Exercices avec solutions et/ou indications.

Exercice 1. Un ascenseur pouvant s'arrêter à n étages contient r personnes choisissant au hasard l'étage où elles s'arrêtent .

1. Quelle est la probabilité que ces r personnes s'arrêtent à des étages tous distincts.

2. Soit $p \in [\![1, r]\!]$. Calculer la probabilité que p personnes s'arrêtent au même étage, les autres s'arrêtant à des étages deux à deux distincts et différents de celui des p personnes.

Indication. 1. Ω peut s'identifier à l'ensemble des r-listes $(e_1, \cdots, e_r)$, où pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, e_i est le numéro de l'étage choisi par la i-ième personne.

2. Combien de façons de choisir ces p personnes ? Une fois ce choix fait, combien de façons de choisir l'étage et de répartir les $r - p$ autres personnes sur des étages deux à deux distincts ?

Exercice 2. Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que

$$P(A \cup B)P(A \cap B) = P(A)P(B) - P(\overline{A} \cap B)P(A \cap \overline{B}).$$

Solution. On a : $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ (union disjointe) donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ et

$$P(A \cup B)P(A \cap B) = (P(A) + P(B \cap \overline{A}))P(A \cap B) = P(A)P(A \cap B) + P(B \cap \overline{A})P(A \cap B)$$

Comme $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ (union disjointe), $P(A \cap B) = P(B) - P(B \cap \overline{A})$. Idem $P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B})$. D'où :

$$\begin{aligned} P(A \cup B)P(A \cap B) &= P(A)(P(B) - P(B \cap \overline{A})) + P(B \cap \overline{A})P(A \cap B) \\ &= P(A)P(B) - P(B \cap \overline{A})(P(A) - P(A \cap B)) \\ &= P(A)P(B) - P(B \cap \overline{A})P(A \cap \overline{B}) \end{aligned}$$

Remarque. On en déduit que : $P(A \cup B)P(A \cap B) \leq P(A)P(B)$ car $P(B \cap \overline{A})(P(A \cap \overline{B}) \geq 0$.

Exercice 3. On considère deux événements indépendants A et B de probabilités respectives 1/4 et 1/3.
Quelle est la probabilité de l'événement C : « un seul des deux événements s'est réalisé »

Indications. Vérifier que $C = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$. En déduire que $P(C) = 5/12$.

Exercice 4. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N coffres numérotés de 1 à N et on fait les hypothèses suivantes : la probabilité qu'un trésor soit caché dans un seul de ces coffres est égale à p et chaque coffre a la même probabilité de contenir un trésor. Sachant que l'on a ouvert les $N - 1$ coffres numérotés 1, ..., $N - 1$ sans trouver de trésor, quelle est la probabilité que le coffre numéroté N contienne un trésor ?

Indications. Soit $k \in [\![1, N]\!]$. Notons T_k l'événement : « le trésor est dans le coffre n° k». Préciser $P(T_1 \cup \cdots \cup T_N)$. En déduire $P(T_k)$. Calculer $P(\overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{N-1}})$. Interpréter l'événement $T_N \cap \overline{T_1} \cdots \cap \overline{T_{N-1}}$ et répondre à la question posée, c'est-à-dire calculer $P(T_N / \overline{T_1} \cap \cdots \cap \overline{T_{N-1}})$.

Exercice 5. On choisit au hasard un entier naturel. On suppose que la probabilité $p_n = P(\{n\})$ d'obtenir l'entier n est égale à $\frac{1}{2^{n+1}}$.

1. Montrer que l'on définit bien une probabilité P sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
2. Calculer la probabilité de l'événement I : « obtenir un entier impair».

3. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : « obtenir un multiple entier de k».
3. b. Calculer $P(A_2 \cup A_3)$.

Solution. 1. P est une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(\{n\}) \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$ (somme de la série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$).

2. On a : $P(I) = P(\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}\{2k+1\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(\{2k+1\}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k+2}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^{k+1}} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{4^k} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

3. a. On a : $A_k = \{qk / q \in \mathbb{N}\}$. Donc $P(A_k) = \displaystyle\sum_{q=0}^{+\infty} P(\{qk\}) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{qk+1}} = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{+\infty}(\frac{1}{2^k})^q = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2^k}} = \frac{2^{k-1}}{2^k - 1}$.

