Somme de sous-espaces vectoriels.

Dans ce chapitre, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel dont le vecteur nul est noté 0_E et p un entier supérieur ou égal à 2.

1 Somme de p sous-espaces vectoriels.

Définition 1 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. On appelle somme des sev $F_1, \cdots, F_p$ le sous-ensemble de E formé des vecteurs x de E pouvant s'écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ avec, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $x_i \in F_i$. Ce sous-ensemble de E est noté $F_1 + \cdots + F_p$ ou $\sum_{i=1}^{p} F_i$. Donc :*

$$x \in F_1 + \cdots + F_p \Leftrightarrow \exists (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ tel que } x = x_1 + \cdots + x_p.$$

Proposition 1 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. Alors $F_1 + \cdots + F_p$ est un sev de E.*

Preuve. Posons $F = F_1 + \cdots + F_p$. F est non vide car $0_E \in F$: $0_E = \underbrace{0_E}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{0_E}_{\in F_p}$. Considérons $x, y \in F$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Soient $(x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ et $(y_1, \cdots, y_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tels que $x = x_1 + \cdots + x_p$ et $y = y_1 + \cdots + y_p$. Alors

$$\alpha x + y = (\alpha x_1 + y_1) + \cdots + (\alpha x_p + y_p) \in F$$

car, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $\alpha x_i + y_i \in F_i$ sachant que $x_i, y_i \in F_i$ et F_i est un sev de E. □

Remarque 1 *Il faut bien faire la différence entre la somme $F_1 + \cdots + F_p$ et l'union $F_1 \cup \cdots \cup F_p$ qui n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E. Vérifier par exemple, par l'absurde, que si F et G sont deux sev distincts de E, $F \cup G$ n'est pas un sev de E.*

Proposition 2 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. Alors $F_1 + \cdots + F_p$ est le plus petit sev de E (au sens de l'inclusion) contenant $F_1, \cdots, F_p$, autrement dit $F_1 + \cdots + F_p = \mathrm{Vect}(F_1 \cup \cdots \cup F_p)$.*

Preuve. On sait déjà que $F_1 + \cdots + F_p$ est un sev de E (cf. Proposition 1). Soit F un sev de E contenant $F_1, \cdots, F_p$. F contient alors toutes les sommes $x_1 + \cdots + x_p$ avec, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $x_i \in F_i$ donc F contient $F_1 + \cdots + F_p$. □

Exemple. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient $u = (1, 0, 1)$, $u' = (1, 1, 0)$, $D = \mathrm{Vect}(u)$ et $D' = \mathrm{Vect}(u')$. Préciser $\mathrm{Vect}(D \cup D')$.

2 Somme directe de p sous-espaces vectoriels.

Définition 2 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. On dit que les sev $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe ou que la somme des sev $F_1, \cdots, F_p$ est directe si et seulement si :*

$$\forall (x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p,\ x_1 + \cdots + x_p = 0_E \Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_p = 0_E. \tag{1}$$

Si la propriété (1) est satisfaite, on note $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$ la somme $F_1 + \cdots + F_p$.

Proposition 3 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*
(i) La somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe,
(ii) **Pour tout** *$x \in F_1 + \cdots + F_p$, il existe un* **unique** *p-uplet $(x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x = x_1 + \cdots + x_p$,*
(iii) Pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}$.

Preuve. $(i) \Rightarrow (ii)$. Soit $x \in F_1 + \cdots + F_p$. Suppososons que x se décompose de deux façons : $x = x_1 + \cdots + x_p = x'_1 + \cdots + x'_p$ avec, pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $(x_i, x'_i) \in F_i^2$. Par différence, on obtient :

$$\underbrace{(x_1 - x'_1)}_{\in F_1} + \cdots + \underbrace{(x_p - x'_p)}_{\in F_p} = 0_E$$

et d'après (1), pour tout $i \in \{1, \cdots, p\}$, $x_i - x'_i = 0_E$, c'est-à-dire $x_i = x'_i$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Soit $i \in \{1, \cdots, p\}$. Soit $x \in F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$. Posons $x = x_i = \sum_{j \neq i} x_j$ où $x_i \in F_i$ et $x_j \in F_j$ si $j \neq i$. Considérons $0_E \in F_1 + \cdots + F_p$. Comme $0_E = \underbrace{-x_i}_{\in F_i} + \sum_{j \neq i} x_j = \underbrace{0_E}_{\in F_i} + \sum_{j \neq i} 0_E$, d'après (ii), $-x_i = 0_E$ et donc $x = 0_E$.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Soit $(x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = 0_E$. Soit $i \in \{1, \cdots, p\}$ (quelconque).
On a $-x_i = \sum_{j \neq i} x_j$. Donc $-x_i \in F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j$. D'où $-x_i = 0_E$ et $x_i = 0_E$. □

