Rang, dimension.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Rang d'une famille finie de vecteurs.

Soit E un $\mathbb{K}$ev. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $U = (u_1, \cdots, u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Rappelons que p est le cardinal de U, noté $card(U)$.

Définition 1 *L'ensemble des combinaisons linéaires de $u_1, \cdots, u_p$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé sous-espace vectoriel engendré par U et noté $Vect(U)$. Autrement dit, $Vect(U) = \{a_1u_1 + \cdots + a_pu_p / (a_1, \cdots, a_p) \in \mathbb{K}^p\}$.*

Proposition 1 *$Vect(U)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion) contenant $u_1, \cdots, u_p$.*

Preuve. Vérifions tout d'abord que $Vect(U)$ est bien un sev de E : (i) $Vect(U) \neq \emptyset$ car $0_E = 0u_1 + \cdots + 0u_p \in Vect(U)$.
(ii) Soient $x, y \in Vect(U)$ et $a \in \mathbb{K}$. Il existe $x_1, \cdots, x_p, y_1, \cdots, y_p \in \mathbb{K}$ tels que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k u_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p} y_k u_k$.
Donc $ax + y = \sum_{k=1}^{p} (ax_k + y_k)u_k \in Vect(U)$.
De plus, si F est un sev de E contenant $u_1, \cdots, u_p$, F contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \cdots, u_p$. Autrement dit, $Vect(U) \subset F$. $\square$

Définition 2 *Le rang de U, noté $rg(U)$, est la dimension de $Vect(U)$.*

Remarque 1 *Si E est de dimension finie, $rg(U) = \dim Vect(U) \leq \dim E$ car $Vect(U)$ est un sev de E.*

Proposition 2 *1. $rg(U) \leq p = card(U)$.*
2. $rg(U) = p$ si et seulement si U est libre.
3. $rg(U) = \max\{card(\mathcal{L}),\ \mathcal{L} \subset U,\ \mathcal{L}$ libre$\}$.

Preuve. Rappelons que le nombre d'éléments d'une famille génératrice (resp. libre) d'un espace vectoriel (de dimension finie) est supérieur (resp. inférieur) ou égal à la dimension de cet espace.

1. Comme U est une famille génératrice de $Vect(U)$, $card(U) \geq \dim Vect(U)$, i.e $p \geq rg(U)$.

2. a. Supposons $rg(U) = p$, i.e $card(U) = \dim Vect(U)$. Comme U engendre $Vect(U)$, U est alors une base de $Vect(U)$ et donc une famille libre.
2. b. Si U est libre, U est une base de $Vect(U)$ car U est une famille génératrice de $Vect(U)$. Donc $rg(U) = card(U) = p$.
3. On peut extraire de la famille U (génératrice de $Vect(U)$) une famille (libre) $\mathcal{B}$ telle que $\mathcal{B}$ soit une base de $Vect(U)$. On a alors $rg(U) = card(\mathcal{B})$. De plus, si $\mathcal{L} \subset U$ est libre, $\mathcal{L}$ étant une famille libre de $Vect(U)$, on a $card(\mathcal{L}) \leq rg(U) = card(\mathcal{B})$. $\square$

Exemple. Soient $u_1 = (1, -1, 1)$, $u_2 = (-1, 1, -1)$, $u_3 = (0, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 0, 2)$. Déterminer $rg(u_1, u_2, u_3, u_4)$.

La proposition suivante, dans laquelle E est supposé de dimension finie $n \geq 2$, est importante en pratique :

Proposition 3 `[Famille triangulaire par rapport à une base.]` *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.*
Soit $p \in \{1, \ldots, n\}$. Si, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $u_j \in Vect(e_j, \ldots, e_n)$ et la composante de u_j sur e_j est non nulle, alors $U = (u_1, \ldots, u_p)$ est une famille libre de E.

Preuve. Posons $u_j = a_{jj}e_j + \cdots + a_{nj}e_n$, où $a_{jj} \neq 0$. Soient $b_1, \ldots, b_p \in \mathbb{K}$ tels que $S = b_1u_1 + \cdots + b_pu_p = 0_E$ $(*)$. En remplaçant dans $(*)$ $u_1, \ldots, u_p$ par leurs combinaisons linéaires en les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$, on obtient que la coordonnée (nulle) de S suivant e_1 est b_1a_{11} d'où $b_1 = 0$ et $S = b_2u_2 + \cdots + b_pu_p = 0_E$. Puis la coordonnée (nulle) de S suivant e_2 est b_2a_{22} d'où $b_2 = 0$ etc. $\square$

La proposition suivante décrit les transformations "élémentaires" que l'on peut opérer sur une famille de vecteurs sans en changer le rang dans le but d'obtenir une famille triangulaire.

