} I_n) = \ln(\frac{(n+1)^{\frac{1}{3}}}{n^{\frac{1}{3}}}\ \frac{I_{n+1}}{I_n}) = \frac{1}{3}\ln(1+\frac{1}{n}) + \ln(1-\frac{1}{3n}).$$

Rappelons que $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + o_0(x^2)$. Alors

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}) + (-\frac{1}{3n} - \frac{1}{18n^2}) + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2}) = -\frac{2}{9n^2} + o_{+\infty}(\frac{1}{n^2})$$

et finalement $v_{n+1} - v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{2}{9n^2}$. La constante C cherchée est donc $-\frac{2}{9}$.

3. b. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$ étant convergente, la série $\sum_{n\geq 1}(v_{n+1} - v_n)$ converge par 3. a. et la règle de l'équivalent de signe constant. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge par le lien suite-série vers un réel V. Comme la fonction exponentielle est continue en V, on obtient $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}} I_n = \lim_{n\to+\infty} e^{v_n} = e^V$, c'est-à-dire $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^{\frac{1}{3}}}$ avec $\ell = e^V > 0$.
Remarque. On retrouve $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$ (cf. 1. b.) et que la série $\sum_{n\geq 1} I_n$ diverge (cf. 1. e.) par équivalence positive car la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$ diverge.

4. a. Posons, pour tout $t > 0$, $g(t) = \ln(\dfrac{t^3}{1+t^3})$. La fonction g est continue et négative sur $\mathbb{R}^{+*}$.

i) Existence de $J_1 = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$. Comme $g(t) = \ln(t^3) - \ln(1+t^3) = 3\ln(t) - \ln(1+t^3) \underset{t\to 0^+}{\sim} 3\ln(t)$ et $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,dt$ converge, J_1 existe par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif).
ii) Existence de $J_2 = \displaystyle\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$. Comme $g(t) = -\ln(\dfrac{1+t^3}{t^3}) = -\ln(1+\dfrac{1}{t^3}) \underset{t\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{t^3}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^3}\,dt$ converge, J_2 existe par la règle de l'équivalent de signe constant (négatif).
Donc $J = J_1 + J_2$ existe.

4. b. La fonction g introduite en 4. a. est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec : $g'(t) = (3\ln(t) - \ln(1+t^3))' = \dfrac{3}{t} - \dfrac{3t^2}{1+t^3} = \dfrac{3}{t(1+t^3)}$.

Soient ε et A tels que $0 < \varepsilon < A$. Intégrons par parties $J(\varepsilon, A) = \displaystyle\int_\varepsilon^A \ln(\frac{t^3}{1+t^3})\, dt = \int_\varepsilon^A 1 \cdot g(t)\, dt$:

$$J(\varepsilon, A) = [tg(t)]_\varepsilon^A - \int_\varepsilon^A tg'(t)\, dt = Ag(A) - \varepsilon g(\varepsilon) - 3\int_\varepsilon^A \frac{1}{1+t^3}\, dt.$$

D'après 4. a. *ii*) $Ag(A) \underset{A\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{A^2}$ donc $\lim\limits_{A\to+\infty} Ag(A) = 0$. Et d'après 4. a. *i*) $\varepsilon g(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to0^+}{\sim} 3\varepsilon\ln(\varepsilon)$ donc $\lim\limits_{\varepsilon\to0^+} \varepsilon g(\varepsilon) = 0$. Finalement,

$$J = \lim_{\varepsilon\to0^+,\, A\to+\infty} J(\varepsilon, A) = -3\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^3}\, dt = -3J_1.$$

4. c. Rappelons que pour tout $x \in]-1,1[$, $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ $(*)$. Donc

$$\forall t > 0,\ g(t) = \ln(\frac{t^3}{1+t^3}) = \ln(1 - \frac{1}{1+t^3}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1+t^3)^n}\ (**)$$

(en utilisant $(*)$ avec $x = \frac{1}{1+t^3} \in]0,1[$).

