
Exercice 1. `[Cours]` *Produit des matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n.

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $f_{i,j}$ l'endomorphisme de E tel que $f_{i,j}(e_j) = e_i$ et $f_{i,j}(e_p) = 0_E$ si $p \in [\![1,n]\!] \setminus \{j\}$.

1. Identifier la matrice de $f_{i,j}$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4$.
2. a. Calculer $f_{i,j} \circ f_{k,l}(e_l)$ en distinguant les deux cas : $j = k$, $j \neq k$.
2. b. Calculer $f_{i,j} \circ f_{k,l}(e_p)$ si $p \neq l$.
2. c. Identifier l'endomorphisme $f_{i,j} \circ f_{k,l}$ en distinguant les deux cas : $j = k$, $j \neq k$.
3. En déduire que : $\boxed{E_{ij}E_{kl} = \delta_{j,k}E_{il}}$.

Indications : 1. On reconnait la "matrice élémentaire" E_{ij}.
2. a. Si $k = j$, $f_{i,j} \circ f_{k,l}(e_l) = f_{i,j}(e_k) = f_{i,j}(e_j) = e_i$ et, si $k \neq j$, $f_{i,j} \circ f_{k,l}(e_l) = f_{i,j}(e_k) = 0_E$.
2. b. Si $p \neq l$, $f_{i,j} \circ f_{k,l}(e_p) = f_{i,j}(0_E) = 0_E$.
2. c. D'après 2. a. et 2. b. $f_{i,j} \circ f_{k,l} = f_{i,l}$ si $j = k$, et, si $j \neq k$, $f_{i,j} \circ f_{k,l} = \theta$ (endomorphisme nul de E).
En d'autres termes, $f_{i,j} \circ f_{k,l} = \delta_{j,k} f_{i,l}$.
3. D'après 2. c. : $E_{i,j}E_{k,l} = Mat_{\mathcal{B}}(f_{i,j})Mat_{\mathcal{B}}(f_{k,l}) = Mat_{\mathcal{B}}(f_{i,j} \circ f_{k,l}) = Mat_{\mathcal{B}}(\delta_{j,k}f_{i,l}) = \delta_{j,k}Mat_{\mathcal{B}}(f_{i,l}) = \delta_{j,k}E_{il}$.

Exercice 2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1,3]\!]^2$, $a_{ij} = \min(i,j)$.
1. Justifier que A est inversible en calculant $\det(A)$.
2. Justifier (sans la calculer) que A^{-1} est symétrique.
3. Calculer A^{-1}.

Indications : 1. $\det(A) = 1$.
2. On rappelle que $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $(UV)^T = V^T U^T$. En déduire que A^T est inversible, d'inverse $(A^{-1})^T$.
3. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ telles que $Y = AX$. Exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3. En déduire : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont égaux à 1 sauf les coefficients diagonaux égaux à 0.
1. Dans cette question, $n = 3$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2. On revient au cas général. Montrer que $A^2 - (n-2)A - (n-1)I_n = O_n$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Indications : 1. On peut vérifier que $\mathrm{rg}(A) = 3$ ou que $\det(A) = 2 \neq 0$. On obtient : $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On a donc : $A(A - (n-2)I_n) = (n-1)I_n$ donc A est inversible et $A^{-1} = \cdots$.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Indications : Méthode n^o 1. Soient $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ telles que $Y = AX$. Exprimer x_1, x_2, x_3 en fonction de y_1, y_2, y_3.
En déduire que A est inversible et que : $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Méthode n^o 2. On a : $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme I_3 et J commutent (car $I_3J = JI_3 = J$!), on a :

$$A^2 = (I_3 + J)^2 = I_3 + 2J + J^2 = I_3 + 5J$$

car $J^2 = 3J$. D'où $A^2 = I_3 + 5(A - I_3)$ ou encore $A^2 - 5A + 4I_3 = O_3$.

