Réduction des endomorphismes et des matrices carrées.

1 Eléments propres.

1.1 Eléments propres d'un endomorphisme.

Définition 1 *Soient E un $\mathbb{K}$ev et $f \in \mathcal{L}(E)$.*

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de f s'il existe un vecteur x non nul de E tel que $f(x) = \lambda x$.

2. L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le spectre de f. Ce sous-ensemble de $\mathbb{K}$, noté en général $Sp_{\mathbb{K}}(f)$, peut être vide.

3. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$. Tout vecteur x non nul tel que $f(x) = \lambda x$ est appelé vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

*4. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$. Le noyau $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id_E) = \{x \in E / f(x) = \lambda x\}$ est appelé sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.
Ce sous-espace vectoriel de E, noté en général $E_\lambda(f)$, est donc la réunion de l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ et du singleton $\{0_E\}$.*

La proposition suivante est une conséquence immédiate de la linéarité de f :

Proposition 1 *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas injectif.
En particulier, $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(f)$ si et seulement si f n'est pas injectif.*

Remarque 1 *Supposons E de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :
a. λ est une valeur propre de f si et seulement si $\dim E_\lambda(f) \geq 1$.
b. λ est une valeur propre de f si et seulement si $f - \lambda Id_E$ n'est pas bijectif. En effet :
$f - \lambda Id_E$ est injectif ssi $f - \lambda Id_E$ est surjectif ssi $f - \lambda Id_E$ est bijectif.*

1.2 Eléments propres d'une matrice carrée.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A. Les éléments propres de A sont par définition les éléments propres de f. Autrement dit :

Définition 2 *1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A s'il existe une colonne X non nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ telle que $AX = \lambda X$.*

2. L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le spectre de A. Ce sous-ensemble de $\mathbb{K}$, noté en général $Sp_{\mathbb{K}}(A)$, peut être vide.

3. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$. Une colonne X non nulle telle que $AX = \lambda X$ est un(e) vecteur (colonne) propre de A associé(e) à la valeur propre λ.

4. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)$. Le sous-ensemble $\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\}$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. Ce sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, appelé aussi noyau de la matrice $A - \lambda I_n$ et noté en général $E_\lambda(A)$ ou encore $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, est donc la réunion de l'ensemble des vecteurs (colonnes) propres associé(e)s à la valeur propre λ et du singleton $\{0\}$ formé de la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Proposition 2 *Soient $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. λ est une valeur propre de A si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible, donc si et seulement si $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ou encore si et seulement si $rg(A - \lambda I_n) < n$. En particulier, $0 \in sp_{\mathbb{K}}(A)$ si et seulement si A n'est pas inversible, donc si et seulement si $\det(A) = 0$ ou si et seulement si $rg(A) < n$.*

Remarque 2 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on considérera dans certains cas les éléments propres complexes de A, en particulier $sp_{\mathbb{C}}(A)$.*

1.3 Sous-espaces vectoriels stables et endomorphismes induits.

Définition 3 *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
i) On dit que F est stable par f si $f(F) \subset F$, c'est-à-dire si $\forall u \in F$, $f(u) \in F$.
ii) Si F est stable par f, l'endomorphisme f_F de F défini par : $\forall u \in F$, $f_F(u) = f(u)$ est appelé endomorphisme induit par f sur F.*

Remarque 3 *1. $\{0_E\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.*

2. Ne pas confondre endomorphisme induit avec la notion plus générale de restriction : la restriction $g \in \mathcal{L}(F, E)$ de f à un sev F de E (pas nécessairement stable par f) est l'application linéaire de F dans E définie par : $\forall x \in F$, $g(x) = f(x)$.

Lemme 1 *Soient F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base (ou une famille génératrice) de F, et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Alors F est stable par f si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) \in F$.*

Preuve. $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x = x_1e_1 + \cdots = x_pe_p \in F$. Par linéarité de f, $f(x) = x_1f(e_1) + \cdots + x_pf(e_p) \in F$ comme combinaison linéaire de vecteurs du sev F. $\square$

Proposition 3 `[Traduction matricielle de la stabilité]` *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base adaptée à F, c'est-à-dire telle que $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par f si et seulement si sa matrice dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par blocs, c'est-à-dire de la forme :*

$$Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.
$\triangleright$ Dans ce cas, A est la matrice dans la base $\mathcal{B}' = (e_1, \ldots, e_p)$ de F de f_F.

