Exercice 1. `[Exercice n° 2-TD 12]`
Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4P(X = n + 2) = 5P(X = n + 1) - P(X = n)$. Déterminer la loi de X.

Solution. Posons $p_n = P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}$. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une récurrente linéaire d'ordre 2 : comme 1 et $\frac{1}{4}$ sont les deux racines de l'équation caractéristique associée : $4r^2 - 5r + 1 = 0$, il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n = a1^n + b(\frac{1}{4})^n = a + b(\frac{1}{4})^n$.
De plus, la série de terme général p_n doit être à termes positifs et convergente de somme égale à 1. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = 0$, car le terme général d'une série convergente tend vers 0, d'où $a = 0$. Enfin $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \Leftrightarrow b\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{4})^n = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{3}b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{3}{4}$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^n$.
Remarque : la v.a. $Y = X + 1$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suit la loi géométrique de paramètre $p = \frac{3}{4}$ car

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(Y = n) = P(X = n - 1) = \frac{3}{4}(\frac{1}{4})^{n-1} = p(1 - p)^{n-1}.$$

Exercice 2. `[Exercice n° 3-TD 12]` Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient n boules numérotées $1, \cdots, n$. On tire au hasard deux boules simultanément. On appelle X le plus grand des deux numéros obtenus. Déterminer la loi et l'espérance de X.

Solution. On "modélise cette expérience" en considérant l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est l'ensemble des parties à deux éléments (paires d'éléments) de $[\![1, n]\!]$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω (un événement est un sous-ensemble quelconque de Ω), et P est la probabilité uniforme (ou équiprobabilité) sur Ω. Comme $\mathrm{card}(\Omega) = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, la probabilité de chaque tirage (événement élémentaire) est donc $\frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{2}{n(n-1)}$. La v.a. X est à valeurs dans $[\![2, n]\!]$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, $(X = k) = \{\{1, k\}, \cdots, \{k - 1, k\}\}$, donc

$$P(X = k) = \frac{\mathrm{card}(X = k)}{\mathrm{card}(\Omega)} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}.$$

Remarque. L'événement $\displaystyle\bigcup_{k=2}^{n}(X = k)$ est l'événement certain Ω. On a bien :

$$\sum_{k=2}^{n} P(X = k) = \sum_{k=2}^{n} \frac{2(k-1)}{n(n-1)} = \frac{2}{n(n-1)}(1 + 2 + \cdots + (n - 1)) = \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2)} = 1.$$

Et X est une variable aléatoire (finie) d'espérance :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=2}^{n} kP(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=\cancel{2}1}^{n} k(k-1) = \frac{2}{n(n-1)}(\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k) \\ &= \frac{2}{n(n-1)}(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}) = \frac{2}{n(n-1)} \frac{n(n+1)(2(n-1))}{6} = \frac{2(n+1)}{3} \end{aligned}$$

Exercice 3. `[Exercice n° 5-TD 12]` Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient X et Y deux v.a. indépendantes de même loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$.
1. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \geq Y)$.
2. Déterminer la loi de $X - Y$.

Solution. **1.** *i)* Comme $(X = Y) = ((X = 1) \cap (Y = 1)) \cup \cdots \cup ((X = n) \cap (Y = n)) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n}((X = k) \cap (Y = k))$ (union d'événements deux à deux incompatibles), on a donc, par incompatibilité et indépendance des v.a. X et Y :

$$P(X = Y) \underset{inc.}{=} \sum_{k=1}^{n} P((X = k) \cap (Y = k)) \underset{ind.}{=} \sum_{k=1}^{n} P(X = k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}.$$

ii) Utilisons le système complet d'événements $(Y = 1), \cdots, (Y = n)$. On a :

$$(X \geq Y) = ((X \geq Y) \cap (Y = 1)) \cup \cdots \cup ((X \geq Y) \cap (Y = n)) = \bigcup_{k=1}^{n}((X \geq Y) \cap (Y = k)) = \bigcup_{k=1}^{n}((X \geq k) \cap (Y = k))$$

(union d'événements deux à deux incompatibles). Donc, par incompatibilité et indépendance des v.a. X et Y :

$$P(X \geq Y) \underset{inc.}{=} \sum_{k=1}^{n} P((X \geq k) \cap (Y = k)) \underset{ind.}{=} \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)P(Y = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n - (k-1)}{n} \cdot \frac{1}{n} \underset{[j=n-(k-1)]}{=} \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2}.$$

2. La v.a. $X - Y$ est à valeurs dans $\{-n + 1, \cdots, n - 1\}$. Soit $k \in [\![-n + 1, n - 1]\!]$. Calculons $P(X - Y = k)$ en distinguant deux cas :
i) <u>Soit $k \in [\![0, n - 1]\!]$</u>. Alors $(X - Y = k) = ((X = k + 1) \cap (Y = 1)) \cup ((X = n) \cap (Y = n - k))$ d'où

$$P(X - Y = k) \underset{inc.}{=} \sum_{i=1}^{n-k} P((X = k + i) \cap (Y = i)) \underset{ind.}{=} \sum_{i=1}^{n-k} P(X = k + i)P(Y = i) = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{1}{n^2} = \frac{n-k}{n^2}.$$

ii) Soit $k \in [\![-(n-1),-1]\!]$. Alors $(X-Y=k) = ((X=1)\cap(Y=1-k)) \cup ((X=n+k)\cap(Y=n))$ d'où

$$P(X-Y=k) \underset{inc.}{=} \sum_{i=1}^{n+k} P((X=i)\cap(Y=i-k)) \underset{ind.}{=} \sum_{i=1}^{n+k} P(X=i)P(Y=i-k) = \sum_{i=1}^{n+k} \frac{1}{n^2} = \frac{n+k}{n^2}.$$

Remarques. a) On a bien :

$$\sum_{k=-(n-1)}^{n-1} P(X-Y=k) = \sum_{k=-(n-1)}^{-1} \frac{n+k}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{n^2} = \frac{1}{n^2}(1+\cdots+(n-1)+1+\cdots+n) = \frac{1}{n^2}(\frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}) = 1.$$

b) En fait les v. a. $X-Y$ et $Y-X$ suivent la même loi et le résultat obtenu en *ii)* se déduit de *i)* : soit $k \in [\![-(n-1),-1]\!]$. Alors $-k \in [\![1,n-1]\!]$ et par incompatibilité et indépendance, on a (certains événements pouvant être impossibles) :

$$P(X-Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P(X=k+i)P(Y=i) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k+i)P(X=i) = P(Y-X=k) = P(X-Y=-k) \underset{i)\ avec -k}{=} \frac{n-(-k)}{n^2} = \frac{n+k}{n^2}.$$

Exercice 4. `[Exercice n° 6-TD 12]` Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes.
Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Y_k = X_k X_{k+1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

1. Déterminer la loi de Y_k.

2. Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

3. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p^2| \geq \varepsilon) = 0$.

Solution. **1.** Y_k est à valeurs dans $\{0,1\}$ et suit la loi de Bernoulli de paramètre p^2 car, X_k et X_{k+1} étant indépendantes :

$$P(Y_k=1) = P((X_k=1)\cap(X_{k+1}=1)) = P(X_k=1)P(X_{k+1}=1) = p^2.$$

On a donc : $E(Y_k) = p^2$ et $V(Y_k) = p^2(1-p^2)$.

