Optique ondulatoire

OO2

Superposition de deux ondes lumineuses

Sommaire

I Comment calculer l'intensité lumineuse résultant de la superposition de deux ondes ? 2
- I.1 Calcul dans le cas général . . . 2
- I.2 Conditions d'obtention d'interférences . . . 3
- I.3 Synthèse des résultats . . . 4

II Analyse de la figure d'interférences 5
- II.1 Champ d'interférences . . . 5
- II.2 Franges d'interférences et ordre d'interférences . . . 6
- II.3 Contraste (= visibilité) de la figure d'interférences . . . 7
- II.4 Forme géométrique des franges d'interférences . . . 7

III Autre démonstration de la formule de Fresnel en supposant que les deux ondes sont cohérentes entre elles 8
- III.1 Préambule mathématique : utiliser la notation complexe pour calculer la moyenne d'un produit de deux champs synchrones . . . 8
- III.2 Démonstration de la formule de Fresnel avec la notation complexe . . . 10

Questions de cours

- En s'appuyant sur un calcul d'intensité lumineuse, justifier la nécessité d'ondes synchrones pour observer des interférences.
- Calculer le déphasage entre deux ondes en faisant intervenir la différence de chemins optiques.
- Après avoir présenté le modèle des trains d'onde, définir la notion de cohérence entre deux ondes quasi-monochromatiques. Citer un exemple d'ondes cohérentes et un exemple d'ondes incohérentes.
- Après avoir cité les conditions d'obtention d'interférences, établir, par la méthode de votre choix, la formule de Fresnel pour deux ondes cohérentes entre elles.
- En s'appuyant sur la formule de Fresnel, définir et expliquer l'intérêt de l'ordre d'interférences et du contraste d'une figure d'interférences.

.

★ *Prise de notes* : Trois temps caractéristiques pour les sources et détecteurs optiques, avec des odg bien distincts : $\tau_{\text{détect}} \gg \tau_c, T$: les détecteurs ne sont sensibles qu'à l'intensité lumineuse $I = \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle$.
1ère conséquence (celle là, je la dis pour les marquer : retenir qu'on est sensible qu'à une MOYENNE, car c'est le point clé !!!) : certes, $\vec{\Pi}$ oscille (ondes !!), mais comme les détecteurs ne sont sensibles qu'à sa moyenne, on ressent une intensité lumineuse indépendante du temps (lampe de la salle de classe par exemple). (C'est radicalement différent de l'acoustique : on met un micro, un oscillo, on voit l'onde.)
2nde conséquence : interférences. On a fait le modèle scalaire de l'OO pour simplifier le formalisme des ondes EM : va permettre de traiter des situations plus complexes comme la superposition de deux ondes, qui pourra mener à des interférences sous certaines conditions bien précises.

Ce chapitre a deux objectifs principaux :

1. Etablir la formule de Fresnel.
2. Identifier une situation de cohérence ou d'incohérence entre deux ondes et en déduire la formule de calcul de l'intensité à appliquer.

I Comment calculer l'intensité lumineuse résultant de la superposition de deux ondes ?

I.1 Calcul dans le cas général

On se place dans le cadre de l'approximation scalaire de l'optique ondulatoire. Considérons deux vibrations lumineuses harmoniques, appelées 1 et 2, et se superposant en un point M :

$$s_i(M,t) = A_{0i}\cos(\omega_i t - \varphi_i(M)) \qquad (i = 1,2)$$

★

En M, d'après le théorème de superposition :

$$s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)$$

Or, l'intensité lumineuse $I(M) = K\left\langle s^2(M,t)\right\rangle$. On a :

$$\begin{aligned}
\left\langle s^2(M,t)\right\rangle &= \frac{1}{2}A_{01}^2 + \frac{1}{2}A_{02}^2 + 2A_{01}A_{02}\left\langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M))\cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}A_{01}^2 + \frac{1}{2}A_{02}^2 + A_{01}A_{02}\Big(\underbrace{\left\langle \cos((\omega_1+\omega_2)t - (\varphi_1(M) - \varphi_2(M)))\right\rangle}_{=0} + \left\langle \cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2(M) \right. \\
&= \frac{1}{2}A_{01}^2 + \frac{1}{2}A_{02}^2 + A_{01}A_{02}\left\langle \cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M)))\right\rangle
\end{aligned}$$