Preuve. D'après le lemme précédent, $F = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$ est stable par f si et seulement si $\forall i \in [\![1, p]\!]$, $f(e_i) \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, autrement dit si et seulement si les p premières colonnes de $Mat_{\mathcal{B}}(f)$ ont leurs $n - p$ derniers coefficients nuls. $\square$

Proposition 4 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.*

Preuve. *i*) Soit $D = \mathrm{Vect}(a)$ une droite stable par f (où a un vecteur non nul de E). Comme $a \in D$, $f(a) \in D$, donc $f(a)$ est colinéaire à a : il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$. En d'autres termes, a est un vecteur propre de f pour la valeur propre λ.
ii) Soit a un vecteur propre de f, associé à la valeur propre λ. Posons $\Delta = \mathrm{Vect}(a)$. Considérons u un vecteur quelconque de Δ. Il existe $k \in \mathbb{K}$ tel que $u = ka$ et, f étant linéaire, on a : $f(u) = kf(a) = k\lambda a \in \Delta$. Donc Δ est stable par f. $\square$

Proposition 5 *Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Alors :*
i) $\mathrm{Ker}\, f$ *et* $\mathrm{Im}\, f$ *sont stables par g,*
ii) *chaque sous-espace propre de f (resp. de g) est stable par g (resp. par f).*

Preuve. *i*) Soit $x \in \mathrm{Ker}\, f$: $g(x) \in \mathrm{Ker}\, f$ car $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0_E) = 0_E$. Donc $\mathrm{Ker}\, f$ est stable par g.
Soit $y \in \mathrm{Im}\, f$: il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}\, f$. Donc $\mathrm{Im}\, f$ est stable par g.
ii) Soient λ une valeur propre de f et $u \in E_\lambda(f)$, c'est-à-dire tel que $f(u) = \lambda u$. Alors $g(u) \in E_\lambda(f)$ car

$$f(g(u)) = g(f(u)) = g(\lambda u) = \lambda g(u).$$

$\square$

1.4 Exercices.

1. Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $T \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall f \in E$, $T(f) = f'$. Déterminer les éléments propres de T.
2. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$.
3. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les éléments propres de f. A est-elle semblable à une matrice diagonale D? Si oui, déterminer $D \in D_3(\mathbb{R})$ et $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.
4. Déterminer les éléments propres réels et complexes de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
5. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
6. On pose, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = M^T + 2M$. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et déterminer ses éléments propres.
7. Existe-t-il $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ soit un vecteur propre de la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$?
8. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit f l'application de E dans E associant à chaque suite u de E la suite $v = (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. Vérifier que f est un endomorphisme de E et déterminer ses éléments propres.

2 Polynôme d'endomorphisme (resp. d'une matrice carrée).

2.1 Généralités.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Rappelons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^k = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{k\,fois}$ et que $f^0 = Id_E$.

Définition 4 *Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p \in \mathbb{K}[X]$.*
a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $P(f)$ l'endomorphisme $a_0 Id_E + a_1 f + \cdots + a_p f^p$.
On dit que $P(f)$ est un polynôme d'endomorphisme (en l'endomorphisme f).
b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $P(A)$ la matrice $a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_p A^p$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (avec la convention $A^0 = I_n$).
On dit que $P(A)$ est un polynôme de matrice ou matriciel (en la matrice A).

Proposition 6 *Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :*
a. $(P + Q)(f) = P(f) + Q(f)$ (resp. $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$)
b. $(PQ)(f) = P(f) \circ Q(f)$ (resp. $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$).

Remarque 4 *Comme $(PQ)(f) = (QP)(f)$, on a $P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$.*
En d'autres termes, deux polynômes en f commutent. Idem, deux polynômes en la même matrice carrée A commutent.

Proposition 7 *Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \in \mathcal{L}(E)$, λ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé à λ.*
Alors $P(f)(x) = P(\lambda)x$. En particulier, $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^k(x) = \lambda^k x$.

2.2 Polynôme annulateur.

Définition 5 *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Notons θ l'endomorphisme nul de E.*
a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que P est un polynôme annulateur de f si et seulement si $P(f) = \theta$, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall x \in E,\ P(f)(x) = 0_E.$$

b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que P est un polynôme annulateur de A si et seulement si $P(A) = 0$.

Remarque 5 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Le polynôme nul est évidemment annulateur de f (resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) mais ce n'est pas un polynôme annulateur très intéressant. En revanche, connaître un polynôme annulateur non nul de f (resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) permet de localiser le spectre de f (resp. de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).*

Plus précisement :

Proposition 8 *a. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Une valeur propre de f est nécessairement une racine de P. En d'autres termes, si $\lambda \in sp_{\mathbb{K}}(f)$, alors $P(\lambda) = 0$.*
b. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de A. Une valeur propre de A est nécessairement une racine de P. En d'autres termes, si $\lambda \in sp_{\mathbb{K}}(A)$, alors $P(\lambda) = 0$.