2. a) *Calcul de* $E(S_n)$. Chaque v.a. Y_k est d'espérance p^2 et donc, par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} E(Y_k) = np^2$.

b) *Calcul de* $V(S_n)$. On a : $V(S_n) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} cov(Y_i,Y_j) = \sum_{k=1}^{n} V(Y_k) + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} cov(Y_i,Y_j)$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i<j$. Calculons $cov(Y_i,Y_j)$ en distinguant deux cas :

• Si $j \geq i+2$, Y_i et Y_j sont indépendantes car Y_i est une fonction de (X_i,X_{i+1}), Y_j est une fonction de (X_j,X_{j+1}) et les quatre v.a. X_i,X_{i+1},X_j,X_{j+1} sont mutuellement indépendantes. Donc $cov(Y_i,Y_j) = E(Y_iY_j) - E(Y_i)E(Y_j) = 0$.

• Si $j = i+1$, $Y_iY_j = Y_iY_{i+1} = X_iX_{i+1}^2X_{i+2} = X_iX_{i+1}X_{i+2}$ et comme les trois v.a. X_i,X_{i+1},X_{i+2} sont mutuellement indépendantes, $E(Y_iY_{i+1}) = E(X_i)E(X_{i+1})E(X_{i+2}) = p^3$ et $cov(Y_i,Y_{i+1}) = E(Y_iY_{i+1}) - E(Y_i)E(Y_{i+1}) = p^3 - p^4 = p^3(1-p)$.

Donc pour tout $i \in [\![1,n-1]\!]$, $\sum_{j=i+1}^{n} cov(Y_i,Y_j) = cov(Y_i,Y_{i+1}) = p^3(1-p)$ et finalement :

$$V(S_n) = np^2(1-p^2) + 2(n-1)p^3(1-p) = p^2(1-p)\big(n(1+p)+2(n-1)p\big) = p^2(1-p)\big((3p+1)n-2p\big).$$

3. On a : $V(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n^2}V(S_n)$ et $E(\frac{S_n}{n}) = \frac{1}{n}E(S_n) = p^2$. En appliquant l'inégalité de Tchebychev avec $\frac{S_n}{n}$, on obtient :

$$0 \leq P(|\frac{S_n}{n} - p^2| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n^2}\frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}$$

Or $V(S_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} p^2(1-p)(3p+1)n$ donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{V(S_n)}{\varepsilon^2} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} P(|\frac{S_n}{n} - p^2| \geq \varepsilon) = 0$ par le thèorème de limite par encadrement.
Remarque : on ne pouvait pas utiliser ici la loi faible des grands nombres car les v.a. Y_k ne sont pas toutes deux à deux indépendantes. Par exemple, Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes car $cov(Y_1,Y_2) = p^2(p-1) \neq 0$.

Exercice 5. `[Exercice n° 8-TD 12]` Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On définit la variable aléatoire Y de la façon suivante : si $X = k \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = k$ et si $X = 0$, alors Y prend une valeur quelconque dans $\{1,\cdots,n\}$. Calculer la loi de Y et son espérance. Vérifier que $E(Y) \geq E(X)$. Etait-ce prévisible ?

Solution : • *Loi de* Y. La v.a. Y est à valeurs dans $\{1,\cdots,n\}$.
Soit $k \in \{1,\cdots,n\}$. Utilisons le système complet d'évènements $(X=0),\cdots,(X=n)$. On a :

$$\boxed{(Y=k)} = \bigcup_{i=0}^{n}((X=i)\cap(Y=k)) = ((X=0)\cap(Y=k)) \cup ((Y=k)\cap(X=k)) = \boxed{((X=0)\cap(Y=k)) \underset{inc.}{\cup} (X=k)}.$$

En effet, pour tout $i \in [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$, l'événement $(X=i)\cap(Y=k)$ est impossible car si $X=i$, alors $Y=i\neq k$; et $(X=k) \subset (Y=k)$.
Par conséquent :

$$\boxed{P(Y=k)} = P((X=0)\cap(Y=k)) + P(X=k) = P(X=0)P_{(X=0)}(Y=k) + P(X=k) = \boxed{(1-p)^n\frac{1}{n} + \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}.$$

Remarque : on retrouve que :

$$\sum_{k=1}^{n} P(Y=k) = \sum_{k=1}^{n}(1-p)^n \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (1-p)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = (p+(1-p))^n = 1.$$

• *Espérance de Y*. La v.a. (finie) Y a pour espérance :

$$\boxed{E(Y)} = \sum_{k=1}^{n} kP(Y=k) = (1-p)^n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=\cancel{1}0}^{n} k\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(1-p)^n + E(X)}.$$

Donc $E(Y) \geq E(X)$ ce qui était prévisible par croissance de l'espérance car $Y \geq X$.

Exercice 6. `[Exercice n° 10-TD12]` Soit X une v.a. suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On considère la v.a. Y définie par : Si X est impair, alors $Y = 0$ et si X est pair, alors $Y = \frac{X}{2}$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de Y.

Solution : On rappelle que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$. Clairement Y est aussi à valeurs dans $\mathbb{N}$.

i) Loi de Y. Soit $m \in \mathbb{N}$. Calculons $P(Y=m)$. On distingue deux cas suivant la valeur de m :

a) Cas $m = 0$. Comme $(Y=0) = (X=0) \cup (X=1) \cup (X=3) \cup \cdots = (X=0) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty}(X=2n+1)$ (union d'événements incompatibles),

$$P(Y=0) = P(X=0) + \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=2n+1) = e^{-\lambda} + \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda}(1+\operatorname{sh}\lambda).$$

b) Cas $m \in \mathbb{N}^*$. On a : $(Y=m) = (X=2m)$ donc $P(Y=m) = P(X=2m) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^{2m}}{(2m)!}$.

Remarque. On retrouve bien que :

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{+\infty} P(Y=m) &= P(Y=0) + \sum_{m=1}^{+\infty} P(Y=m) = e^{-\lambda}(1+\operatorname{sh}\lambda) + e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}\\ &= e^{-\lambda}(1+\operatorname{sh}\lambda) + e^{-\lambda}(\operatorname{ch}\lambda - 1) = e^{-\lambda}(\operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda) = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda} = 1.\end{aligned}$$

ii) Espérance de Y. Le critère de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série (à termes strictement positifs) $\sum_{m\geq 1} mP(Y=m)$.

Et on a :

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{m=0}^{+\infty} mP(Y=m) = \sum_{m=1}^{+\infty} mP(Y=m) = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!}\\ &= \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} 2m\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m}}{(2m-1)!} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{2m-1}}{(2m-1)!} \underset{[k=m-1]}{=} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\operatorname{sh}\lambda\end{aligned}$$

iii) Variance de Y. Par le théorème du transfert, Y^2 est d'espérance finie car le critère de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série (à termes strictement positifs) $\sum_{m\geq 1} m^2P(Y=m)$, et on a :

$$\begin{aligned}E(Y^2) &= \sum_{m=0}^{+\infty} m^2P(Y=m) = \sum_{m=1}^{+\infty} m^2P(Y=m) = e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m^2\frac{\lambda^{2m}}{(2m)!} = \frac{1}{2}e^{-\lambda}\sum_{m=1}^{+\infty} m\frac{\lambda^{2m}}{(2m-1)!}\\ &\underset{[k=m-1]}{=} \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}((2k+1)+1)\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k)!} + \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}\\ &= \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}(\lambda\operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda).\end{aligned}$$

Finalement : $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = \frac{1}{4}\lambda e^{-\lambda}(\lambda\operatorname{ch}\lambda + \operatorname{sh}\lambda) - \frac{1}{4}\lambda^2 e^{-2\lambda}\operatorname{sh}^2\lambda$.