Proposition 4 `[Opérations élémentaires].`
1. Le rang de U est le rang de la famille formée des vecteurs non nuls de U.
2. Le rang de U reste inchangé si l'on permute les vecteurs de U.
3. Le rang de U reste inchangé si l'on multiplie un vecteur de U par un scalaire non nul.
4. Le rang de U reste inchangé si l'on ajoute à un des vecteurs de U une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Exemple. Soient $u_1 = (3, 5, 1)$, $u_2 = (0, 2, -2)$, $u_3 = (2, 0, 4)$. Déterminer $rg(u_1, u_2, u_3)$.

2 Produit d'espaces vectoriels.

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient $E_1, \cdots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev. On vérifie sans difficultés que l'on munit "naturellement" l'ensemble produit $E_1 \times \cdots \times E_p$ d'une structure d'espace vectoriel produit en définissant l'addition interne et la multiplication externe de la façon suivante :

$$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall (y_1, \cdots, y_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p, \forall \lambda \in \mathbb{K},$$
$$(x_1, \cdots, x_p) + (y_1, \cdots, y_p) = (x_1 + y_1, \cdots, x_p + y_p)\,;\ \lambda(x_1, \cdots, x_p) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_p).$$

Proposition 5 *Soient $E_1, \cdots, E_p$ des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Alors $E_1 \times \cdots \times E_p$ est un espace vectoriel de dimension finie avec :*

$$\dim E_1 \times \cdots \times E_p = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p.$$

Preuve. Récurrence sur p. Pour le cas $p = 2$, montrons que si $(e_1, \cdots, e_n)$ (resp. $(f_1, \cdots, f_p)$) est une base de E_1 (resp. de E_2), la famille de couples $\mathcal{F} = ((e_1, 0_{E_2}), \cdots, (e_n, 0_{E_2}), (0_{E_1}, f_1), \cdots, (0_{E_1}, f_p))$ est une base de $E_1 \times E_2$ (à $n + p$ éléments) car génératrice et libre :

• Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$. Posons : $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j$. Alors

$$(x, y) = (x, 0_{E_2}) + (0_{E_1}, y) = (\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, 0_{E_2}) + (0_{E_1}, \sum_{j=1}^{p} y_j f_j) = \sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, 0_{E_2}) + \sum_{j=1}^{p} y_j (0_{E_1}, f_j)$$

Donc $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E_1 \times E_2$.

• Soient $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_p$ des scalaires tels que $\sum_{i=1}^{n} x_i (e_i, 0_{E_2}) + \sum_{j=1}^{p} y_j (0_{E_1}, f_j) = (0_{E_1}, 0_{E_2})$.

Posons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{p} y_j f_j$. L'égalité précédente s'écrit alors : $(x, y) = (0_{E_1}, 0_{E_2})$, c'est-à-dire $x = 0_{E_1}$ et $y = 0_{E_2}$. D'où $x_1 = \cdots = x_n = 0$ et $y_1 = \cdots = y_p = 0$ car les familles $(e_1, \cdots, e_n)$ et $(f_1, \cdots, f_p)$ sont libres.
Donc $\mathcal{F}$ est une famille libre de $E_1 \times E_2$.

□

3 Rang d'une application linéaire. Isomorphisme. Théorème du rang.

3.1 Rang. Isomorphisme.

Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$ev (non nécessairement de dimension finie). Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. Soient $y \in \operatorname{Im} f$ et $x \in E$ tels que $y = f(x)$. Comme il existe $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$, par linéarité de f, $y = f(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k)$. Donc $y \in Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p))$. Réciproquement, si $y \in Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p))$, il existe $x_1, \cdots, x_p \in \mathbb{K}$ tel que $y = \sum_{k=1}^{p} x_k f(e_k)$ et par linéarité de f, $y = f(\sum_{k=1}^{p} x_k e_k)$. Donc $y \in \operatorname{Im} f$. Par conséquent, $\boxed{\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p))}$ est de dimension finie, inférieure ou égale à p.

Définition 3 *On appelle rang de f, noté $rg(f)$, la dimension de* $\operatorname{Im} f$.

Définition 4 *Soient E et F deux Kev. On dit que f est un isomorphisme de E sur F si f est une application linéaire et bijective de E sur F. S'il existe un isomorphisme de E sur F, on dit que les espaces E et F sont isomorphes.*

Exemple. Montrer que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Proposition 6 *Soient E et F deux Kev de dimension finies. Alors E et F sont isomorphes* $\Leftrightarrow \dim E = \dim F$.