Preuve. a. Soient $\lambda \in sp_{\mathbb{K}}(f)$ et x un vecteur propre de f associé à λ. D'après la proposition précédente :

$$0_E = \theta(x) = P(f)(x) = P(\lambda)x$$

d'où $P(\lambda) = 0$ car $x \neq 0_E$.
b. Démonstration analogue en considérant une colonne propre X associée à $\lambda \in sp_{\mathbb{K}}(A)$. □

Proposition 9 *a. Toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.*
b. Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f admet au moins un polynôme annulateur non nul.

Preuve. a. Notons $N = n^2$. La famille $\mathcal{F} = (I_n, A, \cdots, A^N)$ est une famille liée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car $\mathcal{F}$ est de cardinal $n^2 + 1 > \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$. Il existe donc des scalaires $a_0, \cdots, a_N$ non tous nuls tels que $a_0 I_n + \cdots + a_N A^N = 0$. Le polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ est alors un polynôme annulateur non nul de A.
b. Soit $n = \dim E$. Notons $N = n^2 = \dim \mathcal{L}(E)$. Démonstration analogue en considérant la famille $(Id_E, f, \cdots, f^N)$ qui est une famille liée de $\mathcal{L}(E)$. □

Exemple. (cf. Exercice 5. de 1. 4.) Déterminer un polynôme annulateur et le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

3 Somme de sous-espaces propres.

Théorème 1 *Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ p valeurs propres distinctes de $f \in \mathcal{L}(E)$.*
Les sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}(f), \ldots, E_{\lambda_p}(f)$ sont en somme directe.

Preuve. Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_p}(f)$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$. Soit $j \in \{1, \ldots, p\}$.
Considérons : $f_j = P_j(f)$ avec $P_j(X) = \prod_{1 \leq i \leq p,\, i \neq j} (X - \lambda_i)$. Soit $l \in \{1, \ldots, p\}$. D'après la proposition 7, comme $f(x_l) = \lambda_l x_l$, on a :

$$f_j(x_l) = P_j(x_l) = P_j(\lambda_l) x_l.$$

Donc, pour tout $l \in \{1, \dots, p\} \setminus \{j\}$, $f_j(x_l) = 0_E$, et $f_j(x_j) = C_j x_j$ avec $C_j = P_j(\lambda_j) = \prod_{i \neq j}(\lambda_j - \lambda_i)$. D'où par linéarité de f_j :

$$0_E = f_j(x_1 + \cdots + x_p) = f_j(x_j) = C_j x_j$$

et finalement $x_j = 0$ car $C_j \neq 0$. $\square$

Remarque : $(\frac{1}{C_1}P_1, \dots, \frac{1}{C_p}P_p)$ est la famille des polynômes de Lagrange associés à la liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$.

Corollaire 1 *Toute famille de vecteurs propres de $f \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres distinctes est libre.*

Corollaire 2 *Soient E un $\mathbb{K}$ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f admet au plus* $\dim E$ *valeurs propres distinctes.*

Preuve. Utilisons les notations du théorème précédent. On sait que la somme des sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(f), \cdots, E_{\lambda_p}(f)$ est directe. Posons $F = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$. F est donc un sev de E dont la dimension est supérieure ou égale à p car chaque sous-espace propre est de dimension supérieure ou égale à 1. Par conséquent, on a $p \leq \dim F \leq \dim E$ et donc $p \leq \dim E$. $\square$

4 Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme.

4.1 Généralités

Définition 6 *Le polynôme caractéristique χ_A de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est défini par :*

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

ou, en considérant la fonction polynôme associée à χ_A, par :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Remarque. Par propriété du déterminant, $\chi_A(X) = \det(-(A - XI_n)) = (-1)^n \det(A - XI_n)$.
Donc si n est pair, $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$, et, si n est impair, $\chi_A(X) = -\det(A - XI_n)$.

Exemple 1. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X - a & -c \\ -b & X - d \end{vmatrix} = (X - a)(X - d) - bc = X^2 - (a + b)X + ad - bc = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det A.$$

L'exemple précédent montre que le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est un polynôme unitaire de degré 2. On admet pour l'instant la proposition suivante :

Proposition 10 *Le polynôme caractéristique de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un polynôme de degré n, à coefficients dans $\mathbb{K}$, dont le terme de plus haut degré est X^n (on dit que χ_A est unitaire).*

Remarque. Le terme constant du polynôme χ_A est $(-1)^n \det(A)$ car $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$.

La proposition suivante est fondamentale :

Proposition 11 `[Valeurs propres et polynôme caractéristique]`
Les valeurs propres de A sont les racines de son polynôme caractéristique.

