Problème 1. On peut supposer pour fixer les idées que $E = \{1, \cdots, n\}$.

1. La seule bijection f de $\{1\}$ dans $\{1\}$ est définie par $f(1) = 1$. Comme 1 est un point fixe de f, f n'est pas un dérangement et $d_1 = 0$. Il y a deux bijections $\{1, 2\}$ dans $\{1, 2\}$: la bijection "identité", Id, définie par $Id(1) = 1$, $Id(2) = 2$ qui n'est pas un dérangement et t définie par $t(1) = 2$ et $t(2) = 1$ qui est un dérangement. Donc $d_2 = 1$. On constate enfin que parmi les $3! = 6$ bijections de $\{1, 2, 3\}$ dans $\{1, 2, 3\}$, il y a deux dérangements : la bijection u envoyant 1 sur 2, 2 sur 3 et 3 sur 1 et la bijection $v = u \circ u$ envoyant 1 sur 3, 2 sur 1 et 3 sur 2. Donc $d_3 = 2$.

2. *i)* Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Choisissons k éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Une permutation f de $\{1, \ldots, n\}$ laisse fixe uniquement ces k éléments si elle "dérange" les $n - k$ éléments restants de $\{1, \ldots, n\}$, autrement dit si chacun des $n - k$ éléments restants a une image par f différente de lui-même. Ce qui revient à compter les dérangements de l'ensemble des $n - k$ éléments restants dans lui-même. Il y a donc d_{n-k} permutations de $\{1, \ldots, n\}$ laissant fixes uniquement ces k éléments.

Exemple : $n = 5$, les deux éléments choisis étant 1 et 3. Il y a deux bijections de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ laissant fixes uniquement 1 et 3 : la bijection envoyant 2 sur 4, 4 sur 5 et 5 sur 1 et la bijection envoyant 2 sur 5, 4 sur 1 et 5 sur 2. Ce qui revient bien à déterminer les "dérangements de $\{2, 3, 5\}$ dans $\{2, 3, 5\}$".

ii) Soit $k \in \{0, \cdots, n\}$. D'après *i)*, il y a d_{n-k} bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ayant exactement k points fixes donnés. Comme il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir ces k éléments parmi n, il y a donc $\binom{n}{k} d_{n-k}$ bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ayant exactement k points fixes. D'où $n! = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$ en partitionnant l'ensemble des $n!$ bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ en les $n+1$ sous-ensembles disjoints suivants : l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ayant 0 point fixe, l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ayant seul 1 point fixe, $\cdots$, l'ensemble des bijections de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ ayant n points fixes (ce dernier ensemble ne contenant en fait que l'application identique !). Et le changement d'indice $j = n - k$ conduit à l'égalité : $n! = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{n-j} d_j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} d_j$ car $\binom{n}{n-j} = \binom{n}{j}$.

<u>*Méthode n° 1*</u>

3. On a : $\displaystyle\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \frac{(n-p)!}{(k-p)!(((n-p)-(k-p))!}\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(k-p)!(n-k)!p!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{(k-p)!p!} = \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

3. a. On déduit de l'égalité précédente que

$$\sum_{p=0}^{k} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{k} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p} = 2^k\binom{n}{k}$$

car d'après le formule du binôme $2^k = (1+1)^k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}1^p 1^{k-p} = \sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}$.

3. b. En réutilisant l'égalité de la question **3.** :

$$\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n-p}{k-p}$$

Si $p = n$, on obtient directement que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} = (-1)^n\binom{n}{n}^2 = (-1)^n$ et si $p < n$, le changement d'indice $j = k - p$ et la formule du binôme nous donnent :

$$\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n-p}{k-p} = (-1)^p\sum_{j=0}^{n-p}\binom{n-p}{j}(-1)^j = (-1)^p(1+(-1))^{n-p} = 0$$

car $n - p \in \mathbb{N}^*$ et par conséquent $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\cdot 0 = 0$.