On pose $I_1 = K\left\langle s_1^2(M,t)\right\rangle = KA_{01}^2\left\langle \cos^2(\omega_1 t - \varphi_1(M))\right\rangle = K \times \frac{1}{2}A_{01}^2$ et $I_2 = K \times \frac{1}{2}A_{02}^2$. On ré-écrit alors le résultat précédent, en utilisant $I = K\left\langle s^2(M,t)\right\rangle$:

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\left\langle \cos((\omega_2-\omega_1)t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M)))\right\rangle$$

★ Entourer le dernier terme : terme d'interférences, qui doit être non nul pour avoir des interférences

I.2 Conditions d'obtention d'interférences

a Condition 1 : ondes synchrones

Posons $\omega_0 = \omega_2 - \omega_1$.

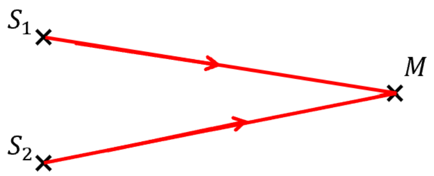
★ Si $\omega_0 \neq 0$, alors $\langle \cos(\omega_0 t - (\varphi_2(M) - \varphi_1(M)))\rangle = 0$: il n'y a pas d'interférences.
La première condition nécessaire pour obtenir des interférences est $\omega_1 = \omega_2$: on parle dans ce cas d'ondes synchrones.

Sous cette condition, la formule de l'intensité devient :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\langle \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M))\rangle$$

b Condition 2 : ondes cohérentes

Ré-écrivons le terme $\varphi_2(M) - \varphi_1(M)$. Pour cela, appelons S_1 et S_2 les points sources émettant les ondes 1 et 2.



★ On utilise le chemin optique :

$$\varphi_1(M) = \underbrace{\varphi_1(S_1)}_{=\varphi_{10}} + \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_1M) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(M) = \underbrace{\varphi_2(S_2)}_{=\varphi_{20}} + \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_2M)$$

Donc,

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \varphi_{20} - \varphi_{10} + \frac{2\pi}{\lambda_0}\left((S_2M) - (S_1M)\right)$$

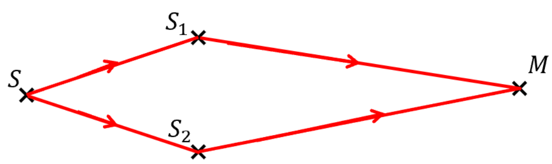
Néanmoins, expérimentalement, les sources S_1 et S_2 ne peuvent pas émettre une onde strictement monochromatique (il y a toujours une certaine largeur spectrale). Cela implique (à notre niveau) l'utilisation du modèle des trains d'onde pour décrire l'émission des deux ondes quasi-monochromatiques.

Conséquences du modèle des trains d'onde :

Rappel du modèle : Une source lumineuse émet une succession de portions de sinusoïdes (= les trains d'onde), chacune de ces portions étant émise pendant une durée finie valant en moyenne le temps de cohérence τ_c. Deux trains d'onde successifs sont émis avec une variation brutale et aléatoire de la phase à l'origine φ_{0i}.

★ Ainsi, à cause de l'émission sous la forme de trains d'onde, $\varphi_{0i}(t)$ fluctue avec le temps.
Si φ_{01} et φ_{02} fluctuent de manière indépendante entre eux, alors en moyenne sur un grand nombre de trains d'onde $\left\langle \varphi_{02} - \varphi_{01} + \frac{2\pi}{\lambda_0}\left((S_2M) - (S_1M)\right)\right\rangle = 0$.
Pour visualiser des interférences, il est nécessaire que $\varphi_{02} - \varphi_{01}$ ne varie pas aléatoirement dans le temps.