Preuve. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A) \Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$. $\square$

Corollaire 3 *Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.*

Preuve. Soit $T = (t_{ij})$ une matrice triangulaire d'ordre n et $x \in \mathbb{K}$. La matrice $xI_n - T$ est triangulaire, de coefficients diagonaux $x - t_{11}, \cdots, x - t_{nn}$. Donc $\chi_T(x) = \det(xI_n - T) = (x - t_{11}) \cdots (x - t_{nn})$ (qui est bien de degré n). Et comme le spectre de T est constitué des racines de χ_T, on a donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(T) = \{t_{11}, \cdots, t_{nn}\}$. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\chi_A(x) = (x - 1)(x - 2)^2$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$. $\square$

Exemple 2. Soit $B = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Comme $XI_4 - B$ est une matrice diagonale par blocs, on a :

$$\chi_B(X) = \det(XI_4 - B) = \begin{vmatrix} XI_2 - A & 0_2 \\ 0_2 & XI_2 - A \end{vmatrix} = \det(XI_2 - A)^2 = (X^2 + 1)^2 = (X - i)^2(X + i)^2.$$

D'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{-i, i\}$.

Proposition 12 `[Nombre de valeurs propres d'une matrice carrée]`

1. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.*
2. *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ admet au moins une valeur propre complexe, autrement dit $Sp_{\mathbb{C}}(A) \neq \emptyset$.*
3. *Si n est impair, une matrice de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ admet au moins une valeur réelle, autrement dit $Sp_{\mathbb{R}}(A) \neq \emptyset$.*

Preuve. 1. En effet, les valeurs propres de A sont les racines de χ_A et χ_A admet au plus n racines distinctes dans $\mathbb{K}$ car χ_A est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré n.

2. Comme tout polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$, χ_A admet au moins une racine complexe λ (théorème de D'Alembert-Gauss) et cette racine λ est une valeur propre de A.

3. On a : $\chi_A(x) \underset{x \to -\infty}{\sim} x^n$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \chi_A(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ car n est impair. Donc il existe $x_1 < 0$ tel que $\chi_A(x) < 0$. De même il existe $x_2 > 0$ tel que $\chi_A(x_2) > 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \chi_A(x) = +\infty$. Comme la fonction polynôme χ_A est continue sur $[x_1, x_2]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_3 \in]x_1, x_2[$ tel que $\chi_A(x_3) = 0$ et x_3 est une valeur propre réelle de A. $\square$

Proposition 13 `[Transposée]` *Une matrice carrée et sa transposée ont le même polynôme caractéristique (et donc le même spectre).*

Preuve. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $x \in \mathbb{K}$. Une matrice carrée et sa transposée ayant le même déterminant, on a, par linéarité de la transposition :

$$\chi_{{}^tA}(x) = \det(xI_n - {}^tA) = \det({}^t(xI_n - {}^tA)) = \det(xI_n - A) = \chi_A(x).$$

$\square$

Proposition 14 `[Matrices semblables]` *Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique (et donc le même spectre).*

Preuve. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, semblables. Soit $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on a :

$$\chi_B(x) = \det(xI_n - B) = \det(P^{-1}(xI_n - A)P) = \det(P^{-1})\chi_A(x)\det(P) = \chi_A(x).$$

$\square$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On sait que les matrices de f dans deux bases différentes de E sont semblables. La définition suivante est alors justifiée par la proposition précédente :

Définition 7 *Le polynôme caractéristique χ_f de $f \in \mathcal{L}(E)$ est celui de sa matrice dans une base quelconque de E.*

Exemple 3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, de dimensions respectives p et q. Soit s la symétrie vectorielle par rapport à F, de direction G. Soit $\mathcal{B}_F$ une base de F et $\mathcal{B}_G$ une base de G. Alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de E et dans cette base $\mathcal{B}$, la matrice de f est la matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{p\,fois}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{q\,fois})$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_s(x) = \chi_D(x) = \det(xI_n - D) = \det(\mathrm{diag}(\underbrace{x-1, \cdots, x-1}_{p\,fois}, \underbrace{x+1, \cdots, x+1}_{q\,fois})) = (x-1)^p(x+1)^q.$$

4.2 Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 8 *L'ordre de multiplicité d'une valeur propre d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme est son ordre de multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique. Une valeur propre d'ordre de multiplicité égal à* 1 *(resp.* 2*) est appelée valeur propre simple (resp. valeur propre double).*

Rappel sur l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme. Soit P un polynôme et a une racine de P. L'ordre de multiplicité de a (ou plus simplement l'ordre ou la multiplicité de a) est le plus grand entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^k$ divise P : a est une racine d'ordre de multiplicité k si $(X-a)^k$ divise P et $(X-a)^{k+1}$ ne divise pas P.
La formule de Taylor conduit à la caractérisation suivante : a est une racine d'ordre k de P si et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0 \quad \text{et } P^{(k)}(a) \neq 0.$$

En particulier, a est racine d'ordre au moins k de P ssi $(X-a)^k$ divise P ou ssi $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$.