Remarque. En explicitant $\operatorname{ch}\lambda$ et $\operatorname{sh}\lambda$, on obtient : $V(Y) = \frac{\lambda^2}{16}(1 + 4e^{-2\lambda} - e^{-4\lambda}) + \frac{\lambda}{8}(1 - e^{-2\lambda})$.

Exercice 7. `[Exercice n° 12-TD12]` Soit $n \geq 3$. Une urne contient 2 boules blanches et $(n-2)$ boules rouges. On effectue des tirages sans remise dans cette urne. On appelle X le rang du tirage de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant à ce moment dans l'urne.

1. Déterminer la loi de X et $E(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Solution : Notons B_k l'événement : « on obtient une boule blanche lors du k-ème tirage » et R_k l'événement : « on obtient une boule rouge lors du k-ème tirage ».

1. $X(\Omega) = [\![1, n-1]\!]$. On a :

• $(X=1) = B_1$ donc $P(X=1) = \dfrac{2}{n}$; $(X=2) = R_1 \cap B_2$ donc $P(X=2) = P(R_1)P_{R_1}(B_2) = \dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{2}{n-1} = \dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$;

• $(X=3) = R_1 \cap R_2 \cap B_3$ donc $P(X=2) = P(R_1)P_{R_1}(R_2)P_{R_1\cap R_2}(R_3) = \dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdot\dfrac{2}{n-2} = \dfrac{2(n-3)}{n(n-1)}$.

Plus généralement, soit $k \in [\![2, n-1]\!]$. On a : $(X = k) = R_1 \cap \cdots \cap R_{k-1} \cap B_k$. En utilisant la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(X = k) = \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n-1} \cdots \frac{n-k}{n-(k-2)} \cdot \frac{2}{n-(k-1)} = 2\frac{n-k}{n(n-1)},$$

(égalité vérifiée aussi pour $k = 1$). D'où :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X = k) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) = \frac{2}{n(n-1)}(n\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} k^2) = \frac{2}{n(n-1)}(n\frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}) = \frac{n+1}{3}.$$

2. On vérifie que : $Y = (n-2) - (X-1) = n-1-X$ et, par linéarité de l'espérance, $E(Y) = E(n-1-X) = n-1-E(X) = \dfrac{2n-4}{3}$.

Exercice 8. `[Exercice n° 13-TD 12]` Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire les boules de l'urne, une à une avec remise. On s'arrête lorsque pour la première fois le numéro tiré est supérieur ou égal à l'un des numéros tirés précédemment. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Préciser $X_n(\Omega)$. Justifier que $\forall j \in \mathbb{N}$, $P(X_n > j) = \dfrac{\binom{n}{j}}{n^j}$.

2. Déterminer la loi de X_n.

3. Calculer l'espérance de X_n et préciser $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Solution : **1.** • $X_n(\Omega) = \{2, \cdots, n+1\}$. En effet, "au mieux" la deuxième boule tirée a un numéro supérieur ou égal au numéro de la première boule tirée ; "au pire" il faut attendre le $(n+1)$-ème tirage après avoir tiré successivement les boules numérotées n, $n-1, \cdots, 1$ lors des n premiers tirages, la boule tirée lors du $(n+1)$-ème tirage ayant un numéro au moins égal à 1 (numéro d'une boule déjà tirée).

• Calcul de $P(X_n > j)$. *a)* L'égalité est évidente si $n = 0$ et $n = 1$.

b) Soit $j \in \{2, \cdots, n\}$. Si l'on effectue j tirages, le résultat de ces j tirages est une des n^j j-listes de $\{1, \cdots, n\}$. Alors $P(X_n > j)$ est la probabilité d'obtenir lors des j premiers tirages une suite *strictement décroissante* $(p_1, \cdots, p_j)$ de $\{1, \cdots, n\}$: $p_1 > p_2 > \cdots > p_j$ où pour tout $k \in [\![1, j]\!]$, p_k est le numéro de la k-ième boule tirée. Comme l'application associant à chaque suite strictement décroissante $(p_1, \cdots, p_j)$ de $\{1, \cdots, n\}$ le sous-ensemble $\{p_1, \cdots, p_j\}$ de $\{1, \cdots, n\}$ est *bijective* (en effet il y a une seule façon d'ordonner les éléments d'une partie de $\{1, \cdots, n\}$ en une suite strictement décroissante), on a donc $\text{card}(X_n > j) = \binom{n}{j}$ et, par équiprobabilité des résultats élémentaires,

$$P(X_n > j) = \frac{\text{card}(X_n > j)}{n^j} = \frac{\binom{n}{j}}{n^j}.$$

c) Si $j \geq n+1$, $P(X_n > j) = 0$ car l'évènement $(X_n > j)$ est impossible. Donc l'égalité demandée est vérifiée car $\binom{n}{j} = 0$.

Remarque : Le calcul de $P(X_n > j)$ a été implicitement effectué en considérant l'espace probabilisé des j-listes de $\{1, \cdots, n\}$ muni de la probabilité uniforme (équiprobabilité).

2. Soit $j \in \{2, \cdots, n+1\}$. On a $(X_n > j-1) \underset{inc.}{=} (X_n = j) \cup (X_n > j)$, donc $P(X_n = j) = P(X_n > j-1) - P(X_n > j)$ et par 1. :

$$P(X_n = j) = \frac{\binom{n}{j-1}}{n^{j-1}} - \frac{\binom{n}{j}}{n^j}.$$

3. On a : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{j=2}^{n+1} jP(X_n = j) = \sum_{j=2}^{n+1} j(u_{j-1} - u_j)$ où $u_j = \dfrac{\binom{n}{j}}{n^j}$. Ainsi :

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} (j+1)u_j - \sum_{j=2}^{n+1} ju_j = 2\underbrace{u_1}_{=1} + \sum_{j=2}^{n} u_j - \underbrace{u_{n+1}}_{=0} = 2 + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = (1 + \frac{1}{n})^n$$

par la formule du binôme de Newton. Et classiquement, $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{n\ln(1+\frac{1}{n})} = e$.

Exercice 9. `[Exercice n° 14-TD 12]` Soit $k \in \mathbb{N}^*$ (fixé).

1. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (\frac{j}{n})^k$.

2. k urnes contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n. On extrait au hasard une boule de chaque urne.
Soit X_n la v.a. égale au plus grand des k numéros obtenus.

2. a. Soit $j \in \{1, \cdots, n\}$. Calculer $P(X_n \leq j)$.

2. b. Déterminer la loi de X_n.

2. c. Déterminer un équivalent de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Solution : **1.** $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} (\frac{j}{n})^k$ est une somme de Riemann associée à la fonction continue $f : x \mapsto x^k$ et la subdivision (régulière) $\{\frac{k}{n} / k \in [\![0, n]\!]\}$ du segment $[0, 1]$. D'où $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{k+1}}$.

2. a. Notons Y_i la v.a. égale au numéro de la boule extraite de l'urne n° i ($i \in [\![1, k]\!]$). Les v.a. $Y_1, \cdots, Y_n$ sont implicitement mutuellement indépendantes et chacune de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On a $(X_n \leq j) = (\max(Y_1, \cdots, Y_k) \leq j) = (Y_1 \leq j) \cap \cdots \cap (Y_k \leq j)$ car le maximum des numéros des boules tirées est inférieur ou égal à j si et seulement si chacun des k numéros tirés est inférieur ou égal à j. Donc par indépendance mutuelle :

$$\boxed{P(X_n \leq j)} = P(Y_1 \leq j) \cdots P(Y_k \leq j) = \boxed{(\frac{j}{n})^k}$$

(car $P(Y_1 \leq j) = P(Y_1 = 1) + \cdots + P(Y_1 = j) = j \cdot \dfrac{1}{n}$).

