Ecriture matricielle par blocs.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Matrices par blocs.

Il peut être utile parfois d'écrire une matrice (de grande taille généralement) en faisant apparaître certaines de ses "sous-matrices".

Exemple 1. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$. On peut écrire : $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais aussi $M = \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exemple 2. Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, dont les lignes sont notées $L_1, \cdots, L_n$ et les colonnes $C_1, \ldots, C_p$.

On peut écrire plus simplement : $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ ou $M = \begin{pmatrix} C_1 & \ldots & C_n \end{pmatrix}$.

Définition 1 *On appelle écriture par blocs d'une matrice A toute écriture du type : $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,p} \end{pmatrix}$, où deux blocs du type A_{i,j_1} et A_{i,j_2} ont le même nombre de lignes, et deux blocs du type $A_{i_1,j}$ et $A_{i_2,j}$ ont le même nombre de colonnes.*

2 Opérations sur les matrices par blocs.

On vérifie sans difficultés les propriétés suivantes qui généralisent les opérations usuelles sur les matrices :

Proposition 1 `[Transposition par blocs]` *Si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,p} \end{pmatrix}$, alors $A^T = \begin{pmatrix} A_{1,1}^T & \ldots & A_{1,p}^T \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1}^T & \ldots & A_{n,p}^T \end{pmatrix}$*

Proposition 2 `[Combinaison linéaire par blocs]` *Soit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \ldots & B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{n,1} & \ldots & B_{n,p} \end{pmatrix}$ deux matrices blocs dont les blocs sont compatibles avec l'addition, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :*

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda A_{1,1} + \mu B_{1,1} & \ldots & \lambda A_{1,p} + \mu B_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{n,1} + \mu B_{n,1} & \ldots & \lambda A_{n,p} + \mu B_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 3 `[Produit par blocs]` *Soit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \ldots & A_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n,1} & \ldots & A_{n,p} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \ldots & B_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{p,1} & \ldots & B_{p,q} \end{pmatrix}$ deux matrices blocs dont les blocs sont compatibles avec le produit matriciel, alors pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :*

$$AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & \ldots & C_{1,q} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n,1} & \ldots & C_{n,q} \end{pmatrix}$$

avec $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!]$, $C_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}$.

Exemple 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$. On a :

$$A + B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + B_{1,1} & A_{1,2} + B_{1,2} \\ A_{2,1} + B_{2,1} & A_{2,2} + B_{2,2} \end{pmatrix} \text{ et } C = AB = \begin{pmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} \\ C_{2,1} & C_{2,2} \end{pmatrix}$$

avec : $C_{1,1} = A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{1,1}$, $C_{1,2} = A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,1}$, $C_{2,1} = A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,2}$, $C_{2,2} = A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2}$.

Définition 2 *Une matrice triangulaire supérieure par blocs, de blocs diagonaux $A_{1,1}, \dots, A_{n,n}$, est une matrice carrée de la forme :*

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \dots & \dots & A_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix},$$

où les blocs diagonaux sont des matrices carrées.
▷ *On définit de manière analogue une matrice carrée triangulaire inférieure par blocs.*

▷ *Une matrice D diagonale par blocs est une matrice triangulaire par blocs dont les blocs non diagonaux sont nuls. On note en général plus simplement $A_1, \dots, A_n$ les blocs diagonaux de D et $D = \operatorname{diag}(A_1, \dots, A_n)$.*

Remarque 1 *Si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les matrices carrées A_i et B_i sont des matrices carrées de même ordre, on a :*

$$\operatorname{diag}(A_1, \dots, A_n) \operatorname{diag}(B_1, \dots, B_n) = \operatorname{diag}(A_1 B_1, \dots, A_n B_n).$$

3 Déterminant de matrices par blocs.

Proposition 4 `[Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs]`
Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}) = \det(A) \cdot \det(C)$.

Preuve. • On rappelle que pour tout $(U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\boxed{\det(UV) = \det(U)\det(V)}$ $(*)$.
On a : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}$. En développant $\det(\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix})$, on obtient $\det(\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}) = \det(C)$.
De même, $\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}) = \det(A)$. D'où par $(*)$:

$$\det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ 0_{p,n} & C \end{pmatrix}) \det(\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{p,n} & I_p \end{pmatrix}) = \det(C)\det(A) = \det(A)\det(C).$$

□

Plus généralement, en faisant une récurrence sur le nombre de blocs, on obtient que le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs (cf. définition 2) est égal au produit des déterminants de ses blocs diagonaux :

Corollaire 1 $\det \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \dots & A_n \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A_{n,n} \end{pmatrix} = \det(A_1) \dots \det(A_n)$.

Exercice 1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Justifier que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B)\det(A - B)$.

Indications : effectuer les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_{i+n}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ puis $C_{n+j} \leftarrow C_{n+j} - C_j$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Exercice 2. Soient $x \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $U = \begin{pmatrix} I_n & B \\ A & xI_p \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} xI_n & 0 \\ -A & I_p \end{pmatrix}$.

Calculer UV et VU. En déduire que $x^n \det(xI_p - AB) = x^p \det(xI_n - BA)$.

Exercice 3. Soient A, B, C, D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec D inversible et $CD = DC$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Calculer $\det(M)$.

2. En déduire que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.