Exemple 4. La matrice $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ de *l'exemple 2.* ci-dessus n'a pas de valeur propre réelle. Elle admet deux valeurs propres complexes conjuguées i et $-i$ chacune d'ordre de multiplicité 2 (doubles). Plus généralement, on a la propriété suivante :

Proposition 15 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et λ une valeur propre complexe non réelle de A. Alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A de même ordre de multiplicité que λ.*

Preuve. Soit k l'ordre de λ. D'après le rappel précédent, on a : $\chi_A(\lambda) = \chi'_A(\lambda) = \cdots = \chi_A^{(k-1)}(\lambda) = 0$ et $\chi_A^{(k)}(\lambda) \neq 0$. Rappelons que si $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}$, $P(\bar{z}) = a_0 + a_1\bar{z} + \cdots + a_n\bar{z}^n = \overline{a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n} = \overline{P(z)}$ $(*)$ par propriétés de la conjugaison. En utilisant l'égalité précédente $(*)$ avec les polynômes à coefficients réels $\chi_A, \cdots, \chi_A^{(k)}$, on obtient : $\chi_A(\bar{\lambda}) = \chi'_A(\bar{\lambda}) = \cdots = \chi_A^{(k-1)}(\bar{\lambda}) = 0$ et $\chi_A^{(k)}(\bar{\lambda}) \neq 0$, donc $\bar{\lambda}$ est bien une valeur propre de A d'ordre k. $\square$

Proposition 16 *Soit λ une valeur propre de $f \in \mathcal{L}(E)$, d'ordre de multiplicité m_λ, et de sous-espace propre associé $E_\lambda(f)$. On a :*

$$1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq m_\lambda.$$

Preuve. Soit $d = \dim E_\lambda(f) \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \cdots, e_d)$ une base de $E_\lambda(f)$ et $(e_{d+1}, \cdots, e_n)$ une base d'un supplémentaire de $E_\lambda(f)$. Alors $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E et dans cette base la matrice A de f s'écrit : $A = \begin{pmatrix} \lambda I_d & U \\ O & V \end{pmatrix}$ avec $U \in \mathcal{M}_{d,n-d}(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{K})$ car $f(e_1) = \lambda e_1, \cdots, f(e_d) = \lambda e_d$, les $n-d$ autres images $f(e_{d+1}), \cdots, , f(e_n)$ étant des vecteurs de E sur lesquels on n'a pas de renseignements particuliers. D'où, par déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \det(xI_n - A) = \det \begin{pmatrix} (x-\lambda)I_d & -U \\ O & xI_{n-d} - V \end{pmatrix} = (x-\lambda)^d \chi_V(x).$$

Et $\chi_A(X)$ étant divisible par $(X-\lambda)^d$, l'ordre de multiplicité de λ est donc au moins égal à d. □

• En particulier, si $m_\lambda = 1$, $\dim E_\lambda(f) = 1$ car $1 \leq \dim E_\lambda(f) \leq 1$! On retient le :

Corollaire 4 *Soit λ une valeur propre simple de $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $E_\lambda(f)$ est une droite vectorielle de E.*

La démonstration du théorème important suivant n'est pas exigible :

Théorème 2 `[Théorème de Cayley-Hamilton]` *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
Le polynôme caractéristique de f est un polynôme annulateur de f : $\chi_f(f) = \theta$.
Le polynôme caractéristique de A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = O_n$.