Comme $A \cdot \frac{1}{4}(5I_3 - A) = I_3$, A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{1}{4}(5I_3 - A3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque : Le polynôme $X^2 - 5X + 4$ est un polynôme annulateur de A. Si λ est un valeur propre de A, alors $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq 0$, telle que $AX = \lambda X$ d'où classiquement $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$ (λ est une racine de P). Le spectre de A est donc inclus dans $\{1, 4\}$. On montre plus précisement que 1 et 4 sont les deux valeurs propres de A et que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (à justifier).

Exercice 5. `[Cours]` On rappelle qu'une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulaire supérieure si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \Rightarrow a_{ij} = 0$.
Soit $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre n à coefficients réels.
1. Vérifier que $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Vérifier que $\forall (A,B) \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})^2,\ AB \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$.
3. Proposer une base de $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ constituée de matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En déduire $\dim \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$.

Indications : 2. Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = AB = (c_{ij})$. Rappelons que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i > j$. Si $k < i$, $a_{ik} = 0$ donc $a_{ik}b_{kj} = 0$; si $k \geq i$, alors $k > j$ et $b_{kj} = 0$ donc $a_{ik}b_{kj} = 0$. D'où $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} 0 = 0$.

3. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$. On a : $A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{ij}E_{i,j}$: la famille des matrices élémentaires $(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ et donc une base de $\mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R})$ car elle est libre. D'où $\dim \mathcal{T}_{n,s}(\mathbb{R}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 6. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n, $n \in \mathbb{N}$.

Solution : On a : $A = I_3 + J$ avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $J^3 = O_3$.
Comme I_3 et J commutent, par la formule du binôme de Newton, pour tout $n \geq 2$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} J^k = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2 = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

car $\forall k \geq 3,\ J^k = O_3$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel de dimension 3 et f un endomorphisme nilpotent d'indice 2.
1. Justifier que $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$. Déterminer $\dim \operatorname{Ker} f$ et $\dim \operatorname{Im} f$.
2. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Solution : 1. Notons θ l'endomorphisme nul de E et 0_E le vecteur nul de E. Par hypothèse, $f \neq \theta$ et $f \circ f = \theta$.
i) Vérifions l'inclusion $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$: Soit $v \in \operatorname{Im} f$. Il existe $u \in E$ tel que $v = f(u)$ et on a bien $v \in \operatorname{Ker} f$ car

$$f(v) = f(f(u)) = (f \circ f)(u) = \theta(u) = 0_E.$$

ii) Comme $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f \subset E$, on a : $\dim \operatorname{Im} f \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 3$. Or $\dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f = \dim E = 3$ (Théorème du rang).
D'où $3 \leq 2 \dim \operatorname{Ker} f$ et donc $\dim \operatorname{Ker} f \in \{2, 3\}$ car $\dim \operatorname{Ker} f \in \mathbb{N}$. Comme $f \neq \theta$, $\operatorname{Ker} f \neq E$, on a donc :

$$\dim \operatorname{Ker} f = 2 \quad \text{et} \quad \operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1.$$

2. Soit (e_1, e_2, e_3) une telle base de E. On doit avoir : $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$ et $f(e_3) = e_2$.
Choisissons un vecteur non nul e_2 de $\operatorname{Im} f$ (un tel vecteur existe car $\operatorname{Im} f$ est une droite vectorielle de E). Puis e_3 un antécédent de e_2 par f (un tel vecteur existe car $e_2 \in \operatorname{Im} f$) et enfin e_1 un vecteur de $\operatorname{Ker} f$ non colinéaire à e_2 (un tel vecteur existe car $\operatorname{Ker} f$ est un plan vectoriel de E (contenant e_2)). Cette famille (e_1, e_2, e_3) est bien une base de E car elle est libre (maximale) :
soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0_E$ $(*)$. Alors $f(ae_1 + be_2 + ce_3) = f(0_E) = 0_E$ d'où, par linéarité de f, $ce_2 = 0_E$ car $f(e_1) = f(e_2) = 0_E$, c'est-à-dire $c = 0$ car e_2 est non nul. L'égalité $(*)$ devient : $ae_1 + be_2 = 0_E$, et comme (e_1, e_2) est libre (c'est une base de $\operatorname{Ker} f$), $a = b = 0$. Dans cette base, la matrice de f est A.