Pour réaliser ceci expérimentalement, on doit nécessairement utiliser un point source primaire S dont on divise le faisceau en deux avant de se faire superposer de nouveau les deux faisceaux.

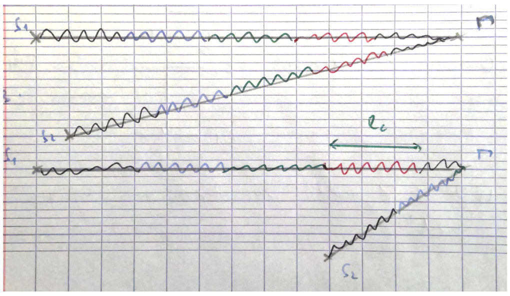


La formule du déphasage devient alors : $\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \varphi'_{20} - \varphi'_{10} + \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\left((SS_2M) - (SS_1M)\right)$ avec φ'_{01} et φ'_{02} désignant désormais les phases à l'origine au niveau du point source primaire S. On définit alors $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$, la différence des chemins optiques, aussi appelée la différence de marche.

Néanmoins, ceci n'est pas suffisant pour observer des interférences. Représentons les trains d'onde émis par la source primaire.

> (Faire le schéma ci-dessous en commençant à partir d'un point S. Leur dire qu'ils ont de la place et de prendre plein de couleurs.) Indiquer : ℓ_c : longueur de cohérence temporelle

★



> Si $\delta(M) \geqslant \ell_c$, alors φ'_{01} et φ'_{02} n'ont à nouveau aucun lien entre eux : la moyenne du déphasage est alors nulle. Pour observer des interférences, il faut nécessairement que $\delta(M) \leqslant \ell_c$.

Dans le cas où les deux ondes sont issues du même point source primaire S et que la différence de chemins optiques $\delta(M) \leqslant \ell_c$, alors les deux ondes sont dites cohérentes entre elles. Sous ces conditions, les deux phases à l'origine fluctuent aléatoirement, mais de la même manière : $\varphi'_{01} = \varphi'_{02}$. La formule de l'intensité devient :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

Remarque : En toute rigueur, la relation $\varphi'_{01} \simeq \varphi'_{02}$ n'est valable que si $\delta(M) \ll \ell_c$. Dans le cas contraire, on observerait bien des interférences, mais la formule de l'intensité serait légèrement modifiée.

I.3 Synthèse des résultats

Conditions d'obtention d'interférences lumineuses

Pour observer des interférences lumineuses, il faut que :

- les deux ondes soient synchrones : les pulsations centrales des spectres d'émission des deux ondes sont identiques : $\omega_1 = \omega_2$ (critère lié aux pulsations centrales des spectres d'émission).
- les deux ondes soient cohérentes entre elles : elles sont issues du même point source primaire S (critère lié au point source) et ont une différence de chemins optiques inférieure à la longueur de cohérence temporelle : $|\delta(M)| \leqslant \ell_c$ (critère lié aux largeurs spectrales des spectres d'émission).

Dans le cas contraire, le terme d'interférences est nul.

Comme la notion de cohérence implique celle de synchronicité, on se contentera couramment de dire que les deux ondes sont cohérentes entre elles.

Remarque : Dans le cas où on travaillerait avec des ondes polarisées, il faudrait ajouter en condition d'obtention d'interférences lumineuses que l'amplitude vectorielle $\vec{E}_{01}$ ne soit pas orthogonale à $\vec{E}_{02}$.

La formule de calcul de l'intensité est modifiée selon que les ondes sont cohérentes ou incohérentes entre elles.

Formule de Fresnel

Dans le cas où les deux ondes sont cohérentes entre elles, la formule de l'intensité est :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)$$

avec $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$ la différence des chemins optiques. Cette formule est dite **formule de Fresnel**.