3. b. On a : $P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_2 \cap A_3) = P(A_2) + P(A_3) - P(A_6)$ car un multiple de 2 et de 3 est un multiple de 6 (et réciproquement). Donc d'après 3. a. $P(A_2 \cup A_3) = \frac{2}{3} + \frac{4}{7} - \frac{32}{63} = \frac{46}{63}$.

Exercice 6. 1. Soient A, B, C, D quatre événements d'un espace probabilisé.
Exprimer $P(A \cup B \cup C \cup D)$ à l'aide de probabilités d'intersections d'événements.
2. Un sac contient 4 jetons numérotés de 1 à 4. On effectue n fois de suite l'opération suivante : choisir un jeton dans le sac, noter son numéro et le remettre dans le sac. Calculer la probabilité p_n que les quatre chiffres apparaissent au moins une fois chacun lors des n choix et préciser $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Indications. 1. On vérifie que :

$$\begin{aligned} P(A\cup B\cup C\cup D) &= P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-(P(A\cap B)+P(A\cap C)+P(A\cap D)+P(B\cap C)+P(B\cap D)+P(C\cap D)) \\ &+ P(A\cap B\cap C)+P(A\cap B\cap D)+P(A\cap C\cap D)+P(B\cap C\cap D)-P(A\cap B\cap C\cap D) \end{aligned}$$

2. Notons A_k l'événement : « le chiffre k apparaît au moins une fois lors des n choix. Remarquer que :

$$p_n = P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = 1 - P(\bar{A_1}\cup\bar{A_2}\cup\bar{A_3}\cup\bar{A_4})$$

et en utilisant la formule de la question 1. on obtient : $p_n = 1 - 4(\frac{3}{4})^n + 6(\frac{1}{2})^n - 4(\frac{1}{4})^n$ et $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$.

Exercice 7. `[Exercice n° 4-TD 11]` Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire simultanément n boules de l'urne.
1. Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Calculer la probabilité de l'événement A_k : « obtenir k boules rouges parmi les n boules tirées».
2. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Solution :
1. Il y a tout d'abord $\binom{2n}{n}$ façons de choisir n boules simultanément parmi les $2n$ boules de l'urne (nombre de "cas possibles") (nombre de parties à n éléments d'un ensemble à $2n$ éléments).
Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. Pour constituer un sous-ensemble de n boules de l'urne contenant k boules rouges et $n-k$ blanches, il faut choisir k boules rouges parmi les n boules rouges de l'urne : il y a $\binom{n}{k}$ façons de faire ce choix, et il faut choisir les $n-k$ boules blanches parmi les n boules blanches de l'urne : il y a $\binom{n}{n-k}$ façons de faire ce choix. Par principe multiplicatif, il y a finalement $\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}$ façons de choisir un sous-ensemble de n boules de l'urne contenant k boules rouges et $n-k$ blanches (nombre de "cas favorables").
Comme il y a implicitement équiprobabilité du choix de ces n boules parmi les $2n$ boules de l'urne, on obtient donc :

$$P(A_k) = \frac{\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}.$$

2. Les événements $A_0, A_1, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements. On a donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(A_k) = 1$, d'où l'égalité demandée (déjà rencontrée) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 8. `[Exercice n° 21-TD 11]` Un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. On note $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir pile lors de chaque lancer. S'il lui a fallu n lancers pour obtenir pile, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant. Calculer la probabilité que le joueur gagne.

Indications. Notons A_n l'événement : « il obtient pour la première fois pile lors du $n$ème lancer », B_n l'événement : « il tire le seul billet gagnant parmi les n billets proposés », $G_n = A_n \cap B_n$ l'événement : « il obtient pour la première fois pile lors du n ème lancer et il tire le billet gagnant », et enfin G l'événement : «le joueur gagne». On a $G = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} G_n$ et comme les événements G_n sont incompatibles,

$$P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(G_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}\cdot\frac{1}{n} = \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n} = -\frac{p\ln(p)}{1-p}$$

car $\forall x \in]-1,1[, -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}$.

Exercice 9. `[Exercice n° 24-TD 11]` Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.
1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ? *On utilisera la formule de Stirling.*
3. Le résultat précédent reste-t-il vrai si on remet la boule accompagnée de trois autres boules de la même couleur ?

Solution. **1.** Soient A_k l'événement : « la k-ème boule tirée est rouge», $k \in \mathbb{N}^*$, et B_n l'événement : « les n premières boules tirées sont rouges», $n \in \mathbb{N}^*$. On a : $B_n = A_1 \cap \cdots \cap A_n$ et en utilisant la formule des «probabilités composées» :

$$P(B_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\cdots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} = \frac{(2n)!}{(2\cdot 4\cdots 2n)^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

car $2\cdot 4\cdots 2n = (2\cdot 1)(2\cdot 2)\cdots(2\cdot n) = 2^n n!$.