Preuve. • Supposons E et F isomorphes. Soit f un isomorphisme de E sur F. Comme f est surjective, $\operatorname{Im} f = F$. Soient $p = \dim E$ et $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de E. On a montré précédemment que $\operatorname{Im} f = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p))$. Par conséquent, $\dim F = \dim \operatorname{Im} f \leq p = \dim E$. En raisonnant de même avec l'isomorphisme f^{-1} de F sur E, on obtient $\dim E \leq \dim F$. Donc $\dim E = \dim F$.
•• Supposons $\dim E = \dim F = n$. Soient $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ une base de F. Soit f l'unique application linéaire de E dans F telle que $\forall k \in \{1, \cdots, n\}$, $f(e_k) = \epsilon_k$. Rappelons que si $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k$. Montrons que f est une bijection de E sur F.
(i) f est injective : en effet, comme $(\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$ est une base (donc une famille libre) de F,

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} x_k \epsilon_k = 0_F \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$$

donc $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$.
(ii) f est une surjection de E sur F : en effet, soit $y = \sum_{k=1}^{n} y_k \epsilon_k \in F$, $y \in \mathrm{Im}\ f$ car $y = f(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k)$. Donc $\mathrm{Im}\ f = F$. $\square$

La preuve précédente met en évidence le résultat suivant :

Remarque 2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ ev de* **même** *dimension finie. Une application linéaire de E dans F transformant une base de E en une base de F est bijective. De même (exercice), une application linéaire bijective de E dans F transforme une base de E en une base de F.*

Corollaire 1 *Tout $\mathbb{K}$ ev de dimension finie n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.*

Corollaire 2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ev de dimensions finies. Alors* $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim E \cdot \dim F$.
En particulier, $\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$.

Preuve. Posons $\dim E = p$ et $\dim F = n$. La preuve de ce résultat est une conséquence du lemme important suivant :

Lemme 1 *Soit B (resp. C) une base de E (resp. de F). Soit m : $\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & Mat_{B,C}(f) \end{array}$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*

Admettons provisoirement ce lemme. Comme $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes et $\boxed{\dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np}$,

$$\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = np = \dim E \cdot \dim F$$

Preuve du Lemme 1. (i) *m est linéaire.* Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$ et $a \in \mathbb{K}$. On sait que

$$Mat_{B,C}(af+g) = aMat_{B,C}(f) + Mat_{B,C}(g),$$

i.e $m(af+g) = am(f) + m(g)$.
(ii) *m est bijective.* Posons $B = (e_1, \cdots, e_p)$ et $C = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'unique antécédent de A par m est l'application linéaire f de E dans F telle que $\forall j = 1, \cdots, p$, $f(e_j) = a_{1j}\epsilon_1 + \cdots + a_{nj}\epsilon_n$. $\square$

3.2 Théorème du rang. Applications.

Proposition 7 *Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit E_1 un supplémentaire de* $\mathrm{Ker}\, f$ *dans E. Alors E_1 et* $\mathrm{Im}\ f$ *sont isomorphes.*

Preuve. Soit g : $\begin{array}{ccc} E_1 & \rightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$. Comme $f \in \mathcal{L}(E,F)$, $g \in \mathcal{L}(E_1, Imf)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\, g$. On a : $x \in \mathrm{Ker}\, f$ et $x \in E_1$ donc $x = 0_E$ (car $E_1 \cap \mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$) et g est injective. Soit $y \in \mathrm{Im}\ f$, alors $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Or $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ d'où $y = f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) = f(x_1) = g(x_1)$ donc $y \in \mathrm{Im}\ g$ et g est surjective. Donc g est un isomorphisme de E_1 sur $\mathrm{Im}\ f$. $\square$

Théorème 1 `[Théorème ou formule du rang]`.
Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie, F un $\mathbb{K}$ ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\ f = \dim \mathrm{Ker}\, f + rg(f).$$

Preuve. Utilisons les propositions 7 et 6. Comme E_1 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, f$ dans E, isomorphe à $\mathrm{Im}\ f$, on a $\dim E = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim E_1 = \dim \mathrm{Ker}\, f + \dim \mathrm{Im}\ f$. $\square$

Théorème 2 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ev de* **même** *dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