2. b. On a : $P(X_n = 1) = P(X_n \leq 1) = (\dfrac{1}{n})^k$ et si $j \in \{2, \cdots, n\}$, comme $(X_n \leq j) \underset{inc.}{=} (X_n = j) \cup (X_n \leq j-1)$,

$$P(X_n = j) = P(X_n \leq j) - P(X_n \leq j-1)$$

et par 1. $\boxed{P(X_n = j) = (\dfrac{j}{n})^k - (\dfrac{j-1}{n})^k}$ (égalité vérifiée aussi pour $j = 1$).

2. c. On a : $E(X_n) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} jP(X_n = j) = \sum_{j=1}^{n} j(u_j - u_{j-1})$ où $u_j = (\dfrac{j}{n})^k$. Ainsi :

$$E(X_n) = \sum_{j=1}^{n} ju_j - \sum_{j=1}^{n} ju_{j-1} = \sum_{j=1}^{n} ju_j - \sum_{j=\not{0}1}^{n-1} (j+1)u_j = nu_n - \sum_{j=1}^{n-1} u_j = n(1 - \frac{1}{n}\sum_{j=\not{1}0}^{n-1} (\frac{j}{n})^k).$$

Et d'après 1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n}\sum_{j=\not{1}0}^{n-1} (\frac{j}{n})^k = 1 - \frac{1}{k+1} = \frac{k}{k+1}$. En d'autres termes : $\boxed{E(X_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{k}{k+1} n}$.

Exercice 10. `[Exercice n° 15-TD 12]` Soit X une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2. On note $V(X)$ sa variance.

1. Prouver que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $V(X) \leq E[(X-m)^2]$.

2. On suppose qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq X \leq b$. En considérant $Y = X - \dfrac{a+b}{2}$, montrer que $V(X) \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

Solution. **1.** Par linéarité de l'espérance, $E[(X-m)^2] = E[X^2 - 2mX + m^2] = E(X^2) - 2mE(X) + m^2$ donc

$$E[(X-m)^2] - V(X) = E[(X-m)^2] - (E(X^2) - E(X)^2) = m^2 - 2mE(X) + E(X)^2 = (m - E(X))^2 \in \mathbb{R}^+$$

d'où $E[(X-m)^2] \geq V(X)$.

2. Par hypothèse, $|Y| \leq \dfrac{b-a}{2}$, donc $Y^2 \leq \dfrac{(b-a)^2}{4}$. En utilisant 1. avec $m = \frac{a+b}{2}$ et la croissance de l'espérance, on obtient :

$$V(X) \leq E(Y^2) \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. Soit $\alpha > 0$.

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = (\alpha(X-\mu) + \sigma)^2$.

2. Montrer que $P(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq \dfrac{1}{1+\alpha^2}$.

Solution : **1.** Utilisons la linéarité de l'espérance. Comme $Y = \alpha^2(X-\mu)^2 + 2\alpha\sigma(X-\mu) + \sigma^2$, on obtient que

$$E(Y) = \alpha^2 E((X-\mu)^2) + 2\alpha\sigma(E(X) - \mu) + E(\sigma^2) = \alpha^2 V(X) + \sigma^2 = \sigma^2(1+\alpha^2).$$

2. On remarque que $(X \geq \mu+\alpha\sigma) \subset (Y \geq \sigma^2(1+\alpha^2)^2)$. En utilisant l'inégalité de Markov avec la v.a. Y qui est bien *positive* et d'espérance finie, on obtient effectivement d'après **1.** que :

$$P(X \geq \mu + \alpha\sigma) \leq P(Y \geq \sigma^2(1+\alpha^2)^2) \leq \frac{E(Y)}{\sigma^2(1+\alpha^2)^2} (= \frac{1}{1+\alpha^2}).$$

Exercice 12. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

1. Calculer $P(X = Y)$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $P(X - Y = n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y = k)P(X = n+k)$.

2. b. Déterminer la loi de $T = |X - Y|$.

Solution : **1.** On a : $(X = Y) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} ((X = n) \cap (Y = n))$. La suite d'événements $((X = n) \cap (Y = n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite d'événements *deux à deux incompatibles*, on a donc :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((X = n) \cap (Y = n)).$$

Et comme les v.a. X et Y sont *indépendantes* (et de même loi géométrique de paramètre p) :

$$P(X = Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)P(Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = n)^2 = p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} ((1-p)^2)^{n-1} = p^2 \sum_{n=0}^{+\infty} ((1-p)^2)^n = \frac{p^2}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{2-p}.$$

2. a. On a : $(X - Y = n) = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} ((Y = k) \cap (X = n+k))$. La suite d'événements $((Y = n) \cap (X = n+k))_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant une suite d'événements *deux à deux incompatibles*, on a donc :

$$P(X - Y = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P((Y = k) \cap (X = n+k)).$$

Et comme les v.a. X et Y sont *indépendantes* : $P(X-Y=n)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)P(X=n+k)$.

2. b. La v.a. T est *à valeurs dans* $\mathbb{N}$. Remarquons tout d'abord que $P(T=0)=P(X=Y)=\dfrac{p}{2-p}$ (cf. **1.**)
Considérons maintenant $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $(T=n)=(X-Y=n)\cup(Y-X=n)$. Les deux événements $(X-Y=n)$ et $(Y-X=n)$ étant *incompatibles* et X et Y suivant la *même loi* géométrique de paramètre p, on obtient avec **2. a.** que :

$$\begin{aligned} P(T=n) &= P(X-Y=n)+P(Y-X=n)=\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)P(X=n+k)+\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)P(Y=n+k) \\ &= 2\sum_{k=1}^{+\infty} P(Y=k)P(X=n+k)=2p^2\sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}(1-p)^{n+k-1}=2p^2(1-p)^n\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)^2)^{k-1} \\ &= 2p^2(1-p)^n\sum_{k=0}^{+\infty}((1-p)^2)^k=\frac{2p}{2-p}(1-p)^n. \end{aligned}$$

3. Deux questions supplémentaires pour s'entraîner.
3. a. Calculer $P(X>Y)$. *Réponse :* $\frac{1-p}{2-p}$.

3. b. Soit $m\in\mathbb{N}^*$ fixé. Calculer $P(X\geq mY)$. *Réponse :* $\frac{p(1-p)^{m-1}}{1-(1-p)^{m+1}}$.

Exercice 13. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes telle que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X_k=-1)=1-p \text{ et } P(X_k=1)=p, \text{ avec } p\in]0,1[.$$

On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $Y_n=\prod_{k=1}^{n} X_k$. Déterminer $P(Y_n=1)$ en calculant de deux façons l'espérance de Y_n et préciser $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n=1)$.

Solution : Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $E(X_k)=(-1)\cdot P(X_k=-1)+1\cdot P(X_k=1)=-(1-p)+p=2p-1$.
Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme la v.a. Y_n est à valeurs dans $\{-1,1\}$, on a : $P(Y_n=-1)+P(Y_n=1)=1$.
Calculons maintenant $E(Y_n)$ de deux façons. D'une part, en utilisant la définition de l'espérance d'une v.a. finie :

$$E(Y_n)=(-1)\cdot P(Y_n=-1)+1\cdot P(Y_n=1)=-(1-P(Y_n=1))+P(Y_n=1)=2P(Y_n=1)-1$$

et d'autre part, comme la suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes (de même loi), on a d'après le cours :

$$E(Y_n)=\prod_{k=1}^{n} E(X_k)=\prod_{k=1}^{n}(2p-1)=(2p-1)^n.$$

D'où $2P(Y_n=1)-1=(2p-1)^n$ et $P(Y_n=1)=\dfrac{1+(2p-1)^n}{2}$. Comme $2p-1\in]-1,1[$, $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n=1)=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 14. Soient $p\in]0,1[$ et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est la loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la loi de Y.