Exercice 8. 1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AM) = 0$ $(*)$.
2. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BM)$. Montrer que $A = B$.

Indication : 1. Soit $A = (a_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{i,j}$ une telle matrice. Soit $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$. Vérifier que $AE_{k,l} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}E_{i,l}$. En déduire $a_{lk} = 0$.
Donc $A = O_n$ et comme O_n vérifie clairement $(*)$, O_n est la seule matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.
Autre méthode. Vérifier que $\operatorname{tr}(AA^T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ et conclure en considérant $M = A^T$.
2. Considérer $A - B$ et utiliser 1.

Exercice 9. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$. Justifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une base de E.

Solution. *i*) Vérifions que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a : $E \neq \emptyset$ car $O_n \in E$ et E est stable par combinaison linéaire par linéarité de la trace. En effet, soit $(A, B) \in E^2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors $aA + bB \in E$ car $\operatorname{tr}(aA + bB) = a\operatorname{tr}(A) + b\operatorname{tr}(B) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$.

ii) Déterminons une base de E.

• Considérons d'abord le cas $n = 2$:

Soit $M = (m_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = m_{11}E_{11} + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21} + m_{22}E_{22} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} m_{ij}E_{ij} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$M \in E \Leftrightarrow m_{11} + m_{22} = 0 \Leftrightarrow m_{22} = -m_{11} \Leftrightarrow M = m_{11}(E_{11} - E_{22}) + m_{12}E_{12} + m_{21}E_{21}.$$

Donc $M \in E$ ssi M est une combinaison linéaire des trois matrices $E_{11} - E_{22}$, E_{12}, E_{21}. Autrement dit, la famille $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est une famille *génératrice* de E. De plus, cette famille est *libre* : soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21} = 0_2$ $(*)$. Alors

$$(*) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = b = c = 0.$$

La famille $(E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21})$ est donc une base de E (car génératrice et libre) et E est un sous-espace vectoriel de dimension 3 du $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension 4) $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

• Cas général : Soit $M = (m_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}E_{ij} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned} M \in E \quad &\Leftrightarrow \quad m_{11} + m_{22} + \cdots + m_{nn} = 0 \Leftrightarrow m_{nn} = -m_{11} - \cdots - m_{n-1n-1} \\ &\Leftrightarrow \quad M = m_{11}(E_{11} - E_{nn}) + \cdots + m_{n-1n-1}(E_{n-1n-1} - E_{nn}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} m_{ij}E_{ij}. \end{aligned}$$

Donc $M \in E$ ssi M est une combinaison linéaire des matrices $E_{11} - E_{nn}, \cdots, E_{n-1n-1} - E_{nn}$, (il y en a $n - 1$) et E_{ij} avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \neq i$ (il y en a $n(n-1) = n^2 - n$). Autrement dit, la famille des $n^2 - 1$ matrices

$$\{E_{11} - E_{nn}, \cdots, E_{n-1n-1} - E_{nn}\} \cup \{E_{ij} / i \in [\![1, n]\!] \text{et}\, j \neq i\}$$

est une famille *génératrice* de E. On vérifie sans difficultés que cette famille est *libre*. Cette famille est donc une base de E (génératrice et libre) et par conséquent, E est un sous-espace vectoriel de dimension $n^2 - 1$ du $\mathbb{R}$-espace vectoriel (de dimension n^2) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On dit que E est un *hyperplan* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\dim E = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - 1$.