2. Soit C l'événement : «toutes les boules tirées sont rouges». On a : $C = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_{n+1} \subset B_n$, donc par « continuité décroissante de P », $P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$. La formule de Stirling donne un équivalent de $P(B_n)$: comme $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$, $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(\frac{2n}{e})^{2n}$, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\,(\frac{n}{e})^{2n}$, donc $P(B_n) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$. Par conséquent, $P(C) = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} = 0$.

3. Gardons les mêmes notations. On a cette fois : $P(B_n) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{5}\cdots\dfrac{3n-2}{3n-1} = \prod_{k=1}^{n} \dfrac{3k-2}{3k-1}$. Posons

$$S_n = \ln(P(B_n)) = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 - \frac{1}{3k-1}).$$

La série (à termes négatifs) $\sum_{n\geq 1} \ln(1 - \dfrac{1}{3n-1})$ diverge par la règle de l'équivalent (négatif) car $\ln(1-\frac{1}{3n-1}) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{3n}$ et la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n}$ diverge. Donc la suite *décroissante* et divergente $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $-\infty$ et $P(C) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{S_n} = 0$.
Remarque. On pouvait également considérer $\ln(P(B_n))$ dans la question 2. et ainsi prouver que $P(C) = 0$ sans utiliser la formule de Stirling.

Exercice 10. `[Exercice n° 25-TD 11]` La probabilité d'obtenir «face» avec la pièce A (resp. la pièce B) est égale à $\frac{1}{2}$ (resp. $\frac{1}{3}$). On choisit une des deux pièces au hasard. On la lance. Si on obtient «face», on relance la même pièce, sinon on lance l'autre pièce. On effectue ainsi une suite de lancers. Calculer la probabilité f_n d'obtenir «face» au $n$ème lancer et préciser $\lim_{n\to+\infty} f_n$.

Indications. Notons A_n l'événement : « on lance la pièce A lors du $n$ème lancer», $B_n = \overline{A_n}$ l'événement : « on lance la pièce B lors du $n$ème lancer», F_n l'événement : « on obtient face lors du $n$ème lancer», $a_n = P(A_n)$ et $f_n = P(F_n)$.
En remarquant que $A_n = (A_n \cap A_{n-1}) \cup (A_n \cap B_{n-1})$, vérifier que $\forall n \geq 2$, $a_n = -\frac{1}{6}a_{n-1} + \frac{2}{3}$ et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \frac{4}{7} + \frac{(-1)^n}{14\cdot 6^{n-1}}.$$

En remarquant que $F_n = (F_n \cap A_n) \cup (F_n \cap B_n)$, vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}a_n$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n = \frac{3}{7} + \frac{(-1)^n}{14\cdot 6^n}$.
Donc $\lim_{n\to+\infty} f_n = \dfrac{3}{7}$.

Exercice 11. `[Exercice n° 26-TD 11]` *Premier lemme de Borel-Cantelli.*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que la série $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ converge.

Soit B l'événement : $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$.

1. Vérifier que B est l'événement : « une infinité d'événements A_n sont réalisés ». *Indication : considérer $\bar{B}$.*

2. Soit $B_n = \bigcup_{k\geq n} A_k$. Prouver que $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.

3. En déduire que $P(B) = 0$.

Solution : **1.** Soit $\omega \in \Omega$. Il s'agit en fait de prouver que : $\omega \in B$ si et seulement si il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_k$.

Commençons par caractériser $\bar{B}$. On a : $\bar{B} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcap_{k\geq n} \bar{A}_k$. Autrement dit :

$$\begin{aligned}\omega \in \bar{B} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \omega \in \bigcap_{k\geq n} \bar{A}_k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ \omega \in \bar{A}_k \\ &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall k \geq n,\ \omega \notin A_k \ (*)\end{aligned}$$