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t > 0$, $u_n(t) = -\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ et vérifions que les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme de la somme d'une série de fonctions intégrables (TITT) sont satisfaites :

a) Chaque fonction continue u_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ car $\displaystyle\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{n}\frac{1}{(1+t^3)^n}\, dt = \frac{1}{n}I_n$ (et I_n existe !),

b) Par définition de u_n et $(**)$, la série de fonctions (continues) $\displaystyle\sum_{n\geq1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers g (continue sur $]0,+\infty[$) car $\forall t > 0$, $g(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)$,

c) La série des intégrales $\displaystyle\sum_{n\geq1}\int_0^{+\infty} |u_n(t)|\, dt$, c'est-à-dire la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{I_n}{n}$, converge par la règle de l'équivalent positif.

En effet, d'après 3. b. on a : $\dfrac{I_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{n^{\frac{5}{3}}}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$ converge car $\frac{5}{3} > 1$.

Donc par le TITT, g est intégrable sur $]0,+\infty[$ (résultat en fait déjà établi en 4. a. car $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(t)|\, dt = \int_0^{+\infty} (-g(t))\, dt = -J$) et

$$J = \int_0^{+\infty} g(t)\, dt = \int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} u_n(t)\, dt = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{I_n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{I_n}{n}.$$

Partie facultative

Exercice 2.

1. La série $\displaystyle\sum_{n\geq0} f(nh)$ converge absolument par comparaison car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|f(nh)| \leq \dfrac{C}{h^2n^2+1} \leq \dfrac{C}{h^2}\cdot\dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^2}$ converge. D'où l'existence de $T(h) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f(nh)$ qui est, par définition, la somme de la série convergente $\displaystyle\sum_{n\geq0} f(nh)$; et finalement l'existence de $S(h) = hT(h)$.

2. *i*) Montrons tout d'abord que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\, dt$ converge absolument.

La fonction φ_h est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}^+$: pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [nh, (n+1)h[$, $\varphi_h(t) = f(nh)$ car $\dfrac{t}{h} \in [n, n+1[$. $(*)$

On peut déjà affirmer que $\displaystyle\int_0^h |\varphi_h(t)|\, dt$ existe car cette intégrale est égale à $h|f(0)|$ d'après $(*)$.

De plus, pour tout $t \geq h$, $0 \leq \dfrac{t}{h} - 1 < \lfloor\dfrac{t}{h}\rfloor$ donc $\lfloor\dfrac{t}{h}\rfloor h \geq t - h$ et $(\lfloor\dfrac{t}{h}\rfloor h)^2 \geq (t-h)^2$, d'où, par propriété de f,

$$|\varphi_h(t)| \leq \frac{C}{(\lfloor\frac{t}{h}\rfloor h)^2 + 1} \leq \frac{C}{(t-h)^2+1}.$$

Or $\displaystyle\int_h^{+\infty} \frac{C}{(t-h)^2+1}\, dt$ converge par la règle de l'équivalent positif car $\dfrac{C}{(t-h)^2+1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{C}{t^2}$ et $\displaystyle\int_h^{+\infty}\frac{dt}{t^2}$ converge, donc $\displaystyle\int_h^{+\infty} |\varphi_h(t)|\, dt$ converge par comparaison (de fonctions positives). En conclusion, $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\varphi_h(t)|\, dt$ converge.

Remarque : $\displaystyle\int_h^{+\infty} \frac{C}{(t-h)^2+1}\,dt \underset{s=t-h}{=} \int_0^{+\infty} \frac{C}{s^2+1}\,ds = \frac{C\pi}{2}$.

ii) Par définition de la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,dt$ converge, $(*)$ et la relation de Chasles, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \varphi_h(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{Nh} \varphi_h(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} \int_{nh}^{(n+1)h} \varphi_h(t)\,dt = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} hf(nh) = \sum_{n=0}^{+\infty} hf(nh) = S(h).$$

3. On a déjà montré en 2. que pour tout $t \geq h$, $|\varphi_h(t)| \leq \dfrac{C}{(t-h)^2+1}$. Supposons $h \in]0,1]$ et $t \in [1,+\infty[$. Alors $t-h \geq t-1 \geq 0$ et $(t-h)^2 \geq (t-1)^2$. Donc si $t \geq 1$, $t \geq h$, et : $|\varphi_h(t)| \leq \dfrac{C}{(t-h)^2+1} \leq \dfrac{C}{(t-1)^2+1}$.