Comme les deux ondes interférant proviennent initialement du même point source primaire S, on aura souvent $I_1 = I_2 = I_0$. La formule de Fresnel simplifiée est alors :

$$I(M) = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)\right)\right)$$

On parle d'additivité des amplitudes complexes (cf. partie III).

Additivité des intensités lumineuses

Dans le cas où les deux ondes sont non synchrones ou incohérentes entre elles, on n'observe pas d'interférences, et la formule des intensités est simplement :

$$I(M) = I_1 + I_2$$

On parle d'additivité des intensités.

Exercice : Identifier si les deux ondes se superposant sont cohérentes ou incohérentes entre elles dans les exemples suivants.

1. Trous d'Young avec une source laser S ponctuelle (source infiniment fine)
2. Trous d'Young avec une source laser étendue (la source a une certaine largeur spatiale)
3. Trous d'Young éclairés par une lampe blanche S ponctuelle. On distinguera les cas où les deux ondes se superposent proche du centre de l'écran ou proche des bords de l'écran.
4. Michelson en configuration "lame d'air" avec un écart entre les miroirs $\Delta x \sim 1\,\text{cm}$ et éclairé par un laser (on suppose la direction incidente fixée et que les deux ondes proviennent du même point source)
5. Michelson en configuration "lame d'air" avec un écart entre les miroirs $\Delta x \sim 1\,\text{cm}$ et éclairé par une lampe blanche (on suppose la direction incidente fixée et que les deux ondes proviennent du même point source)

★ (Je leur représente les deux schémas de principe des trous d'Young et du Michelson en lame d'air.)

1. Cohérentes
2. Distinguer deux cas : si les deux ondes considérées viennent du même point source : cohérentes. Sinon : non.
3. Ondes synchrones. Pour la cohérence : au centre de l'écran $\delta \sim 0 \ll \ell_c$: cohérentes / au bord $\delta \gg \ell_c \sim 1\,\mu\text{m}$: incohérentes
4. $\delta \sim 2\Delta x \ll \ell_c \sim 1\,\text{m}$: cohérentes
5. $\delta \gg \ell_c \sim 1\,\mu\text{m}$: incohérentes

II Analyse de la figure d'interférences

Dans toute cette partie, on suppose que des interférences sont visibles, i.e. que les deux ondes se superposant sont cohérentes entre elles.

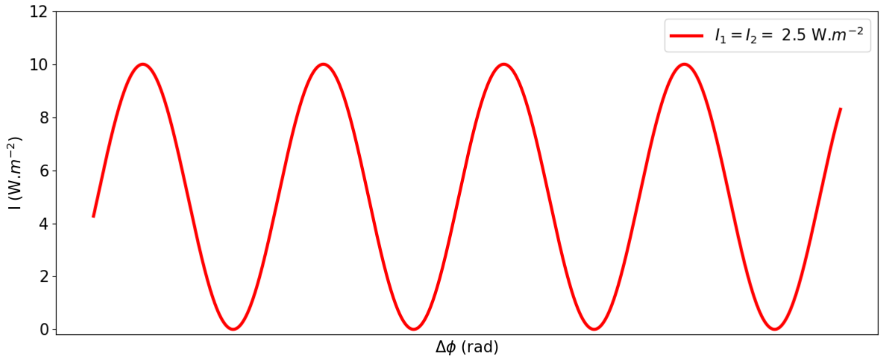
II.1 Champ d'interférences

On appelle champ d'interférences la zone de l'espace où les deux ondes cohérentes se superposent.

Expérimentalement, cette zone de superposition est forcément limitée (l'intensité lumineuse ne peut pas être non nulle partout). Il ne peut pas y avoir d'interférences en dehors du champ d'interférences.