Preuve. Il suffit de prouver que f injective $\Leftrightarrow$ f surjective.
• Supposons f injective. Alors $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$ et $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$. Par le théorème du rang, $\dim F = \dim E = \dim \mathrm{Im}\ f$. Donc $\mathrm{Im}\ f = F$ car $\mathrm{Im}\ f$ est un sev de F, de même dimension que F. D'où f surjective.
•• Supposons f surjective. Alors $\mathrm{Im}\ f = F$ et $\dim \mathrm{Im}\ f = \dim F = \dim E$. Par le théorème du rang, $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}\, f = \{0_E\}$. Donc f est injective. $\square$

Corollaire 3 *Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

$$f \text{ est injective} \Leftrightarrow f \text{ est surjective} \Leftrightarrow f \text{ est bijective.}$$

La proposition bien connue suivante peut se démontrer en utilisant le théorème du rang :

Proposition 8 `[Formule de Grassmann]` *Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et F, G deux sev de E. Alors*

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

En particulier, $\dim(F+G) \leq \dim F + \dim G$.

Preuve. Soit $T : \begin{array}{ccc} F \times G & \to & F+G \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$. On vérifie facilement que T est linéaire. Par définition de $F+G$, T est surjective, i. e Im $T = F+G$ et donc $rg(T) = \dim(F+G)$. En outre, $\operatorname{Ker} T = \{(x,-x)/x \in F \cap G\}$. On vérifie aussi facilement que l'application $c : \begin{array}{ccc} F \cap G & \to & \operatorname{Ker} T \\ x & \mapsto & (x,-x) \end{array}$ est linéaire et bijective. Ainsi les espaces (isomorphes) $F \cap G$ et $\operatorname{Ker} T$ sont de même dimension. Il reste à appliquer le théorème du rang avec T, sachant que $\dim(F \times G) = \dim F + \dim G$ (cf. proposition5) :

$$\dim F + \dim G = \dim(F \times G) = \dim \operatorname{Ker} T + \dim \operatorname{Im} T = \dim(F \cap G) + \dim(F+G).$$

□

Proposition 9 *Soient E un $\mathbb{K}$ ev de dimension finie et $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. Alors $F_1 + \cdots + F_p$ est de dimension finie et :*

$$\dim(F_1 + \cdots + F_p) \leq \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$$

avec égalité si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe.

Preuve. Récurrence sur p ou utiliser le théorème du rang avec l'application linéaire (surjective) f de $F_1 \times \cdots \times F_p$ sur $F_1 + \cdots + F_p$ définie par :

$$f(x_1, \cdots, x_p) = x_1 + \cdots + x_p.$$

□

4 Rang d'une matrice.

Définition 5 *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A, noté $rg(A)$, est le rang de la famille des colonnes de A.*
Si $C_1, \cdots, C_p$ sont les p colonnes de A, $rg(A)$ est donc la dimension de $Vect(C_1, \cdots, C_p)$, sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 10 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $rg(A) \leq \min(n,p)$.

Proposition 11 *Soient E et F deux $\mathbb{K}$ev de dimensions finies, B (resp. C) une base de E (resp. de F).*
Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $A = Mat_{B,C}(f)$. Alors $rg(f) = rg(A)$.

Preuve. Notons $B = (e_1, \cdots, e_p)$, $C = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et pour tout $1 \leq j \leq p$, $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ la jième colonne de A.

Considérons $R : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to F$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \epsilon_i$. R est clairement un isomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sur F et, pour tout $1 \leq j \leq p$, $R(C_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \epsilon_i = f(e_j)$. Comme R est injective, la restriction de R au sev $Vect(C_1, \cdots, C_p)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme de $Vect(C_1, \cdots, C_p)$ sur son image

$$R(Vect(C_1, \cdots, C_p)) = Vect(R(C_1), \cdots, R(C_p)) = Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p)).$$

On a alors :

$$rg(f) = \dim Imf = \dim Vect(f(e_1), \cdots, f(e_p)) = \dim R(Vect(C_1, \cdots, C_p)) = \dim Vect(C_1, \cdots, C_p) = rg(A).$$

Enfin, on rappelle le résultat suivant :

Proposition 12 $\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *$rg(A^T) = rg(A)$.*

5 Interpolation de Lagrange.

Dans cette section, $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_0, \cdots, x_n$ sont $(n+1)$ scalaires *deux à deux distincts.*

Proposition 13 *Soit $(y_0, \cdots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que :*

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \ P(x_k) = y_k.$$

Preuve. Considérons l'application f de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X],\ f(P) = (P(x_0), \ldots, P(x_n)).$$

Il s'agit de prouver que $\forall (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\exists! P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que : $f(P) = (y_0, \ldots, y_n)$, en d'autres termes que f est bijective.