Exercice 10. Soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un espace vectoriel E de dimension 3 et f l'endomorphisme de E de matrice

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -10 & 8 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 8 & -16 & 2 \end{pmatrix}$$

dans la base B.

1. Déterminer $F = \operatorname{Ker}(f - 2Id_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(f + 2Id_E)$. Vérifier que F et G sont supplémentaires.

2. Préciser la nature géométrique de $g = \frac{1}{2}f$.

Indications. **1.** Vérifier que F est la droite $\operatorname{Vect}(e_1 + e_2 - 2e_3)$ et G le plan d'équation : $x - 2y + z = 0$ dans la base B.

2. Justifier que g est la symétrie vectorielle par rapport à F, de direction G.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel. Soient f et $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g \circ f = f$ et $g \circ f \circ g = g$. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} g$.

Indications. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse : soit $u \in E$. Supposons que $u = v + w$ avec $v \in \operatorname{Ker} f$ et $w \in \operatorname{Im} g$. Soit $a \in E$ tel que $w = g(a)$.

Montrer que $w = g(f(u))$ et $v = u - g(f(u))$...

Synthèse : Vérifier que $u - g(f(u)) \in \operatorname{Ker} f$ et $g(f(u)) \in \operatorname{Im} g$...

Exercice 12. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Indication. Considérer l'endomorphime f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A. On est conduit à déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker}(f - 3Id_{\mathbb{R}^3})$.

Exercice 13. Soient E un $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = -f$. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Ker}(f^2 + Id_E)$.

Indications. On raisonne par analyse-synthèse.
Analyse : soit $u \in E$. Supposons que $u = v + w$ avec $v \in \operatorname{Ker} f$ et $w \in \operatorname{Ker}(f^2 + Id_E)$.
Montrer que $w = -f^2(u)$ et $v = u + f^2(u)$...
Synthèse : Vérifier que $u + f^2(u) \in \operatorname{Ker} f$ et $-f^2(u) \in \operatorname{Ker}(f^2 + Id_E)$...

Exercice 14. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer toutes les formes linéaires f sur E telles que $\forall (A,B) \in E^2$, $f(AB) = f(BA)$.

Indication : On utilise les matrices de la base canonique de E. On rappelle que

$$\forall (i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4,\ E_{ij}E_{kl} = 0 \text{ si } j \neq k \text{ et } E_{ij}E_{kl} = E_{il} \text{ si } j = k.$$

Montrer que $f(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$ et $f(E_{11}) = \cdots = f(E_{nn})$. En déduire qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall M \in E$, $f(M) = c\,\mathrm{tr}(M)$.

Indications. **1.** On vérifie sans difficultés que f est linéaire : $\forall (U,V) \in E^2$, $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $f(aU + bV) = af(U) + bf(V)$ car $(aU+bV)(-1) = aU(-1) + bV(-1)$ et $(aU + bV)(1) = aU(1) + bV(1)$.
2. *Etude de* $\operatorname{Ker} f$. Soit $P \in E$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \operatorname{Ker} f \quad &\Leftrightarrow \quad P(-1)(X^2 - X) + P(1)(X^2 + X) = 0 \Leftrightarrow (P(-1) + P(1))X^2 + (P(1) - P(-1))X = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad P(-1) + P(1) = 0 \text{ et } P(1) - P(-1) = 0 \text{ car } (X, X^2) \text{ est une famille libre} \\ &\Leftrightarrow \quad P(1) = P(-1) = 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, $P \in \operatorname{Ker} f$ ssi -1 et 1 sont des racines de P, donc ssi il existe $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $P(X) = (X-1)(X+1)Q(X)$ $(*)$.
En posant $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-2}X^{n-2}$ dans $(*)$, on obtient que :

$$P \in \operatorname{Ker} f \text{ ssi } P \text{ est une combinaison linéaire des polynômes } U_k(X) = X^k(X^2 - 1), \text{ avec } k \in [\![0, n-2]\!].$$

