Spé PC. Lycée Rabelais-Saint-Brieuc — A rendre le 13. 1. 2025

Devoir de mathématiques n° 7

Problème 1. `[Dérangements d'un ensemble fini].`

Soit E un ensemble fini quelconque. Soit f une permutation de E, c'est-à-dire une bijection de E sur E.
- *On dit que $e \in E$ est un «point fixe» de f si $f(e) = e$.*
- *On dit que f est un «dérangement » de E si f n'a pas de points fixes.*
- *Si card$(E) = n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le nombre de dérangements de E. Par convention, $d_0 = 1$.*

1. Calculer d_1, d_2 et d_3.

2. Prouver que $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_j$.

Indication : classer les permutations d'un ensemble fini E de cardinal n suivant leur nombre de point(s) fixe(s).

On propose ci-dessous deux méthodes différentes permettant de calculer d_n en fonction de n.

<u>*Méthode n° 1*</u> *:*

Soit $(k, p, n) \in \mathbb{N}^3$ tel que $p \leq k \leq n$.

3. Vérifier que $\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$. En déduire que :

3. a. $\displaystyle\sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = 2^k \binom{n}{k}$ et **3. b.** $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \begin{cases} (-1)^n & \text{si } p = n \\ 0 & \text{si } p < n \end{cases}$

4. Justifier avec soin que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \Big(\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{j} d_j\Big) = \sum_{j=0}^{n} d_j \Big(\sum_{k=j}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{j}\Big)$.

5. Déduire de 2. et 3. b. que $\forall n \in \mathbb{N}$, $d_n = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

<u>*Méthode n° 2*</u> *:*

6. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{d_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.

$\triangleright$ On pose, pour tout $x \in]-1, 1[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n}{n!} x^n$.

7. Déduire de 2. que $\forall x \in]-1, 1[$, $e^x f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ et retrouver l'expression de d_n obtenue en 5.

Indication : utiliser le cours sur le produit de deux séries absolument convergentes ou le cours sur le produit de deux séries entières.

Problème 2. Etudier l'exercice 1 du sujet CCINP PC 2020.

Partie facultative.

Problème 3. Concours Centrale Supélec PSI 2023 - Mathématiques 2

Etude de la Partie II : Formule de Stirling. Questions Q8 à Q22.