4. Démontrons plus généralement le résultat suivant : soit $a_{00}, \cdots, a_{nn}$ $(n+1)^2$ réels. On a :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} a_{jk}}. \qquad (1)$$

Ecrivons $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k} a_{jk}$ comme une «somme double» où les deux indices j et k varient *tous les deux de* 0 *à* n sachant que l'on peut alors «permuter les deux symboles Σ». On introduit à cet effet, pour $(j, k) \in \{0, \cdots, n\}^2$, $b_{jk} = 1$ si $j \in \{0, \cdots, k\}$ et $b_{jk} = 0$ si $j \in \{k+1, \cdots, n\}$ et effectivement :

$$\sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{k} a_{jk}) = \sum_{k=0}^{n}(\sum_{j=0}^{n} a_{jk}b_{jk}) = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{k=0}^{n} a_{jk}b_{jk}) = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{k=j}^{n} a_{jk}b_{jk}) = \sum_{j=0}^{n}(\sum_{k=j}^{n} a_{jk}).$$

Il nous reste à utiliser (1) avec $a_{jk} = (-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{j}d_j$ (n étant ici une constante fixée) pour obtenir l'égalité souhaitée.

5. D'une part avec **2.** : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}d_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}d_j) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k! = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!}$ et d'autre part avec **3. b.** : $\sum_{j=0}^{n}d_j(\sum_{k=j}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{k}{j}) = (-1)^n d_n$. L'égalité **4.** donne alors : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!}{(n-k)!} = (-1)^n d_n$, c'est-à-dire :

$$d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n!\sum_{p=0}^{n}\frac{(-1)^p}{p!}$$

(en effectuant le changement d'indice $p = n-k$).

Méthode n^o 2

6. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $0\leq d_n\leq n!$ donc $0\leq\frac{d_n}{n!}\leq 1$. Soit $x\in]-1,1[$. Alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\frac{d_n}{n!}x^n| = \frac{d_n}{n!}|x|^n\leq|x|^n$. La série $\sum_{n\geq 0}|x|^n$ étant convergente, car géométrique de raison $|x|\in[0,1[$, on en déduit alors par comparaison de termes positifs, que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{d_n}{n!}x^n$ converge absolument. Le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{d_n}{n!}x^n$ est donc supérieur ou égal à 1.

Remarque. On pouvait utiliser la définition du rayon de convergence : $R = \sup I$ où I est l'intervalle constitué des réels positifs r pour lesquels la suite $(\frac{d_n}{n!}r^n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. Comme $1\in I$ car $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq\frac{d_n}{n!}1^n = \frac{d_n}{n!}\leq 1$, on a bien $R\geq 1$.

7. *Rappel.* Le produit des deux séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ est la série $\sum_{n\geq 0}w_n$ avec $\forall n\in\mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}$.

Rappelons que si $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ sont deux séries *absolument convergentes*, la série produit $\sum_{n\geq 0}w_n$ de ces deux séries est une série absolument convergente et que l'on a : $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n.\sum_{n=0}^{+\infty}v_n$.

Fixons $x\in]-1,1[$. On peut appliquer le résultat précédent sur le produit de deux séries avec $u_n = \frac{x^n}{n!}$ car $\sum u_n$ est une série absolument convergente, de somme e^x, et $v_n = \frac{d_n}{n!}x^n$ car $\sum v_n$ converge absolument, de somme $f(x)$, d'après **6.** On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ avec **2.** :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\frac{d_{n-k}}{(n-k)!}x^{n-k} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}d_{n-k}\,x^n = \frac{1}{n!}\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}d_{n-k}}_{=n!}\,x^n = x^n$$

et finalement, $e^x f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n.\sum_{n=0}^{+\infty}v_n = \sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \frac{1}{1-x}$.

En réutilisant le rappel sur les séries produits, on a, pour tout $x\in]-1,1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{d_n}{n!}x^n = f(x) = e^{-x}\cdot\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!})\,x^n$$

et par unicité du DSE(0) de f sur $]-1,1[$, on obtient à nouveau $\forall n\in\mathbb{N}$, $d_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.