$\triangleright$ f est linéaire : soient $(P, Q) \in \mathbb{K}_n[X]^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P + Q) &= ((\alpha P + Q)(x_0), \ldots, (\alpha P + Q)(x_n)) = (\alpha P(x_0) + Q(x_0), \ldots, \alpha P(x_n) + Q(x_n)) \\ &= \alpha(P(x_0), \ldots, P(x_n)) + (Q(x_0), \ldots, Q(x_n)) = \alpha f(P) + f(Q). \end{aligned}$$

$\triangleright$ f est injective car $\operatorname{Ker} f$ ne contient que le polynôme nul. En effet, si $P \in \operatorname{Ker} f$, les $(n+1)$ scalaires $x_0, \cdots, x_n$ sont des racines de P et le polynôme nul est le seul polynôme, à coefficients dans $\mathbb{K}$, de degré au plus n ayant plus de n racines.

$\triangleright$ Comme $\dim \mathbb{K}_n[X] = n + 1 = \dim \mathbb{K}^{n+1}$, f est bien un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ sur $\mathbb{K}^{n+1}$ par le corollaire 3. □

Exercice 1. On note P l'unique polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in \{0, \cdots, n\}$, $P(k) = \dfrac{k}{k+1}$. Soit $Q(X) = (X+1)P(X) - X$.

1. Justifier l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que $Q(X) = cX(X-1)\cdots(X-n)$.

2. Montrer que $c = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

3. En déduire que $P(n+1) = \dfrac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}$.

Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Appliquons la proposition précédente avec $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $y_i = 1$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $y_j = 0$: il existe donc un unique polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$, noté L_i, tel que $L_i(x_i) = 1$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $L_i(x_j) = 0$.

Définition 6 `[Polynômes d'interpolation de Lagrange associés à la liste` $(x_0, \cdots, x_n)$ `de scalaires deux à deux distincts]`
La famille des polynômes de Lagrange associés à la liste $(x_0, \cdots, x_n)$ est l'unique famille $(L_0, \ldots, L_n)$ de $\mathbb{K}_n[X]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$:

$$L_i(x_i) = 1 \text{ et } \forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\},\ L_i(x_j) = 0.$$

Proposition 14 `[Expression des polynômes de Lagrange associés à la liste` $(x_0, \cdots, x_n)$ `de scalaires deux à deux distincts]`
Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$.

Preuve. Comme L_i est de degré au plus n et admet pour racines les n scalaires distincts x_j, $j \neq i$, il existe un unique $c \in \mathbb{K}^*$ tel que

$$L_i(X) = c \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} (X - x_j).$$

Or $L_i(x_i) = 1$ d'où $c = \dfrac{1}{\displaystyle\prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} (x_i - x_j)} = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j}$ et finalement

$$L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{1}{x_i - x_j} \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} (X - x_j) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n, \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

□

Proposition 15 *La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ des polynômes de Lagrange associés à la liste $(x_0, \cdots, x_n)$ de scalaires deux à deux distincts est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(x_k) L_k(X)$.*

Preuve. $\triangleright$ $\mathcal{L} = (L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. En effet, comme $\operatorname{card}(\mathcal{L}) = n + 1 = \dim \mathbb{K}_n[X]$, il suffit de prouver que $\mathcal{L}$ est libre :

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $a_0 L_0 + \cdots + a_n L_n = 0$, c'est-à-dire tel que $\forall x \in \mathbb{K}$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j L_j(x) = 0$. $(*)$

En considérant $x = x_i$ dans $(*)$, on obtient directement $a_i = 0$ car pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $L_i(x_i) = 1$ et $\forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{i\}$, $L_j(x_i) = 0$.

$\triangleright$ Décomposons $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $\mathcal{L}$: $\exists! (b_0, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P(X) = b_0 L_0(X) + \cdots + b_n L_n(X)$, c'est-à-dire tel que

$$\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j L_j(x). \ (**)$$

En considérant $x = x_k$ dans $(**)$, on obtient directement $P(x_k) = b_k$ car pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L_k(x_k) = 1$ et $\forall j \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, $L_j(x_k) = 0$.

□

Remarque 3 *En considérant $P(X) = 1$ dans la proposition précédente, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} L_k(X) = 1$.*

Exercice 2. Déterminer les trois polynômes de Lagrange L_1, L_2, L_3 associés à la liste $(1, 2, 3)$.
En déduire que l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que : $P(1) = 4$, $P(2) = -1$ et $P(3) = -2$ est le polynôme $P(X) = 2X^2 - 11X + 13$.