Comme la famille $(U_0, \cdots, U_{n-2})$ est aussi libre car échelonnée en degrés, cette famille est une base de $\operatorname{Ker} f$. D'où $\dim \operatorname{Ker} f = n - 1$.
Etude de $\operatorname{Im} f$. Par le théorème du rang, on sait déjà que :

$$\dim \operatorname{Im} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f = (n+1) - (n-1) = 2.$$

Plus précisement, par définition de f, on a : $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Vect}(X^2 - X, X^2 + X)$. D'où $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X^2 - X, X^2 + X)$ car $(X^2 - X, X^2 + X)$ est libre (à vérifier) et donc $\dim \operatorname{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) = 2$. En fait $\operatorname{Vect}(X^2 - X, X^2 + X) = \operatorname{Vect}(X^2, X)$ (à vérifier par double inclusion) et on a plus simplement, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(X^2, X)$. On peut donc proposer $(X^2 - X, X^2 + X)$ ou (X, X^2) comme base de $\operatorname{Im} f$.

Exercice 15. Soient E un $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E)$ et p un projecteur de E.
Montrer que $f \circ p = p \circ f$ si et seulement si $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$ sont stables par f.
• On rappelle qu'un sev F de E est stable par f si et seulement si $f(F) \subset F$.

Indications. $\Leftarrow$ On rappelle que $E = \operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p$.

Exercice 16. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n.
1. Vérifier que $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$. En déduire que $\mathrm{rg}(f+g) \leq \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$.
2. On suppose désormais que $f \circ g$ est l'endomorphisme nul et $f + g$ est bijectif.
2. a. Justifier que $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$ et $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) \geq n$.
2. b. Prouver finalement que $\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$, $\operatorname{Im} g = \operatorname{Ker} f$ et $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Solution : **1.** Soit $v \in \text{Im } (f+g)$. Il existe $u \in E$ tel que $v = (f+g)(u) = \underbrace{f(u)}_{\in \text{Im } f} + \underbrace{g(u)}_{\text{Im } g}$.

Donc $v \in \text{Im } f + \text{Im } g$, par définition de $\text{Im } f + \text{Im } g$, car v est la somme d'un vecteur de $\text{Im } f$ et d'un vecteur de $\text{Im } g$.
On vient de prouver que $\text{Im } (f+g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ et, en considérant les dimensions, on obtient avec la formule de Grassmann que :

$$\text{rg}(f+g) = \dim \text{Im } (f+g) \leq \dim(\text{Im } f + \text{Im } g) = \dim \text{Im } f + \dim \text{Im } g - \dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) \leq \dim \text{Im } f) + \dim \text{Im } g = \text{rg}(f) + \text{rg}(g).$$

2. a. *Pas compliqué !* Soit $y \in \text{Im } g$. Il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$ et on a :

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = 0_E$$

car $f \circ g$ est l'endomorphisme nul de E. De plus, $f+g$ étant bijective, $\text{Im } (f+g) = E$ d'où :

$$\text{rg}(f+g) = \dim \text{Im } (f+g) = \dim E = n$$

et donc d'après 1. $n \leq \text{rg}(f) + \text{rg}(g)$.

2. b. L'inclusion $\text{Im } g \subset \text{Ker} f$ implique $\text{rg}(g) = \dim \text{Im } g \leq \dim \text{Ker} f$. En outre, par la formule du rang avec f, on a :
$\dim \text{Ker} f = n - \text{rg}(f)$. D'où $\text{rg}(g) + \text{rg}(f) \leq n$ et finalement $\text{rg}(f) + \text{rg}(g) = n$ par 2. a. Comme

$$\dim \text{Im } g = \text{rg}(g) = n - \text{rg}(f) = \dim \text{Ker} f,$$

l'inclusion $\text{Im } g \subset \text{Ker} f$ est en fait une égalité. Prouver que $E = \text{Ker} f \oplus \text{Im } f$ revient à prouver que

$$\text{Ker} f \cap \text{Im } f = \text{Im } f \cap \text{Im } g = \{0_E\}$$

car, par le théorème du rang, $\dim E = \dim \text{Ker} f + \dim \text{Im } f$. Et c'est bien le cas car $\text{Im } f \cap \text{Im } g$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 0 d'après ce qui précède puisque d'après la formule de Grassmann

$$\dim(\text{Im } f \cap \text{Im } g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - \text{rg}(f+g) = \text{rg}(f) + \text{rg}(g) - n = 0.$$