5 Diagonalisation

5.1 Endomorphisme et matrice carrée diagonalisable

Définition 9 *1. On dit que $f \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable si E est la somme (directe) des sous-espaces propres de f.*
2. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Proposition 17 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
a) f est diagonalisable,
b) La somme des dimensions des sous-espaces propres de E est égale à la dimension de E,
c) Il existe une base de E formée de vecteurs propres de f,
d) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Preuve. Notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f où $p \in [\![1, n]\!]$ et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $E_k = E_{\lambda_k}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id_E)$.
a) $\Rightarrow$ *b)* Par définition de f diagonalisable, $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ donc $\dim E = \dim(E_1 \oplus \cdots \oplus E_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$.
b) $\Rightarrow$ *c)* Supposons que $\dim E = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p$. Considérons $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$: F est un sous-espace vectoriel de E, de même dimension que E car $\dim F = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p = \dim E$. D'où $F = E$. On vient en fait de montrer que *b)* $\Rightarrow$ *a)*.
Considérons $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $E_1, \cdots, E_p$. Vérifions que la famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$, constituée de vecteurs propres de f, est une base de E. Comme $\mathrm{card}(\mathcal{B}) = \mathrm{card}(\mathcal{B}_1) + \cdots + \mathrm{card}(\mathcal{B}_p) = \dim E_1 + \cdots + \dim E_p = \dim E$, il suffit de prouver que cette famille est génératrice : soit $u \in E$. D'après *a)* il existe $u_1 \in E_1, \cdots, u_p \in E_p$ tels que $u = u_1 + \cdots + u_p$. Comme pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $u_k \in E_k$ est une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_k$, u est donc finalement une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}$ est bien une famille génératrice de E.
c) $\Rightarrow$ *d)* Soit $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f. Soit $j \in [\![1, n]\!]$. Comme ε_j est un vecteur propre de f, il existe $\alpha_j \in \mathbb{K}$ tel que $f(\varepsilon_j) = \alpha_j \varepsilon_j$ (et α_j est une valeur propre de f). La matrice de f dans la base (ε) est la matrice diagonale : $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$.
d) $\Rightarrow$ *a)* Soit $(e') = (e'_1, \cdots, e'_n)$ une telle base. Chaque vecteur de cette base est un vecteur propre de f et appartient donc à l'un des p sous-espaces propres $E_1, \cdots, E_p$. Tout vecteur u de E, étant combinaison linéaire des vecteurs $e'_1, \cdots, e'_n$, s'écrit donc $u_1 + \cdots + u_p$ avec $u_1 \in E_1, \cdots, u_p \in E_p$. Autrement dit, $E = E_1 + \cdots + E_p$, et finalement $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ car on sait que la somme $E_1 + \cdots + E_p$ est directe. □

Corollaire 5 *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.*

Preuve. L'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est par hypothèse diagonalisable. D'après le *d)* de la proposition précédente, il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle la matrice de f est une matrice diagonale D. Donc A et D sont semblables car si P est la matrice de passage de la base canonique à cette base $\mathcal{B}$, on a : $D = P^{-1}AP$. □

Remarques importantes : 1. A est donc diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que : $D = P^{-1}AP$ ou $A = PDP^{-1}$. Lorsque A est diagonalisable et que l'on a déterminé D et P, on dit que l'on a diagonalisé (ou réduit) A. Les matrices D et P ne sont pas uniques.

2. `[Puissances d'une matrice diagonalisable]` Si A est diagonalisable, l'égalité $A = PDP^{-1}$ permet de calculer les puissances entières de A : on vérifie facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = PD^kP^{-1}$.

Corollaire 6 `[Condition suffisante de diagonalisation]`

1. Si f admet $\dim E$ valeurs propres distinctes, alors chaque sous-espace propre de f est de dimension 1 et f est diagonalisable.

2. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors chaque sous-espace propre de A est de dimension 1 et A est diagonalisable.

Preuve. 1. Notons $n = \dim E$; $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les n valeurs propres distinctes de f et, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E_k = E_{\lambda_k}(f) = \mathrm{Ker}(f - \lambda_k Id_E)$ (de dimension ≥ 1). Supposons que l'un de ces sous-espaces propres soit de dimension au moins égale à 2. Soit $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim F = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n \geq n+1 > \dim E$ ce qui est impossible. Donc chaque sous-espace propre de f est bien de dimension 1 et f est diagonalisable d'après le *b*) de la proposition 17 car $\dim E = n = \dim E_1 + \cdots + \dim E_n$.
2. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A et on utilise 1. sachant que $\dim E_{\lambda_k}(A) = \dim E_{\lambda_k}(f)$. □

Exemple 5. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de f.
2. Justifier que f est diagonalisable et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Proposition 18 `[CNS de diagonalisation]`

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et si, pour chaque valeur propre λ de f, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est égale à l'ordre de multiplicité m_λ de la valeur propre :

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f), \dim E_\lambda(f) = m_\lambda.$$

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et si, pour chaque valeur propre λ de A, la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$ est égale à l'ordre de multiplicité m_λ de la valeur propre :

$$\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A), \dim E_A(f) = m_\lambda.$$

Preuve. 1. *i*) Supposons f diagonalisable avec $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f et $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $\dim E_{\lambda_k}(f) = d_k$. Soient $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_p$ des bases respectives de $E_{\lambda_1}, \cdots, E_{\lambda_p}$. La famille $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$ et dans $\mathcal{B}$, la matrice de f est la matrice diagonale par blocs : $D = \mathrm{diag}(\lambda_1 I_{d_1}, \cdots, \lambda_p I_{d_p})$. Donc

$$\chi_f(X) = \chi_D(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{d_k}.$$

Le polynôme caractéristique de f est bien scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et pour chaque valeur propre λ_k de f, l'ordre de multiplicité de λ_k est effectivement égal à la dimension d_k du sous-espace propre $E_{\lambda_k}(f)$.
ii). Supposons que le polynôme caractéristique de f soit scindé dans $\mathbb{K}[X]$ et que $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(f), \dim E_\lambda(f) = m_\lambda$. Soit $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f. On a donc $\chi_f(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$ et comme χ_f est un polynôme de degré n,

$$\dim E = n = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k} = \sum_{k=1}^{p} d_k.$$

Donc f est diagonalisable par le *b*) de la proposition 17.
2. Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à A et utiliser 1. □

Le théorème important suivant donne une autre condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité utilisant non plus le polynôme caractéristique mais plus généralement les polynômes annulateurs :

Théorème 3 `[Diagonalisabilité et polynômes annulateurs]` *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors :*

f est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de f qui est scindé et à racines simples.