Par conséquent :
i) si $\omega \in \bar{B}$, d'après $(*)$ ω ne peut appartenir qu'à un nombre fini de parties A_k de $\mathcal{A}$, à savoir les parties $A_0, \cdots, A_{n-1}$.
ii) Réciproquement, si ω n'appartient qu'à un nombre fini de parties A_k de $\mathcal{A}$, en notant p le plus grand des indices k tels que $\omega \in A_k$, alors, en posant $n = p+1$, pour tout $k \geq n$, $\omega \notin A_k$ et d'après $(*)$, $\omega \in \bar{B}$. *Par exemple, si ω n'appartient qu'aux parties A_1, A_8, A_{50}, de manière évidente, $p = 50$, $n = 51$ et pour tout $k \geq 51$, $\omega \notin A_k$!!*
Ainsi, d'après *i)* et *ii)*, on a la propriété :

$$\omega \in \bar{B} \text{ si et seulement si il existe un nombre fini d'entiers } k \in \mathbb{N} \text{ tels que } \omega \in A_k,$$

qui est bien équivalente à la propriété : $\omega \in B$ si et seulement si il existe une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ tels que $\omega \in A_k$. cqfd.

2. On a : $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$ par le théorème de la limite par encadrement.

En effet, d'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq P(B_n) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k)$ et, d'autre part :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} P(A_k) = \lim_{n\to+\infty} (\sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k) - \sum_{k=0}^{n-1} P(A_k)) = 0$$

(limite du reste d'indice $n-1$ d'une *série convergente*) car $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n-1} P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} \subset B_n$ (car si $\omega \in B_{n+1}$, il existe $k \geq n+1$ tel que $\omega \in A_k$... donc il existe $k \geq n$ tel que $\omega \in A_k$).
Autrement dit, la suite d'évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante pour l'inclusion, et d'après **la propriété de « continuité décroissante »** et 2. on a :

$$P(B) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0.$$

Remarque : Comme $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1$, il est donc quasi-certain que seul un nombre fini d'événements A_k se sont réalisés.

Exercice 12. `[Exercice n° 27-TD 11]` *Second lemme de Borel-Cantelli.*
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $\sum_{n\geq 0} P(A_n)$ diverge.

On considère à nouveau l'événement : $B = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{k\geq n} A_k$ (cf. exercice précédent).

1. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$.

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{p\to+\infty} P(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}) = 0$.

3. Déduire de 2. que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = 1$ et prouver finalement que $P(B) = 1$.

Solution : **1.** Etudier les variations de la fonction : $x \mapsto e^{-x} - (1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et $p \in \mathbb{N}^*$. Comme les évènements $A_n, \cdots, A_{n+p}$ sont mutuellement indépendants par hypothèse, les évènements $\overline{A_n}, \cdots, \overline{A_{n+p}}$ sont aussi mutuellement indépendants et on a donc :

$$P(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{n+p} P(\overline{A_k}) = \prod_{k=n}^{n+p} (1 - P(A_k)).$$

Donc d'après 1. et propriété de la fonction exponentielle, on a :

$$0 \leq P(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}) \leq \prod_{k=n}^{n+p} e^{-P(A_k)} = e^{-S_{n,p}} \quad (*)$$

où $S_{n,p} = \sum_{k=n}^{n+p} P(A_k)$. La divergence de la série à termes positifs se traduit par :

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} P(A_k) = +\infty$$

car la suite $(\sum_{k=0}^{N} P(A_k))_{N\in\mathbb{N}}$ est croissante et divergente par hypothèse. D'où n étant fixé,

$$\lim_{p\to+\infty} S_{n,p} = +\infty$$

car $S_{n,p} = \sum_{k=0}^{n+p} P(A_k) - \sum_{k=0}^{n-1} P(A_k)$ (la première somme tend vers $+\infty$ car $n+p \to +\infty$ et la seconde est constante car n est fixé).
Alors $\lim_{p\to+\infty} e^{-S_{n,p}} = 0$ et on conclut avec le théorème de limite par encadrement grâce à $(*)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après le cours (adapter l'énoncé de la proposition 5. a. du chapitre espaces probabilisés à la suite $(A_k)_{k\geq n}$) et 2. :

$$P(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k) = \lim_{p\to+\infty} P(\bigcup_{k=n}^{n+p} A_k) = \lim_{p\to+\infty} (1 - P(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k})) = 1 - \lim_{p\to+\infty} P(\bigcap_{k=n}^{n+p} \overline{A_k}) = 1.$$

On conclut de la même façon que dans l'exercice précédent : posons $B_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k$. La suite d'évènements $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite décroissante pour l'inclusion, par **la propriété de « continuité décroissante »** on obtient :

$$P(B) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n) = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{P(B_n)}_{=1} = 1.$$