II.2 Franges d'interférences et ordre d'interférences

Représentons l'intensité $I(M)$ donnée par la formule de Fresnel en fonction du déphasage entre les deux ondes au point M : $\Delta\varphi(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$. On se place pour le moment dans le cas où $I_1 = I_2$, la formule de Fresnel est donc : $I(M) = 2I_0\,(1 + \cos(\Delta\varphi(M)))$.



★ Placer les $\Delta\varphi$ pertinents (en mettre des négatifs) et placer le max et min en intensité. Plus tard : numéroter les ordres d'interférences entiers.

★ On observe des maxima et des minima de l'intensité lumineuse selon la valeur du déphasage entre les deux ondes.
On appelle franges brillantes, l'ensemble des points sur l'écran d'observation tels que $I(M)$ est maximal. On parle alors d'interférences constructives. Ceci revient à un déphasage $\Delta\varphi(M) = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$: les deux ondes sont en phase au point M.
On appelle franges sombres, l'ensemble des points sur l'écran d'observation tels que $I(M)$ est minimal (pas forcément nul). On parle alors d'interférences destructives. Ceci revient à un déphasage $\Delta\varphi(M) = 2\pi(p + \dfrac{1}{2})$ avec $p \in \mathbb{Z}$: les deux ondes sont en opposition de phase au point M.

On définit alors un outil pratique pour analyser la figure d'interférences.

Définition : Ordre d'interférences
On définit l'ordre d'interférence $p(M)$ au point M comme le rapport du déphasage entre les deux ondes interférant en M et 2π :

$$p(M) = \frac{\Delta\varphi(M)}{2\pi}$$

★ Sans dimension

Or, le déphasage est relié à la différence de chemins optiques $\delta(M)$: $\Delta\varphi(M) = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}\delta(M)$. Donc :

Détermination et utilisation de l'ordre d'interférences

L'ordre d'interférences $p(M)$ au point M est relié à la différence de chemins optiques $\delta(M)$:

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0}$$

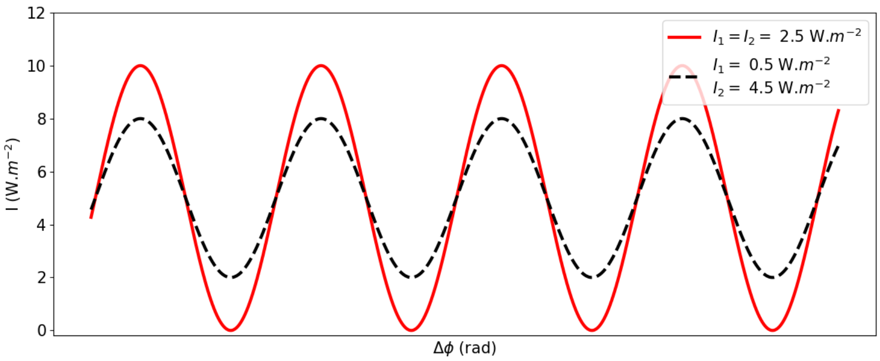
- Si $p(M)$ est un entier relatif, alors les interférences sont constructives en M et on y observe une frange brillante. $\delta(M)$ est alors un multiple entier de λ_0.
- Si $p(M)$ est un demi-entier relatif, alors les interférences sont destructives en M et on

y observe une frange sombre. $\delta(M)$ est alors un multiple demi-entier de λ_0.

On utilisera l'ordre d'interférences pour justifier la présence d'une frange brillante et pour numéroter ces franges brillantes sur l'écran.

II.3 Contraste (= visibilité) de la figure d'interférences

Représentons à nouveau l'intensité lumineuse $I(M)$ donnée par la formule de Fresnel en fonction du déphasage entre les deux ondes au point M, mais dans le cas où $I_1 \neq I_2$.



★ Placer sur la courbe en pointillés le max $I_{\max} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$ et le min $I_{\min} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$.
On observe toujours des franges brillantes et des franges sombres, pour les mêmes valeurs de l'ordre d'interférences $p(M)$, mais l'écart entre l'intensité des franges brillantes et l'intensité des franges sombres a diminué. Expérimentalement, on aura plus de difficulté à repérer les franges brillantes/sombres. On dit que le contraste (= la visibilité) de la figure d'interférences a diminué.