Plus précisement :

1. Si f est diagonalisable, alors $P(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

2. S'il existe un polynôme annulateur de f scindé à racines simples, alors f est diagonalisable.
• *Résultats analogues avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en considérant l'endomorphisme canoniquement associé à A.*

Preuve. 1. Supposons f diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Soit $P(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda) = (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$.

Soit $x \in E$. Montrons que $P(f)(x) = 0_E$. Comme $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$, $\exists! (x_1, \cdots, x_p) \in E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_p}(f)$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$.
Comme $P(f) \in \mathcal{L}(E)$, il suffit de prouver que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $P(f)(x_i) = 0_E$ car $P(f)(x) = P(f)(x_1) + \cdots + P(f)(x_p)$.
Et c'est bien le cas : $P(X) = Q_i(X)(X - \lambda_i)$ avec $Q_i(X) = \prod_{j \neq i} (X - \lambda_j)$, $P(f) = Q_i(f) \circ (f - \lambda_i Id_E)$ d'où :

$$P(f)(x_i) = Q_i(f)(f(x_i) - \lambda x_i) = Q_i(f)(0_E) = 0_E.$$

2. Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ des scalaires deux à deux distincts. Supposons que le polynôme scindé à racines simples $U(X) = (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_r)$ annule f et montrons que f est diagonalisable. Remarquons d'abord que :

• L'un au moins de ces scalaires est une valeur propre de f sinon, pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, l'endomorphisme $f - \alpha_i Id_E$ serait injectif ce qui impliquerait, par composition d'injections, que $U(f)$ serait injectif ce qui est faux car $U(f) = \theta$.

• Si α_j n'est pas une valeur propre de f, l'endomorphisme $f - \alpha_j Id_E$ est bijectif. Posons $U_j(X) = \prod_{i \neq j}(X - \alpha_i)$.

On a : $U_j(f) = (f - \alpha_j Id_E)^{-1} U(f) = (f - \lambda_j Id_E)^{-1} \circ \theta = \theta$ donc le polynôme U_j annule f.

• Posons $\mathrm{Sp}(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p\}$. Comme U est un polynôme annulateur de f, on sait que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$. Les remarques précédentes montrent que l'on peut considérer $(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ à la place de U. En d'autres termes on est ramené à prouver que si le polynôme $(X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ annule f, alors f est diagonalisable.

Considérons maintenant la famille $(L_1, \ldots, L_p)$ des polynômes de Lagrange associés à la liste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

Comme $\sum_{i=1}^{p} L_i(X) = 1$, on a : $Id_E = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)$. Soit $x \in E$. On a donc : $x = \sum_{i=1}^{p} L_i(f)(x)$. Posons $x_i = L_i(f)(x)$. On constate que $x_i \in E_{\lambda_i}(f)$ car $(f - \lambda_i Id_E)(x_i) = \underbrace{((f - \lambda_i Id_E) \circ L_i(f))}_{A(f)}(x) = 0_E$ avec $A(X) = (X - \lambda_i) L_i(X) = c_i (X - \lambda_1) \ldots (X - \lambda_p)$ annulateur de f

où $c_i = \dfrac{1}{\prod_{j \neq i}(\lambda_j - \lambda_i)}$. Ainsi $E = \sum_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$ et cette somme est directe par le théorème 1. □

La preuve du théorème précédente montre que l'on peut reformuler les résultats précédents de la façon suivante :

Proposition 19 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

La matrice A est diagonalisable si et seulement si $\prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de f.

Exemple 6. Un projecteur (resp. une involution) est un endomorphisme diagonalisable car il est annulé par le polynôme $X^2 - X$ (resp. $X^2 - 1$) scindé à racines simples.

Exemple 7. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = Id_E$ $(*)$. Comme le polynôme $X^3 - 1 = (X-1)(X-j)(X-j^2)$ est un polynôme annulateur de f, scindé à racines simples $1, j, j^2$, f est diagonalisable. De plus $Sp_{\mathbb{C}}(f) \subset \{1, j, j^2\}$ et cette inclusion peut ne pas être une égalité : par exemple, Id_E vérifie $(*)$ et $Sp_{\mathbb{C}}(f) = \{1\}$.