Exercice 17. Soit $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+y+z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1,1,1))$. Justifier que F et G sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection vectorielle p sur F, de direction G.

Indications : F est un plan vectoriel (à justifier) et G une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, donc $\dim F + \dim G = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. Vérifier que $F \cap G = \{(0,0,0)\}$. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Posons $u' = (x',y',z') = p(u)$. Comme $u'' = u - u' \in D$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u'' = k(1,1,1)$. En déduire que $x' = x-k, y' = y-k, z' = z-k$ puis $k = \frac{x+y+z}{3}$. Finalement, on a : $x' = \frac{2x-y-z}{3}$, $y' = \frac{-x+2y-z}{3}$, $z' = \frac{-x-y+2z}{3}$ et la matrice cherchée est la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Remarques : a) $A^2 =$ *? (sans calcul) b) On a :* $\text{tr}(A) = 2$. *Pourquoi le savait-on d'avance ? c) Que vaut* $\det(A)$ *? (sans calcul)*

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / \int_{-1}^{1} P(x)\,dx = 0\}$.

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa dimension.

Indication : remarquer que E est le noyau d'une forme linéaire non nulle de $\mathbb{R}_n[X]$ à préciser.

2. Déterminer une base de E. *Indication : calculer $f(X^k)$.*

Indications : **1.** On vérifie que $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$, $P \mapsto \int_{-1}^{1} P(x)\,dx$ est une forme linéaire (non nulle) sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Donc (cf. cours) $E = \text{Ker} f$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n = (n+1) - 1$.

2. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $f(X^k) = \displaystyle\int_{-1}^{1} x^k\,dx = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1}$.

Donc $\underline{\text{si } k \text{ est impair, } X^k \in E}$ car $f(X^k) = 0$, et, $\underline{\text{si } k \text{ est pair, } 1-(k+1)X^k \in E}$ car $f(X^k) = \dfrac{2}{k+1}$ et, f étant linéaire,

$$f(1-(k+1)X^k) = f(1) - (k+1)f(X^k) = 2 - \frac{2}{k+1} \cdot (k+1) = 0.$$

Distinguons deux cas :

i) si $n = 2p$ est pair, une base de E (formée de $n = 2p$ polynômes de E échelonnés en degrés) est :

$$(X, 1-3X^2, X^3, 1-5X^4, \cdots, X^{2p-1}, 1-(2p+1)X^{2p}).$$

ii) si $n = 2p+1$ est impair, une base de E (formée de $n = 2p+1$ polynômes de E échelonnés en degrés) est :

$$(X, 1-3X^2, X^3, 1-5X^4, \cdots, X^{2p-1}, 1-(2p+1)X^{2p}, X^{2p+1}).$$

Exercice 19. Soient p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que si $p \circ q = q \circ p$ alors $p \circ q$ est un projecteur de E, puis que $p \circ q$ est la projection vectorielle sur $\text{Im } p \cap \text{Im } q$, de direction $\text{Ker} p + \text{Ker} q$.