Contraste de la figure d'interférences

On définit le contraste (= la visibilité) de la figure d'interférences par :

$$\mathcal{C} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

★ Sans dimension, et $0 \leqslant \mathcal{C} \leqslant 1$

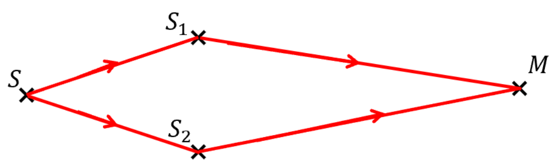
Plus le contraste $\mathcal{C}$ est élevé, plus il est aisé de repérer expérimentalement les franges brillantes et les franges sombres.

Dans le cas de l'interférence de deux ondes cohérentes, d'après la formule de Fresnel, on remarque que le contraste vaut $\mathcal{C} = 1$ et est donc maximal quand $I_1 = I_2$.

★ On retiendra qu'un bon contraste est associé à l'interférence d'ondes d'intensités voisines.

II.4 Forme géométrique des franges d'interférences

On peut trouver l'équation mathématique des franges en imposant $p(M) = \dfrac{\delta(M)}{\lambda_0} = \text{cste} \iff \delta(M) = \text{cste}$. On a : $\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M)$.

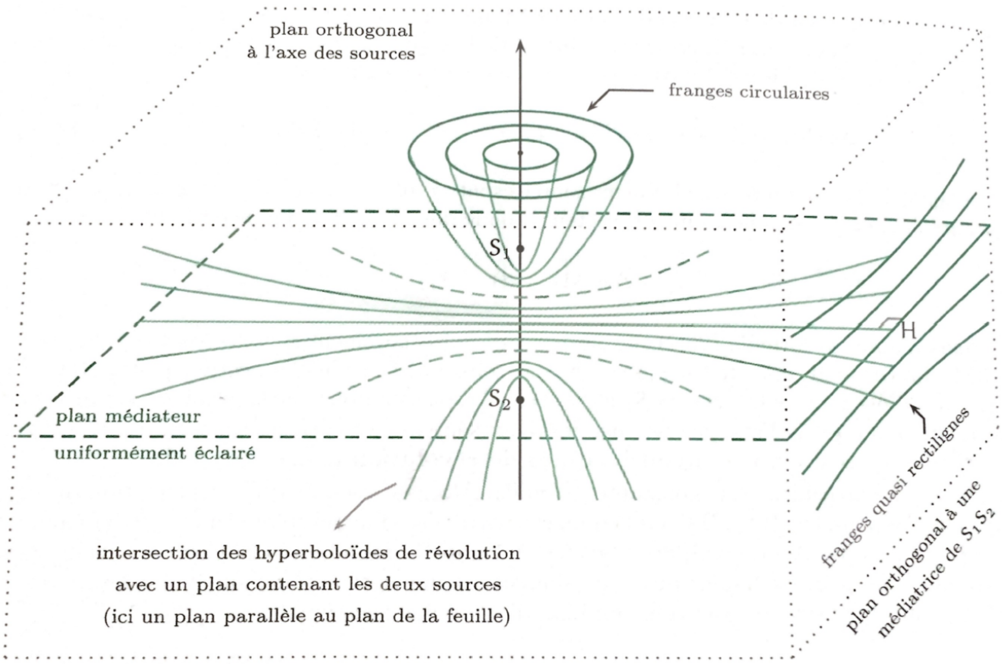


Expérimentalement, dans un système interférentiel, le point source primaire S et les points sources secondaires S_1 et S_2 sont fixes, quelque que soit le point M observé. Donc, $(SS_2) - (SS_1) = \text{cste}$. Ainsi, l'équation des franges vérifie $(S_2M) - (S_1M) = \text{cste}$.