Solution : Soit $n\in\mathbb{N}$. La loi conditionnelle de Y sachant $(X=n)$ est par hypothèse la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\forall k\in[\![0,n]\!],\ P(Y=k|X=n)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme $(Y=k)=\bigcup_{n=k}^{+\infty}((Y=k)\cap(X=n))$ (union d'événements deux à deux incompatibles), on a donc :

$$\begin{aligned} P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} P((Y=k)\cap(X=n)) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} P(X=n)P(Y=k|X=n)=\sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda}p^k\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\lambda^n}{k!(n-k)!}(1-p)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!} \end{aligned}$$

Donc la loi de Y est la loi de Poisson de paramètre λp : $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda p)$.

Exercice 15. `[Exercice n° 21-TD 12]` Soient $n\in\mathbb{N}^*$, $p\in]0,1[$ et $k\in\mathbb{N}$. Soit X_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.
1. Montrer que $\lim_{n\to\infty} P(X_n\leq k)=0$.

2. Vérifier que si $n>\frac{k}{p}$, $(X_n\leq k)\subset(|X_n-np|\geq np-k)$ puis retrouver le résultat de la question précédente.

Solution. **1.** Pour tout $n\geq k$, $P(X_n\leq k)=\sum_{j=0}^{k} P(X_n=j)=\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}p^j(1-p)^{n-j}=\sum_{j=0}^{k}p^j(1-p)^{-j}\binom{n}{j}(1-p)^n$.

Or pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $\binom{n}{j} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-(j-1))}{j!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^j}{j!}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^j(1-p)^n = 0$ par croissances comparées car $1-p \in]0,1[$.
Donc pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = j) = 0$ et $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq k) = 0$ (somme de $(k+1)$ suites tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$).

2. On rappelle que $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$. Soit $n > \frac{k}{p}$. Alors $np - k > 0$ et

$$(|X_n - np| \geq np - k) = ((X_n - np) \leq -(np-k)) \cup ((X_n - np) \geq (np-k)) = (X_n \leq k) \cup X_n \geq 2np - k).$$

Donc $(X_n \leq k) \subset (|X_n - np| \geq np - k) = (|X_n - E(X_n)| \geq np - k)$ et en utilisant l'inégalité de Tchebychev avec X_n :

$$0 \leq P(X_n \leq k) \leq P(|X_n - np| \geq np - k) \leq \frac{V(S_n)}{(np-k)^2} = \frac{np(1-p)}{(np-k)^2}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} P(X_n \leq k) = 0$ par le théorème des gendarmes car $\dfrac{np(1-p)}{(np-k)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1-p}{p} \cdot \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.

Exercice 16. `[Exercice n° 25-TD 12]` Soient X et Y deux v.a. définies sur un même espace probabilisé, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=j)\cap(Y=k)) = C(j+k)2^{-j-k}.$$

1. Déterminer la valeur de C.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $P(X = Y)$.

Solution. **1.** On doit avoir $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\sum\limits_{k=0}^{+\infty} P((X=j)\cap(Y=k)) = 1$, c'est-à-dire

$$C[\sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{+\infty} j2^{-j}2^{-k}) + \sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-j}k2^{-k})] = C[\sum_{j=0}^{+\infty} j2^{-j}(\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k}) + \sum_{j=0}^{+\infty}2^{-j}(\sum_{k=0}^{+\infty}k2^{-k})] = 1\ (*)$$

Or $\forall x \in]-1,1[$, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$ et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^n = x\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = x\cdot(\dfrac{1}{1-x})' = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ $(**)$ (par dérivation terme à terme de la somme de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} x^n$ sur son intervalle ouvert de convergence $]-1,1[$), donc pour $x = \frac{1}{2}$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{-n} = 2\ (***)$$

D'où $(*) \Leftrightarrow 8C = 1 \Leftrightarrow C = \frac{1}{8}$.
2. Soit $j \in \mathbb{N}$. En utilisant $(***)$, on obtient :

$$P(X=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{1}{8}(j2^{-j}\sum_{k=0}^{+\infty}2^{-k} + 2^{-j}\sum_{k=0}^{+\infty}k2^{-k}) = \frac{j+1}{2^{j+2}}.$$

De même pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P((X=j)\cap(Y=k)) = \sum\limits_{j=0}^{+\infty} P((X=k)\cap(Y=j)) = P(X=k) = \dfrac{k+1}{2^{k+2}}$.
Les v.a. X et Y ont donc la même loi de probabilité mais elles ne sont pas indépendantes car

$$P((X=0)\cap(Y=0)) = 0 \neq P(X=0)P(Y=0)(=\frac{1}{16}).$$

3. On a : $(X=Y) = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty}(X=n, Y=n)$ (union d'événements deux à deux incompatibles) d'où

$$P(X=Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n, Y=n) = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{+\infty} 2n2^{-2n} = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} n(\frac{1}{4})^n = \frac{1}{4}\frac{\frac{1}{4}}{(1-\frac{1}{4})^2} = \frac{1}{9}.$$

d'après $(**)$ avec $x = \frac{1}{4}$.

Exercice 17. Soient X et Y deux v.a. définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=j)\cap(Y=k)) = \frac{a}{j!k!}.$$

1. Déterminer la valeur de a.
2. Déterminer les lois marginales du couple (X,Y). Les v.a. X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Exprimer $P(X=Y)$ sous la forme d'une somme de série convergente (que l'on ne cherchera pas à calculer).

Solution. **1.** Comme $\Omega = \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}}\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}}((X=j)\cap(Y=k))$ (union dénombrable d'événements deux à deux incompatibles), on a :

$$P(\Omega) = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} P((X=j)\cap(Y=k)) = 1,$$

c'est-à-dire :

$$a\sum_{j=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{j!k!})=a\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!})=1$$

ou encore $ae^2=1$. D'où $a=e^{-2}$.

2. Les v.a. X et Y suivent la même loi de probabilité de Poisson de paramètre 1 et sont indépendantes. En effet,

• pour tout $j\in\mathbb{N}$, $P(X=j)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P((X=j)\cap(Y=k))=\frac{a}{j!}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\frac{ae}{j!}=e^{-1}\frac{1}{j!}\ (=e^{-1}\frac{1^j}{j!})$,

• pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k)=\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}P((X=j)\cap(Y=k))=\frac{a}{k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{j!}=\frac{ae}{k!}=e^{-1}\frac{1}{k!}$,

• pour tout $(j,k)\in\mathbb{N}^2$, $P((X=j)\cap(Y=k))=\dfrac{e^{-2}}{j!k!}=e^{-1}\dfrac{1}{j!}\cdot e^{-1}\dfrac{1}{k!}=P(X=j)P(Y=k)$.

3. On a : $(X=Y)=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty}((X=n)\cup(Y=n))$ (union d'événements deux à deux incompatibles) d'où :

$$P(X=Y)=\sum_{n=0}^{+\infty}P((X=n)\cap(Y=n))=e^{-2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n!)^2}.$$

Exercice 18. `[Exercice n° 27-TD 12 ]` Soient X et Y deux v.a. indépendantes telles que $X\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p)$ et $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(m,p)$.

