Devoir de mathématiques n° 8.

Exercice. On note $E(X)$ (resp. $V(X)$) l'espérance (resp. la variance) d'une variable aléatoire X si elles existent.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, supérieur ou égal à 2.

On repartit au hasard r boules numérotées de 1 à r dans n urnes numérotées de 1 à n.

On note N_n le nombre d'urnes vides, et, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, A_j l'évènement : « l'urne n° j est vide ».

1. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X_j égale à 1 si l'évènement A_j est réalisé et à 0 sinon.

En déduire que $E(N_n) = n(1 - \frac{1}{n})^r$.

2. Montrer que $E(N_n^2) = n(1 - \frac{1}{n})^r + n(n-1)(1 - \frac{2}{n})^r$.

• On suppose désormais que $r = r_n$ dépend de n et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{r_n}{n} = c \in \mathbb{R}^+$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V(\frac{N_n}{n})$. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} E\big((\frac{N_n}{n} - e^{-c})^2\big) = 0$.

4. Soit $\varepsilon > 0$. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|\frac{N_n}{n} - e^{-c}| \geq \varepsilon) = 0$.

Problème 1. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, mutuellement indépendantes, toutes de même loi avec, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X_k = -1) = 1 - p \text{ et } P(X_k = 1) = p$$

où $p \in]0, 1[$. On pose $S_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'espérance de S_n. Justifier que la variance de S_n est égale à $4np(1-p)$.

2. *On suppose dans cette question que* $p \in]\frac{1}{2}, 1[$. Vérifier que $E(S_n) > 0$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(S_n \leq 0) \subset (|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n))$.

2. b. En déduire avec l'inégalité de Tchebychev que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leq 0) = 0$.

On suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $P(S_{2n+1} = 0)$.

3. b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $P(S_{2n} = 0) = \binom{2n}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{2n}$. Déduire de la formule de Stirling que $P(S_{2n} = 0) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$ et préciser la nature de la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)$.

3. c. Rappeler le DSE(0) de $(1+t)^\alpha$ pour $t \in]-1, 1[$ et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. En déduire que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)\, x^n = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \tag{1}$$

4. Calculer $P(S_2 \neq 0, S_4 = 0)$.

5. a. Vérifier que $(S_2 = 0, S_6 = 0) = (S_2 = 0, S_6 - S_2 = 0)$. En déduire $P(S_2 = 0, S_6 = 0)$.
Remarquer que S_2 et $S_6 - S_2$ sont indépendantes et que $S_6 - S_2$ suit la même loi que S_4.

5. b. Vérifier que $(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) = (S_2 \neq 0, S_4 = 0, X_5 + X_6 = 0)$.
En déduire que $P(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) = P(S_2 \neq 0, S_4 = 0)P(S_2 = 0)$.

5. c. En déduire $P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 = 0)$.

Les questions suivantes 6,7,8,9 sont facultatives.

Notons désormais B_1 l'événement $(S_1 = 0)$, B_2 l'événement $(S_1 \neq 0, S_2 = 0)$ et plus généralement, pour tout $k \geq 2$, B_k l'événement : $(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0)$. *On observera que B_k est un événement impossible si k est impair.*

Notons enfin pour simplifier $u_n = P(S_n = 0)$, $b_n = P(B_n)$ et pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $(S_n = 0) = \bigcup\limits_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k)$. En déduire que $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k u_{n-k}$.

7. Montrer en effectuant un produit de Cauchy que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = g(x) \cdot \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

8. Déduire de **7.** et de (1) que pour tout $x \in]-1, 1[$, $g(x) = 1 - (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$.

9. Donner le DSE(0) de g sur $]-1, 1[$ et déduire de la question précédente que pour tout entier $n \geq 2$,

$$b_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2^n n!} = \frac{P(S_{2n} = 0)}{2n - 1}.$$

Problème 2. *Etude de deux endomorphismes de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Les deux parties A et B sont indépendantes.*

Partie A. Soit f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\ f(M) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$ et justifier que f est une symétrie vectorielle.

2. a. Vérifier que $\forall (M, N) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $f(MN) = f(N)f(M)$.

2. b. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que si M est inversible, alors $f(M)$ est inversible et déduire de 2. a. que $f(M)^{-1} = f(M^{-1})$.

2. c. Soient A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $f(A)$ est semblable à $f(B)$.

3. On note $\mathcal{N} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / \mathrm{tr}(M) = 0\}$ et $\mathcal{D} = \{aI_2 / a \in \mathbb{R}\}$ où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. a. Vérifier que $\mathcal{N}$ et $\mathcal{D}$ sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera les dimensions.

3. b. Prouver que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{N} \oplus \mathcal{D}$ et que f est la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{D}$, de direction $\mathcal{N}$.

Partie B. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'application $g_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.

1. Vérifier que $g_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.

2. a. Ecrire la matrice de g_A dans la base canonique $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. b. Etablir une relation entre la trace de g_A et la trace de A.

3. a. On suppose A inversible. Vérifier que g_A est bijective et que $\overset{-1}{g_A} = g_{A^{-1}}$.

3. b. *Réciproque.* On suppose que l'application g_A est bijective. Prouver que A est inversible.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que λ est une valeur propre de g_A si et seulement si λ est une valeur propre de A.

5. *Exemple.* Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Déterminer les éléments propres de la matrice A et les éléments propres de l'endomorphisme g_A.