Exemple. Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ p scalaires distincts. Montrer, en raisonnant par récurrence sur $p \geq 2$ que la somme
$$\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 Id_E) + \cdots + \operatorname{Ker}(f - \lambda_p Id_E)$$
est directe. Cet exemple important sera revu (et reformulé) dans un prochain chapitre consacré aux "éléments propres" d'un endomorphisme.

Remarque 2 *1.* `[Cas de deux sous-espaces]`. *Soient F_1 et F_2 deux sev de E.*
La somme $F_1 + F_2$ est directe `si et seulement si` $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

2. Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. `Si` *les sev $F_1, \cdots, F_p$ sont en somme directe,* `alors` $\forall i \neq j$, $F_i \cap F_j = \{0_E\}$.

3. Mais la réciproque de la propriété précédente est fausse si $p \geq 3$: soient $E = \mathbb{R}^2$, $F_1 = Vect((1,0))$, $F_2 = Vect((0,1))$ et $F_3 = Vect((1,1))$. Vérifier que $F_1 \cap F_2 = \{(0,0)\}$, $F_1 \cap F_3 = \{(0,0)\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{(0,0)\}$ et que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ n'est pas directe.

3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires.

3.1 Généralités. Exemples.

Définition 3 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. On dit que les sev $F_1, \cdots, F_p$ sont supplémentaires si et seulement si leur somme est directe et est égale à E, c'est-à-dire si et seulement si $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.*

La proposition 3 implique que :

Proposition 4 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E. Alors :*
$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(x_1, \cdots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \text{ tel que } x = x_1 + \cdots + x_p,$$
$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \Leftrightarrow E = F_1 + \cdots + F_p \text{ et } \forall i \in \{1, \cdots, p\},\ F_i \cap \sum_{j \neq i} F_j = \{0_E\}.$$

On retrouve en particulier le cas usuel de deux sev supplémentaires :

Corollaire 1 *Soient F_1 et F_2 deux sev de E. Alors :*
$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow \forall x \in E,\ \exists!(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2 \text{ tel que } x = x_1 + x_2,$$
$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow E = F_1 + F_2 \text{ et } F_1 \cap F_2 = \{0_E\}.$$

Trois exemples classiques à connaître.
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $A_n(\mathbb{R})$) le sev des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a. Prouver que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
b. Déterminer une base et la dimension de $S_n(\mathbb{R})$ et de $A_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-ev des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{I}$) le sous-espace de E des applications paires (resp. impaires). Prouver que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$.

3. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Soit $F = \{f \in E / \int_0^1 f(t)\, dt = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes réelles sur $[0,1]$. Vérifier que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

3.2 Cas de la dimension finie.

Supposons maintenant E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 5 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E en somme directe. Alors* $\dim(F_1 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \cdots + \dim F_p$.

Preuve. On vérifie sans difficultés que si $\mathcal{B}_1$ est une base de F_1, $\mathcal{B}_2$ une base de F_2, $\cdots$, et $\mathcal{B}_p$ une base de F_p, alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une famille génératrice et libre de $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, autrement dit une base de $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Une telle base $\mathcal{B}$ est dite *adaptée* à la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. $\square$

Exemple. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0\}$. Déterminer un supplémentaire G de F dans $\mathbb{R}^3$ et une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la somme $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.

Proposition 6 *Soient $F_1, \cdots, F_p$ p sev de E en somme directe. Alors*
$$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p \Leftrightarrow \dim F_1 + \cdots + \dim F_p = \dim E.$$

Preuve. $\boxed{\Rightarrow}$ résulte directement de la proposition 5.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$. Par les propositions 1 et 5, F est un sev de E, de même dimension que E. Donc $F = E$. $\square$

Corollaire 2 *Soient F_1 et F_2 deux sev de E. Alors :*
$$E = F_1 \oplus F_2 \Leftrightarrow F_1 \cap F_2 = \{0_E\} \text{ et } \dim E = \dim F_1 + \dim F_2.$$