1. Déterminer la fonction génératrice de $X+Y$. En déduire la loi de $X+Y$.

2. En redéterminant directement la loi de $X+Y$, déduire de 1. que $\displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}$ (formule de Vandermonde).

3. Soit $k\in[\![0,n+m]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X+Y=k$.

Remarque. Cette loi est appelée loi hypergéométrique $\mathcal{H}(k,n,m)$, de paramètres k, n et m.

4. Une urne contient n boules blanches et m boules noires. On tire k boules de l'urne.
Soit Z la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenus. Déterminer la loi de Z.

Solution : Posons $q=1-p$.

1. Par indépendance de X et Y, on a, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)=(1-p+pt)^n(1-p+pt)^m=(1-p+pt)^{m+n}$. On reconnait la fonction génératrice d'une v.a. suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(m+n,p)$. Et comme deux v.a ayant la même fonction génératrice suivent la même loi de probabilité, la loi de $X+Y$ est donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n+m,p)$.

2. Déterminons directement de la loi de $X+Y$. On a : $(X+Y)(\Omega)=[\![0,n+m]\!]$. Pour tout $k\in[\![0,n+m]\!]$,

$$(X+Y=k)\underset{inc}{=}\bigcup_{i=0}^{k}((X=i)\cap(Y=k-i))$$

(certains évènements pouvant être impossibles) et, par incompatibilité et indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned}P(X+Y=k)&=\sum_{i=0}^{k}P((X=i)\cap(Y=k-i))=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P(Y=k-i)\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^iq^{n-i}\binom{m}{k-i}p^{k-i}q^{m-(k-i)}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}\cdot p^kq^{n+m-k}\end{aligned}$$

Or d'après 1. $P(X+Y=k)=\binom{m+n}{k}p^kq^{n+m-k}$ d'où l'égalité (de Vandermonde) cherchée.

3. Soit $k\in[\![0,n+m]\!]$. Pour tout $j\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}P(X=j/X+Y=k)&=\frac{P((X=j)\cap(X+Y=k))}{P(X+Y=k)}=\frac{P((X=j)\cap(Y=k-j))}{P(X+Y=k)}\\&=\frac{\binom{n}{j}p^jq^{n-j}\cdot\binom{m}{k-j}p^{k-j}q^{n-(k-j)}}{\binom{m+n}{k}p^kq^{n+m-k}}=\frac{\binom{n}{j}\binom{m}{k-j}}{\binom{m+n}{k}}.\end{aligned}$$

Remarquons que cette probabilité conditionnelle est nulle si $j>k$.

4. La v. a. Z est à valeurs dans $[\![0,\min(n,k)]\!]$. Il y a $\binom{n+m}{k}$ façons de choisir k boules simultanément parmi les $n+m$ boules de l'urne.
Soit $j\in[\![0,\min(n,k)]\!]$. Pour constituer un sous-ensemble de k boules de l'urne contenant j boules blanches et $k-j$ boules noires, il faut choisir j boules blanches parmi les n boules blanches de l'urne : il y a $\binom{n}{j}$ façons de faire ce choix, et il faut choisir les $k-j$ boules noires parmi les m boules noires de l'urne : il y a $\binom{m}{k-j}$ façons de faire ce choix. Par principe multiplicatif, il y a finalement $\binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j}$ façons de choisir un sous-ensemble de k boules de l'urne contenant j boules blanches et $k-j$ noires (nombre de "cas favorables").
Comme il y a implicitement équiprobabilité du choix de ces k boules parmi les $n+m$ boules de l'urne, on a donc :

$$P(Z=j)=\frac{\binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j}}{\binom{n+m}{k}}.$$

En conclusion, la loi de Z est la loi $\mathcal{H}(k,n,m)$.

Remarque. Les événements $(Z=0),(Z=1),\dots,(Z=\min(n,k))$ formant un système complet d'événements, on a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{\min(n,k)} P(Z=j)=1$ et on retrouve l'égalité de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{j=0}^{\min(n,k)} \binom{n}{j}\cdot\binom{m}{k-j}=\binom{n+m}{k}$.

Exercice 19. Soit X une variable aléatoire réelle discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$.
On note e^X la variable aléatoire $\omega\mapsto e^{X(\omega)}$.

1. Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Soit $f:\mathbb{R}\to]0,+\infty[$ une fonction croissante telle que la v.a $f(X)$ est d'espérance finie.
Justifier que :

$$P(X\geq\lambda)\leq\frac{E[f(X)]}{f(\lambda)}.$$

2. *Un exemple.* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, de loi géométrique de paramètre $p\in]0,1[$.
Déterminer une CNS sur p pour que e^X soit d'espérance finie et calculer dans ce cas $E[e^X]$.

3. On suppose que e^X est d'espérance finie μ. Soient $X_1,\cdots,X_n$ des v.a. mutuellement indépendantes et de même loi que X. Soit $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

3. a. Calculer $E[e^{S_n}]$ en fonction de n et μ.

3. b. Soit $a\in\mathbb{R}$. Justifier que $P(S_n\geq na)\leq(\mu e^{-a})^n$.

Solution. **1.** Comme f est croissante, $(X\geq\lambda)\subset(f(X)\geq f(\lambda))$ donc $P(X\geq\lambda)\leq P(f(X)\geq f(\lambda))$. Et comme la v.a. $f(X)$ est (strictement) *positive*, d'espérance finie et que $f(\lambda)$ est strictement positif, d'après l'inégalité de Markov, $P(f(X)\geq f(\lambda))\leq\dfrac{E[f(X)]}{f(\lambda)}$. D'où l'inégalité demandée.

2. Rappelons que $X(\omega)=\mathbb{N}^*$ et que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(X=n)=p(1-p)^{n-1}$. D'après le *théorème du transfert*, e^X est d'espérance finie si et seulement si la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}e^nP(X=n)$ converge absolument, c'est-à-dire si et seulement si la série (géométrique) $\displaystyle\sum_{n\geq1}pe(e(1-p))^{n-1}$ converge, donc si et seulement si $|e(1-p)|=e(1-p)<1$. La CNS cherchée est donc $p\in]1-\dfrac{1}{p},1[$ et, si cette condition est remplie, on a alors :

$$E(X)=\sum_{n=1}^{+\infty}e^np(1-p)^{n-1}=pe\sum_{n=0}^{+\infty}(e(1-p))^n=\frac{pe}{1-e(1-p)}.$$

3. a. Tout d'abord, par propriété de la fonction exponentielle, $e^{S_n}=e^{X_1}\cdots e^{X_n}$. Puis, $X_1,\cdots,X_n$ étant mutuellement indépendantes, les v. a. $e^{X_1},\cdots,e^{X_n}$ sont aussi mutuellement indépendantes et, par théorème, e^{S_n} est d'espérance finie égale au produit des espérances :

$$E(e^{S_n})=E(e^{X_1})\cdots E(e^{X_n})=\mu^n$$

car, par hypothèse, $E(e^{X_1})=\cdots=E(e^{X_n})=\mu$.

3. b. Même raisonnement qu'en 1. avec $f=\exp$ bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ici on a plus précisement

$$(S_n\geq na)=(e^{S_n}\geq e^{na})$$

et en utilisant l'inégalité de Markov avec la v. a. (strictement positive) e^{S_n} d'espérance finie μ^n (cf. 3. a.) on obtient :

$$P(S_n\geq na)=P(e^{S_n}\geq e^{na})\leq\frac{E(e^{S_n})}{e^{na}}=(\mu e^{-a})^n.$$

Exercice 20. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, chacune d'espérance finie, et telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}E(|X_n|)=0$.
Soit $\varepsilon>0$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|X_n|\geq\varepsilon)$.