4. **`[Plus technique !]`** D'après la caractérisation séquentielle de la limite, il suffit de prouver que pour toute suite (h_n) de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S(h_n) = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt$.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = 0$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $h_n \in]0,1]$.

Rappelons que d'après 2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S(h_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_{h_n}(t)\,dt$.

On peut utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite de fonctions (continues par morceaux sur $\mathbb{R}^+$) $(\varphi_{h_n})_{n\geq N}$:

i) Convergence simple de $(\varphi_{h_n})_{n\geq N}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a : $t - h_n < \lfloor \frac{t}{h_n} \rfloor h_n \leq t$ donc par le théorème des gendarmes, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \lfloor \frac{t}{h_n} \rfloor h_n = t$, et, comme f est continue en t,

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_{h_n}(t) = \lim_{n\to+\infty} f(\lfloor \frac{t}{h_n} \rfloor h_n) = f(t).$$

ii) Soit $n \geq N$. D'après 3. pour tout $t \geq 1$, $|\varphi_{h_n}(t)| \leq \dfrac{C}{(t-1)^2+1}$ car $h_n \in]0,1]$ si $n \geq N$, et pour tout $t \in [0,1[$,

$$|\varphi_{h_n}(t)| = |f(\lfloor \frac{t}{h_n} \rfloor h_n)| \leq C$$

donc en posant :

$$g(t) = C \text{ si } t \in [0,1[\text{ et } g(t) = \frac{C}{(t-1)^2+1} \text{ si } t \geq 1,$$

la fonction g (indépendante de n) est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et on a :

$$\forall n \geq N,\ \forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\varphi_{h_n}(t)| \leq g(t).$$

Les hypothèses du théorème de convergence dominée étant satisfaites pour la suite de fonctions $(\varphi_{h_n})_{n\geq N}$, on peut conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty} S(h_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_{h_n}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \varphi_{h_n}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt.$$

Exercice 3. 1. Posons $f_x(t) = \dfrac{1-\cos(xt)}{t^2}$, $t > 0$: f_x est continue sur $]0,+\infty[$ et positive.

i) Existence de $I_1(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,dt$.

$I_1(x)$ converge car f_x est prolongable par continuité en 0 en posant $f_x(0) = \frac{x^2}{2}$ puisque $1 - \cos u \underset{u\to 0}{\sim} \frac{u^2}{2}$.

ii) Existence de $I_2(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} f_x(t)\,dt$.

$I_2(x)$ converge par comparaison de fonctions positives car, pour tout $t \geq 1$, $0 \leq f_x(t) \leq \dfrac{2}{t^2}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge.

Donc $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_x(t)\,dt$ existe.

iii) Soit $x > 0$. En effectuant le changement de variable $s = xt$ dans $I(x)$, on obtient : $I(x) = x\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(s)}{s^2}\,ds = I(1)x$.

Et comme $x \mapsto I(x)$ est paire car cos est paire, pour tout $x < 0$, $I(-x) = I(x) = xI(1)$. Enfin $I(0) = 0$ car $f_0(t) = 0$.

En conclusion, pour tout réel x, $I(x) = I(1)|x|$. *Remarque : $I(1) > 0$ car f_1 n'est pas la fonction nulle sur* $]0,+\infty[$.

2. Très astucieux ! Rappelons que l'intégrale généralisée convergente de 0 à $+\infty$ d'une fonction continue positive est positive.

D'après 1. $|x_i + x_j| - |x_i - x_j| = \dfrac{1}{I(1)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos((x_i - x_j)t) - \cos((x_i - x_j)t)}{t^2}\,dt = \frac{2}{I(1)} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x_i t)\sin(x_j t))}{t^2}\,dt$.

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i + x_j| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |x_i - x_j| &= \frac{2}{I(1)} \int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\sin(x_i t)\sin(x_j t))}{t^2}\,dt \\ &= \frac{2}{I(1)} \int_0^{+\infty} (\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin(x_i t)}{t})^2\,dt \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

.