Supposons que les points S_1, S_2 et M soient dans un milieu homogène d'indice optique n. Comme S_1 et M sont sur le même rayon lumineux, on a $(S_1M) = n\overline{S_1M} = nS_1M$. De même, $(S_2M) = nS_2M$. Ainsi les franges sont l'ensemble des points M vérifiant :

$$S_2M - S_1M = \text{cste}$$

Les mathématiciens ont appelé les surfaces obtenues des hyperboloïdes de foyers S_1 et S_2 et d'axe de révolution (S_1S_2).



Si on place un écran parallèle à la direction (S_1S_2) (cf. à droite du schéma), on observe des franges sous forme de branches d'hyperboles sur l'écran. Mais, en pratique, comme le champ d'interférences est limité, les franges apparaissent comme rectilignes.

Si on place un écran orthogonal à la direction (S_1S_2) (cf. en haut du schéma), on observe des franges sous forme de cercles concentriques.

III Autre démonstration de la formule de Fresnel en supposant que les deux ondes sont cohérentes entre elles

III.1 Préambule mathématique : utiliser la notation complexe pour calculer la moyenne d'un produit de deux champs synchrones

Dans cette sous-partie, nous allons remarquer l'existence d'un outil mathématique pratique pour calculer la moyenne temporelle d'un produit de deux fonctions sinusoïdales synchrones. Soient $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ et $g(t) = B\cos(\omega t + \psi)$ deux fonctions harmoniques synchrones.

On a :

$$\begin{aligned}\langle f(t)g(t)\rangle &= AB\langle\cos(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\psi)\rangle\\ &= AB\times\frac{1}{2}\left(\underbrace{\langle\cos(2\omega t+\varphi+\psi)\rangle}_{=0}+\langle\cos(\varphi-\psi)\rangle\right)\\ &= \frac{AB}{2}\cos(\varphi-\psi)\end{aligned}$$

A ce stade, introduisons les notations complexes de f et g : $\underline{f}(t) = A\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)}$ et $\underline{g}(t) = B\,\mathrm{e}^{j(\omega t+\psi)}$.
On remarque que l'on retrouve le résultat précédent en calculant :

★

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{f}\times\underline{g}^*\right) = \frac{AB}{2}\cos(\varphi-\psi)$$

avec $\underline{g}^*$ le complexe conjugué de $\underline{g}$.

Outil math. pour calculer la moyenne d'un produit de deux fonctions synchrones

Mathématiquement, on pourra utiliser le raccourci de calcul suivant pour calculer la moyenne d'un produit de deux fonctions sinusoïdales **synchrones**, en passant par la notation complexe :

$$\langle f(t)g(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{f}(t)\underline{g}^*(t)\right)$$

avec $\underline{g}^*(t)$ le complexe conjugué de $\underline{g}(t)$.

⚠ Physiquement, cela n'a aucun sens de calculer un produit de deux fonctions complexes, car le produit est une opération non linéaire. Ici, on remarque juste une propriété de calcul intéressante.

Exemples :

- En électronique, en régime sinusoïdal forcé et en convention récepteur, la puissance moyenne reçue par un dipôle s'écrit : $\langle P_{\text{reçue}}\rangle = \langle u(t)i(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{u}\,\underline{i}^*\right)$ car $u(t)$ et $i(t)$ sont sinusoïdales de même fréquence.

Pour une OPPH électromagnétique, les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ oscillent à la même pulsation ω. Donc, le vecteur de Poynting moyen peut se calculer par :

$$\left\langle\vec{\Pi}\right\rangle = \frac{\left\langle\vec{E}\wedge\vec{B}\right\rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left(\underline{\vec{E}}\wedge\underline{\vec{B}}^*\right)$$

En optique ondulatoire, pour une vibration lumineuse harmonique $s(M,t)$, l'intensité lumineuse s'écrit :

★

$$I(M) = K\left\langle s^2(M,t)\right\rangle = \frac{K}{2}\mathrm{Re}\left(\underline{s}\times\underline{s}^*\right) = \frac{K}{2}\left|\underline{s}\right|^2$$