Solution. On a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}P(|X_n|\geq\varepsilon)=0$ par encadrement. En effet, en utilisant l'inégalité de Markov avec la v.a. $|X_n|$, positive et d'espérance finie, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $0\leq P(|X_n|\geq\varepsilon)\leq\dfrac{E(|X_n|)}{\varepsilon}$.

Exercice 21. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, à valeurs dans $\{-1,1\}$, mutuellement indépendantes, toutes de même loi (dite de « Rademacher») avec, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $P(X_k=-1)=P(X_k=1)=\dfrac{1}{2}$.

On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

1. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance et la variance de S_n.

2. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On pose pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\varphi_n(t)=E(\cos(tS_n))$. Montrer que $\varphi_n(t)=(\cos(t))^n$.

3. Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $E(S_n^4)=3n^2-2n$.

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(\dfrac{S_n}{n}\geq\dfrac{1}{n^{\frac{1}{8}}})\leq\dfrac{3}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Solution : **1.** On a : $E(X_1)=(-1)\cdot P(X_1=-1)+1\cdot P(X_1=1)=0$; $E(X_1^2)=1$ car X_1^2 est une v.a. constante égale à 1 et

$$V(X_1)=E(X_1^2)-(E(X_1))^2=E(X_1^2)=1.$$

Comme les v.a. $X_1,\dots,X_n$ suivent la même loi, $E(X_1)=\cdots=E(X_n)=0$ et $V(X_1)=\cdots=V(X_n)=1$.
Par linéarité de l'espérance, $E(S_n)=E(X_1)+\cdots+E(X_n)=nE(X_1)=0$ et comme les v.a. $X_1,\dots,X_n$ sont *mutuellement indépendantes*,

$$V(S_n)=V(X_1)+\cdots+V(X_n)=nV(X_1)=n.$$

2. Récurrence sur n. *Initialisation.* L'égalité est vraie pour $n=1$ car, par le théorème du transfert et la parité de la fonction cosinus :

$$E(\cos(tS_1))=E(\cos(tX_1))=\frac{1}{2}\cos(-t)+\frac{1}{2}\cos(t)=\cos(t).$$

Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$, en développant le cosinus d'une somme :

$$\begin{aligned}E(\cos(tS_{n+1})) &= E(\cos(tS_n+tX_{n+1}))=E(\cos(tS_n)\cos(tX_{n+1})-\sin(tS_n)\sin(tX_{n+1}))\\ &= E(\cos(tS_n)\cos(tX_{n+1}))-E(\sin(tS_n)\sin(tX_{n+1}))\ \text{(linéarité de l'espérance).}\end{aligned}$$

Comme les v.a. tS_n (fonction de $X_1,\cdots,X_n$) et tX_{n+1} sont indépendantes, les v.a. $\cos(tS_n)$ et $\cos(tX_{n+1})$ sont indépendantes ainsi que les v.a. $\sin(tS_n)$ et $\sin(tX_{n+1})$, d'où :

$$E(\cos(tS_{n+1}))=E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1}))-E(\sin(tS_n))E(\sin(tX_{n+1})).$$

Or, par le théorème du transfert, sinus étant impaire : $E(\sin(tX_{n+1}))=\frac{1}{2}\sin(-t)+\frac{1}{2}\sin(t)=0$ donc :

$$E(\cos(tS_{n+1}))=E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_{n+1}))=E(\cos(tS_n))E(\cos(tX_1))=\cos^n t\cdot\cos t=\cos^{n+1}t.$$

3. Récurrence sur n. *Initialisation.* L'égalité est vraie pour $n=1$ car la v.a. $S_1^4=X_1^4=1$ et $E(S_1^4)=1$.
Hérédité. Supposons l'égalité vraie pour un certain $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$, on a, en utilisant la formule du binôme et la linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}E(S_{n+1}^4) &= E((S_n+X_{n+1})^4)=E(S_n^4)+4E(S_n^3X_{n+1})+6E(S_n^2X_{n+1}^2)+4E(S_nX_{n+1}^3)+E(X_{n+1}^4)\\ &= E(S_n^4)+4E(S_n^3X_{n+1})+6E(S_n^2)+4E(S_nX_{n+1}^3)+1.\end{aligned}$$

car $X_{n+1}^2=X_{n+1}^4=1$.
Par indépendance des v.a. S_n^3 et X_{n+1} et des v.a. S_n^3 et X_{n+1}, et sachant de plus que $E(X_{n+1})=E(X_{n+1}^3)=0$ car $X_{n+1}^3=X_{n+1}$, et (cf. 1.) $E(S_n^2)=V(S_n)+E(S_n)^2=V(S_n)=n$, on obtient finalement :

$$\begin{aligned}E(S_{n+1}^4) &= E(S_n^4)+4E(S_n^3)E(X_{n+1})+6E(S_n^2)+4E(S_n)E(X_{n+1}^3)+1\\ &= E(S_n^4)+6n+1=(3n^2-2n)+6n+1=3n^2+4n+1=3(n+1)^2-2(n+1)\ \text{cqfd}\end{aligned}$$

4. On utilise l'inégalité de Markov avec S_n^4 (v.a. *positive* d'espérance finie). Comme $(S_n\geq n^{\frac{7}{8}})\subset(S_n^4\geq n^{\frac{7}{2}})$:

$$P(\frac{S_n}{n}\geq\frac{1}{n^{\frac{1}{8}}})=P(S_n\geq n^{\frac{7}{8}})\leq P(S_n^4\geq n^{\frac{7}{2}})\leq\frac{E(S_n^4)}{n^{\frac{7}{2}}}\leq\frac{3n^2}{n^{\frac{7}{2}}}\ (=\frac{3}{n^{\frac{3}{2}}}).$$

Exercice 22. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, indépendantes, et telles que : $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$ et pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, $P(X=j)=P(Y=j)=\dfrac{1}{n}$. Déterminer la loi de $S=X+Y$.

Solution : La variable aléatoire S prend ses valeurs dans $[\![2,2n]\!]$.
Considérons l'évènement $(S=i)$ avec $i\in[\![2,2n]\!]$ en distinguant deux cas suivant la valeur de i :
Cas n° 1 : $i\in[\![2,n+1]\!]$. Alors

$$(S=i)=(X=1,Y=i-1)\cup(X=2,Y=i-2)\cup\cdots\cup(X=i-1,Y=1)=\bigcup_{k=1}^{i-1}(X=k,Y=i-k)$$

puis, par incompatibilité des évènements $(X=1,Y=i-1),\cdots,(X=i-1,Y=1)$ et indépendance de X et Y :

$$P(S=i)=\sum_{k=1}^{i-1}P(X=k,Y=i-k)=\sum_{k=1}^{i-1}P(X=k)P(Y=i-k)=\sum_{k=1}^{i-1}\frac{1}{n^2}=\frac{i-1}{n^2}$$

car pour tout $k\in[\![1,i-1]\!]$, k et $i-k$ appartiennent à $[\![1,n]\!]$.
Cas n° 2 : $i\in[\![n+2,2n]\!]$. Posons : $i=n+1+p$ avec $p\in[\![1,n-1]\!]$. Alors

$$(S=i)=(X=p+1,Y=n)\cup\cdots\cup(X=n,Y=p+1)=\bigcup_{k=p+1}^{n}(X=k,Y=i-k)$$

Exemples : $(S=n+2)=(X=2,Y=n)\cup\cdots\cup(X=n,Y=2)$ *et* $(S=2n-1)=(X=n-1,Y=n)\cup(X=n,Y=n-1)$.
Et par le même raisonnement qu'en 1) :

$$P(S=i)=\sum_{k=p+1}^{n}P(X=k,Y=i-k)=\sum_{k=p+1}^{n}P(X=k)P(Y=i-k)=\sum_{k=p+1}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{n-p}{n^2}=\frac{2n+1-i}{n^2}$$

car pour tout $k\in[\![p+1,n]\!]$, k et $i-k=n+(p+1)-k$ appartiennent à $[\![1,n]\!]$.