Exemple 8. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. La matrice triangulaire $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ admet pour spectre (réel) $\{-1, 1\}$. D'après le théorème précédent, A est diagonalisable si et seulement si $(X-1)(X+1) = X^2 - 1$ est un polynôme annulateur de A, c'est-à-dire si $A^2 = I_3$. Comme $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & ac \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, A est donc diagonalisable si et seulement si $a = 0$.

Proposition 20 *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Alors l'endomorphisme f_F induit par f sur F est un endomorphisme diagonalisable de F.*

Preuve. D'après le théorème 3, f admet un polynôme annulateur P scindé à racines simples. On a donc $\forall x \in E$, $P(f)(x) = 0_E$.
En particulier, $\forall x \in F$, $P(f)(x) = 0_E = 0_F$. Si $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d$, on a clairement :

$$\forall x \in F,\ P(f_F)(x) = a_0 x + a_1 f_F(x) + \cdots + a_d f_F^d(x) = a_0 x + a_1 f(x) + \cdots + a_d f^d(x) = P(f)(x).$$

Donc P est aussi un polynôme annulateur de f_F et comme P scindé à racines simples, f_F est diagonalisable d'après le théorème 3. □

6 Trigonalisation

Définition 10 *1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est trigonalisable s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire.*
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si A est semblable à une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarques. i) $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable ssi l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable.
ii) Si la matrice de f dans une base $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ est triangulaire supérieure, on montre sans difficultés que la matrice de f dans la base $(\varepsilon_n, \cdots, \varepsilon_1)$ est triangulaire inférieure.

Proposition 21 `[CNS de trigonalisation]`
1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est trigonalisable si et seulement si χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

Preuve. 1. Supposons f trigonalisable. Soit $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$ une base de E dans laquelle la matrice $T = (t_{ij})$ de f est triangulaire. Alors χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ car $\chi_f(X) = \chi_T(X) = (x - t_{11}) \cdots (x - t_{nn})$ (voir le corollaire 3). La réciproque est admise (démonstration hors programme).
2. Considérer l'endomorphisme canoniquement associé à A et utiliser 1. □

• Comme tout polynôme non constant à coefficients complexes (ou réels) est scindé sur $\mathbb{C}$, on en déduit que :

Corollaire 7 `[Trigonalisabilité dans` $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$`]`
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (a fortiori de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Remarque. On en déduit que le polynôme caractéristique d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est bien **de degré** n (cf. Proposition 10) car c'est le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire T semblable à A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Proposition 22 `[Trace, déterminant et valeurs propres complexes]`
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, admettant p valeurs propres complexes $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$, d'ordres de multiplicité respectifs $m_{\lambda_1}, \cdots, m_{\lambda_p}$.
On a : $\operatorname{tr}(A) = m_{\lambda_1}\lambda_1 + \cdots + m_{\lambda_p}\lambda_p = \sum_{k=1}^{p} m_{\lambda_k}\lambda_k$ *et* $\det(A) = \lambda_1^{m_{\lambda_1}} \dots \lambda_p^{m_{\lambda_p}} = \prod_{k=1}^{p} \lambda_k^{m_{\lambda_k}}$.

Preuve. A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire T sur la diagonale de laquelle on trouve m_{λ_1} fois λ_1, $\cdots$, m_{λ_p} fois λ_p car $\chi_T(X) = \chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$. Or deux matrices semblables ont même trace et même déterminant, donc $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(T) = m_{\lambda_1}\lambda_1 + \cdots + m_{\lambda_p}\lambda_p$ et $\det(A) = \det(T) = \lambda_1^{m_{\lambda_1}} \dots \lambda_p^{m_{\lambda_p}}$. ☐

Corollaire 8 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On a :* $\chi_A(X) = X^n - \operatorname{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Preuve. Il reste à vérifier que le coefficient de X^{n-1} dans $\chi_A(X)$ est $-\operatorname{tr}(A)$.
Rappel. Soit $P(X) = (X - x_1) \cdots (X - x_n)$ avec $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{K}$.
On montre par récurrence sur n que le coefficient de X^{n-1} de $P(X)$ est : $-(x_1 + \cdots + x_n)$.
Reprenons les notations de la preuve précédente. On a :

$$\chi_A(X) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}} = \underbrace{(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_1)}_{m_{\lambda_1}\ fois} \cdots \underbrace{(X - \lambda_p) \cdots (X - \lambda_p)}_{m_{\lambda_p}\ fois}.$$

Il suffit d'utiliser le résultat du rappel avec $P(X) = \chi_A(X)$ et la proposition précédente. ☐