En optique ondulatoire, la superposition de deux vibrations lumineuses harmoniques **synchrones** (pulsation ω) et **cohérentes entre elles** $s(M,t) = s_1(M,t)+s_2(M,t)$ est aussi une vibration lumineuse harmonique de pulsation ω. (Se poser pour justifier la nécessité de synchrones (deux fonctions de même période, donc la somme est périodique avec la même période) et cohérentes (il ne faudrait pas avoir des sauts de phase aléatoires indépendants pour les deux vibrations).) Donc, la formule précédente s'applique à cette superposition :

$$I(M) = \frac{K}{2}\left|\underline{s_1}(M,t)+\underline{s_2}(M,t)\right|^2$$

III.2 Démonstration de la formule de Fresnel avec la notation complexe

Nous allons retrouver plus rapidement la formule de Fresnel en supposant que les deux vibrations lumineuses harmoniques se superposant sont synchrones et cohérentes entre elles.

Exercice : En écrivant $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ en notation complexe, déterminer la formule de Fresnel.

On pose : $\underline{s_1}(M,t) = A_{10}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi_1(M))}$ et idem pour s_2. Par principe de superposition, $\underline{s}(M,t) = \underline{s_1} + \underline{s_2}$ (c'est pour cela que l'on parle d'additivité des amplitudes complexes). Donc :

★

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{K}{2}\left|\underline{s_1} + \underline{s_2}\right|^2 \\ &= \frac{K}{2}(\underline{s_1} + \underline{s_2})(\underline{s_1}^* + \underline{s_2}^*) \\ &= \frac{K}{2}\left(\left|\underline{s_1}\right|^2 + \left|\underline{s_2}\right|^2 + 2\mathrm{Re}\left(\underline{s_1}\,\underline{s_2}^*\right)\right) \\ &= I_1 + I_2 + KA_{10}A_{20}\ \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \end{aligned}$$

Enfin, deux ondes cohérentes entre elles ont été émises par le même point source durant le même train d'onde

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left((SS_2M) - (SS_1M)\right)$$

Vision graphique : représentation de Fresnel

Nous allons utiliser la représentation vectorielle de Fresnel des nombres complexes. Elle consiste à représenter les amplitudes complexes dans le plan complexe (sous forme de vecteurs).

Par exemple, pour la vibration lumineuse $\underline{s_1}(M,t) = A_{10}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi_1(M))} = \underline{S_1}(M)\ \mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $\underline{S_1}(M) = A_{10}\ \mathrm{e}^{-j\varphi_1(M)}$, la représentation de Fresnel est :

★

J'écris $\overrightarrow{S_1}$. On a en particulier :

$$\left|\underline{s_1}\right| = \left|\underline{S_1}\right| = \left\|\vec{S}_1\right\|$$

Démonstration de la formule de Fresnel :

On pose les grandeurs complexes $\underline{s_1} = \underline{S_1}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $\underline{S_1} = A_{10}\ \mathrm{e}^{-j\varphi_1(M)}$ et $\underline{s_2} = \underline{S_2}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $\underline{S_2} = A_{20}\ \mathrm{e}^{-j\varphi_2(M)}$.

★

Représentation de Fresnel.
On en déduit :

$$\begin{aligned} \left|\underline{s_1} + \underline{s_2}\right|^2 &= \left\|\vec{S}_1 + \vec{S}_2\right\|^2 \\ &= \cdots \\ &= \left|\underline{s_1}\right|^2 + \left|\underline{s_2}\right|^2 + 2A_{10}A_{20}\ \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \\ \Rightarrow I(M) &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\ \cos(\varphi_2(M) - \varphi_1(M)) \end{aligned}$$

La représentation de Fresnel est particulièrement efficace lorsqu'on est amené à calculer la somme de différentes grandeurs complexes synchrones car on somme des vecteurs.