Exercice 23. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. définies sur $(\Omega,\mathcal{A},P)$, deux à deux indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose : $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}X_k$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=p$. Soit $\varepsilon>0$.

1. Justifier l'existence d'un entier $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq N$, $|u_n - p| < \frac{\varepsilon}{2}$ et prouver que

$$\forall n \geq N, \left(\left|\frac{S_n}{n} - u_n\right| \geq \varepsilon\right) \subset \left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

2. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - u_n\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

Indications. **1.** L'existence de N découle immédiatement de la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = p$.
Raisonner par l'absurde en remarquant que $\left|\frac{S_n}{n} - u_n\right| \leq \left|\frac{S_n}{n} - p\right| + |p - u_n|$.

2. Justifier que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right) = 0$ et conclure avec le théorème des gendarmes.

Exercice 24. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et d'espérance finie.

1. Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

2. Montrer que $E(\frac{1}{X}) \geq \frac{1}{E(X)}$. *Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*

3. *Un exemple.* Soit X une v.a. suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Calculer $E(\frac{1}{X})$ et retrouver l'inégalité de 2.

Solution : **1.** La v.a. $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie d'après le théorème du transfert. En effet, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} P(X = n)$ converge (absolument) par comparaison car $\forall n \geq 1$, $0 \leq \frac{1}{n} P(X = n) \leq P(X = n)$ et la série $\sum_{n\geq 1} P(X = n)$ converge, de somme égale à 1.

Remarque : Plus généralement, toute v.a. bornée est d'espérance finie.

2. Commençons par rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec deux variables aléatoires dont le carré est d'espérance finie :
`[Inégalité de Cauchy-Schwarz]` Soient U et V deux v.a. telles que U^2 et V^2 soient d'espérance finie. Alors UV est d'espérance finie et :

$$|E(UV)| \leq \sqrt{E(U^2)}\sqrt{E(V^2)}.$$

L'inégalité demandée s'obtient alors en considérant $U = \sqrt{X}$ et $V = \frac{1}{\sqrt{X}}$ sachant que l'on a : $E(1) = 1$, $E(X) > 0$ et $E(\frac{1}{X}) > 0$.

3. Par le théorème du transfert et le DSE(0) de $-\ln(1 - x)$:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} P(X = n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} p(1 - p)^{n-1} = \frac{p}{1 - p} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 - p)^n}{n} = -\frac{p}{1 - p} \ln(p).$$

Il reste à justifier que l'on a bien $-\frac{p}{1-p} \ln(p) \geq p$ car $E(X) = \frac{1}{p}$, c'est-à-dire $\ln(p) \leq p - 1$. Cette dernière inégalité résulte de la décroissance sur $]0, 1]$ $x \mapsto x - 1 - \ln(x)$.

Exercice 25. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{1, \ldots, p\}$, et toutes de même loi uniforme sur $\{1, \ldots, p\}$. On pose $M_n = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

1. Justifier la convergence de la suite $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$. *Indication : étudier la monotonie de cette suite.*

2. Soit $k \in \{1, \ldots, p\}$. Calculer $P(M_n \leq k)$. En déduire la loi de M_n.

3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} E(M_n)$.

Solution : **1.** Tout d'abord $E(M_n)$ existe car M_n est une v.a. finie.
Comme $M_n \leq M_{n+1}$, on a : $E(M_n) \leq E(M_{n+1})$ par croissance de l'espérance. Autrement dit, la suite $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
De plus, chaque v.a. U_k étant majorée par p, on a également $M_n \leq p$ et, par croissance de l'espérance, $E(M_n) \leq p$ (l'espérance d'une v.a. constante étant égale à la constante). Autrement dit, la suite $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par p.
Par le théorème de la limite monotone, la suite $(E(M_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel $\ell \leq p$.

2. *i)* On a : $(M_n \leq k) = (U_1 \leq k) \cap \cdots \cap (U_n \leq k)$ et par indépendance mutuelle supposée des v.a. $U_1, \ldots, U_n$,

$$P(M_n \leq k) = P(U_1 \leq k) \ldots P(U_n \leq k) = P(U_1 \leq k)^n = \left(\frac{k}{p}\right)^n$$

car $U_1, \ldots, U_n$ sont toutes de même loi uniforme sur $\{1, \ldots, p\}$.

ii) Loi de M_n. On a : $P(M_n = 1) = P(M_n \leq 1) = (\frac{1}{p})^n$ et pour tout $k \in \{2, \ldots, p\}$,

$$P(M_n = k) = P(M_n \leq k) - P(M_n \leq k - 1) = \left(\frac{k}{p}\right)^n - \left(\frac{k - 1}{p}\right)^n$$

car l'évènement $(M_n \leq k)$ est l'union des deux évènements incompatibles $(M_n = k)$ et $(M_n \leq k - 1)$.

3. On a donc :

$$\begin{aligned}
E(M_n) &= \sum_{k=1}^{p} k\big((\frac{k}{p})^n - (\frac{k-1}{p})^n\big) = \sum_{k=1}^{p} k(\frac{k}{p})^n - \sum_{k=1}^{p} k(\frac{k-1}{p})^n = \sum_{k=1}^{p} k(\frac{k}{p})^n - \sum_{k=0}^{p-1}(k+1)(\frac{k}{p})^n \\
&= \sum_{k=0}^{p-1}(k-(k+1))(\frac{k}{p})^n + p \\
&= p - \sum_{k=0}^{p-1}(\frac{k}{p})^n = p - \sum_{k=1}^{p-1}(\frac{k}{p})^n
\end{aligned}$$

Remarque. On aurait pu éventuellement utiliser la proposition 5 du chapitre variables aléatoires suivante avec $X = M_n$:

Soit X une v.a. à valeurs dans $\{0, \cdots, n\}$. Alors $E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geq k)$.

Or pour chaque $k \in \{1, \ldots, p-1\}$ (fixé), $\lim_{n\to+\infty}(\frac{k}{p})^n = 0$ (suite géométrique de raison $\frac{k}{p} \in]0,1[$, d'où $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{p-1}(\frac{k}{p})^n = 0$ (somme de p suites de limite nulle) et finalement, $\lim_{n\to+\infty} E(M_n) = p$.

Exercice 26. Soit X une variable aléatoire positive telle que X^2 est d'espérance finie. Prouver avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$E(X)^2 \leq E(X^2)P(X > 0).$$

Solution. Rappelons que si 1_A est la fonction indicatrice d'un événement A, $E(1_A) = P(A)$. Comme X est à valeurs positives, on a : $X = X \cdot 1_{X>0}$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $E(X)^2 = (E(X \cdot 1_{X>0}))^2 \leq E(X^2)E(\underbrace{1^2_{X>0}}_{=1_{X>0}}) \leq E(X^2)P(X > 0)$.