Indications : • Comme la loi $\circ$ est associative, $p \circ q$ est un projecteur de E (donc une projection vectorielle) car

$$(p \circ q)^2 = (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q = p \circ (p \circ q) \circ q = (p \circ p) \circ (q \circ q) = p \circ q.$$

Exercice 20. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une base de Im f. En déduire que $\operatorname{Ker} f$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, puis déterminer un vecteur directeur noté e_1' de $\operatorname{Ker} f$. Déterminer un vecteur directeur e_2' de $\operatorname{Ker}(f - Id)$ et un vecteur directeur e_3' de $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}Id)$. Vérifier que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Justifier que A et D sont semblables et déterminer une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

Solution : 1. Comme $f(e_1) = f(e_3)$, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2), f(e_3)) = \operatorname{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0), (\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4})) = \operatorname{Vect}((0, 1, 0), (1, 2, 1))$: $((0, 1, 0), (1, 2, 1))$ est une famille génératrice de Im f et donc une base de Im f car les vecteurs $(0, 1, 0)$ et $(1, 2, 1)$ sont non colinéaires. On déduit du théorème du rang que $\dim \operatorname{Ker} f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \operatorname{Im} f = 1$. Plus précisement $\operatorname{Ker} f$ est la droite vectorielle engendrée par $e_1' = e_1 - e_3 = (1, 0, -1) \in \operatorname{Ker} f$ car $f(e_1 - e_3) = f(e_1) - f(e_3) = (0, 0, 0)$. De plus en résolvant les système linéaires $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on obtient : $\operatorname{Ker}(f - Id) = \operatorname{Vect}((1, 4, 1))$ et $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}Id) = \operatorname{Vect}((1, -2, 1))$. En d'autres termes, $e_2' = (1, 4, 1)$ (resp. $e_3' = (1, -2, 1)$) est un vecteur directeur de $\operatorname{Ker}(f - Id)$ (resp. $\operatorname{Ker}(f + \frac{1}{2}Id)$). On vérifie sans difficultés que la famille $B' = (e_1', e_2', e_3')$ est libre, et comme $\operatorname{card}(B') = \dim \mathbb{R}^3$, B' est une base de $\mathbb{R}^3$ car c'est une famille libre maximale de $\mathbb{R}^3$.

2. On remarque que D est la matrice de f dans la base $B' = (e_1', e_2', e_3')$. Donc A et D sont semblables car ce sont les matrices d'un même endomorphisme (l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$) dans deux bases différentes (de $\mathbb{R}^3$).

Plus précisement, soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ à la base $B' = (e_1', e_2', e_3')$.

D'après les formules de changement de bases, on a : $D = P^{-1}AP$.

Remarque. f est un endomorphisme *diagonalisable* de $\mathbb{R}^3$: les valeurs propres de f sont $0, 1, -\frac{1}{2}$ et les trois sous-espaces propres sont les droites vectorielles $\operatorname{Vect}(e_1')$, $\operatorname{Vect}(e_2')$ et $\operatorname{Vect}(e_3')$: (e_1', e_2', e_3') est une base de vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Exercice 21. Etant données A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, résoudre l'équation $(E) : M + \operatorname{tr}(M)A = B$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Indications : Vérifier que si M est solution de (E), alors $\operatorname{tr}(M)(1 + \operatorname{tr}(A)) = \operatorname{tr}(B)$ puis distinguer trois cas : $\operatorname{tr}(A) \neq -1$; $\operatorname{tr}(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(B) \neq 0$; $\operatorname{tr}(A) = -1$ et $\operatorname{tr}(B) = 0$.

Exercice 22. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, semblable à $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^3.

Réponse : $A^3 = O_3$.

Exercice 23. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Prouver que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Im} f$ si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indications. $\Rightarrow$ Justifier que $\dim \operatorname{Ker} f = 1$. Considérer un vecteur non nul e_1 de $\operatorname{Ker} f$, justifier l'existence d'un vecteur e_2 tel que $f(e_2) = e_1$ et vérifier que $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base de E qui convient.

Exercice 24. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim \operatorname{Ker}(f \circ f) \leq 2 \dim \operatorname{Ker} f$.

Indication : compléter une base de $\operatorname{Ker} f$ *en une base de* $\operatorname{Ker} f^2$.