Spé PC. Lycée Rabelais. Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Samedi 25 janvier 2025.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 5.

Exercice 1. Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées de gauche à droite 0, 1, 2, 3, ... Une puce se déplace à chaque saut d'une ou deux cases au hasard vers la droite. Au départ, elle se trouve sur la case numérotée 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note X_n la variable aléatoire (v.a.) égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une seule case lors des n premiers sauts.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note Z_k la v.a. à valeurs dans $\{0, 1\}$, définie par : $Z_k = 1$ (resp. $Z_k = 0$) si la puce saute d'une case (resp. de deux cases) lors du k-ème saut.

1. Identifier la variable aléatoire $Z_1 + \cdots + Z_n$ et déterminer la loi de Y_n.

2. Montrer que $X_n = 2n - Y_n$. En déduire la loi de probabilité de X_n, l'espérance de X_n et la variance de X_n.

Exercice 2. Un candidat joue à un jeu télévisé dont les modalités sont les suivantes : on lui donne initialement un euro et son capital double s'il répond correctement à une question, si c'est le cas on lui pose alors une autre question, sinon le jeu s'arrête et il repart avec l'argent gagné. La probabilité qu'il réponde correctement à la première question est égale à 1 et la probabilité qu'il réponde correctement à la n-ième question posée ($n \geq 2$) sachant qu'il a répondu correctement aux $n-1$ questions précédentes est égale à $\frac{1}{n}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note C_k l'événement : « le candidat répond correctement à la k-ième question ».

On note X le gain final du candidat lorsque le jeu s'arrête.

1. *Loi de X.*

1. a. Calculer $P(X = 2)$. Vérifier que $(X = 4) = C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}$. En déduire $P(X = 4)$.

1. b. Calculer $P(X = 2^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que le jeu s'arrête presque sûrement.

2. *Espérance de X.* Justifier que X est d'espérance finie et calculer $E(X)$.

Problème 1. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi. On pose : $D = X - Y$ et $M = \min(X, Y)$. *On remarquera que D est à valeurs dans $\mathbb{Z}$.*

1. On suppose dans cette question **1.** que $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, et on note : $q = 1 - p$.

1. a. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n) = pq^n$.

1. b. Calculer l'espérance et la variance de X.

1. c. *Loi du couple* (D, M). Montrer que :

i) Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $P((D = j) \cap (M = k)) = p^2 q^{2k+j}$, *ii)* Pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z}^- \times \mathbb{N}$, $P((D = j) \cap (M = k)) = p^2 q^{2k-j}$.

Remarque : on a donc, pour tout $(j, k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $P((D = j) \cap (M = k)) = p^2 q^{2k+|j|}$.

1. d. *Loi de D et loi de M.* Déduire de **1. c.** que :

i) pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $P(D = j) = \dfrac{p}{1+q}\, q^{|j|}$, *ii)* pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(M = k) = pq^{2k}(1 + q)$.

Les variables aléatoires D et M sont-elles indépendantes ?

2. On suppose dans cette question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n) > 0$ et que D et M sont indépendantes.

2. a. Soit $j \in \mathbb{N}$. Vérifier que $P(D = j)P(M = 0) = P(X = j)P(Y = 0)$ et $P(D = j)P(M = 1) = P(X = j + 1)P(Y = 1)$.

2. b. Déduire de **2. a.** que la suite $(P(X = j))_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique et qu'il existe une constante $a \in]0, 1[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = a(1 - a)^n$.

Problème 2. Les variables aléatoires considérées ici sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs réelles. On note $E(U)$ l'espérance d'une variable aléatoire réelle U d'espérance finie

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose : $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

1. a. Vérifier que la fonction dérivée f_n' est strictement croissante et bornée sur $\mathbb{R}$.

1. b. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_n(t) - f_n(a) \geq f_n'(a)(t - a)$.

2. Soit Z une variable aléatoire d'espérance finie. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $Z_n = f_n(Z) = \sqrt{Z^2 + \dfrac{1}{n^2}}$.

2. a. Comparer Z_n et $|Z| + \dfrac{1}{n}$. En déduire que Z_n est d'espérance finie.

2. b. Etudier la monotonie de la suite $(E(Z_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. En déduire que la suite $(E(Z_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2. c. Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} E(Z_n) = E(|Z|)$. *Indication : encadrer $E(Z_n)$.*

3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et d'espérance finie, avec $E(Y) = 0$.

3. a. Justifier que les variables aléatoires $f_n(X)$, $f_n(X + Y)$, $f_n'(X)$, $f_n'(X)Y$ sont d'espérance finie.

3. b. Justifier que $E(f_n'(X)\, Y) = 0$. Déduire de 1. b. et 2. c. que : $E(|X + Y|) \geq E(|X|)$.

4. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, toutes d'espérance finie, telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $E(X_n) = 0$. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déduire de la question précédente que la suite $\left(E(|S_n|)\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

Problème 3. *Les parties* **I**, **II**, **III** *sont indépendantes.*

I. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 10 & -5 & 7 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On note Id l'application identique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f)$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur. En déduire que $\text{Im}\, f$ est un plan vectoriel dont on précisera une base. Montrer que $\text{Ker}\, f \subset \text{Im}\, f$.

2. Montrer que $\text{Ker}(f + Id)$ est une droite vectorielle dont on précisera un vecteur directeur.

3. Prouver que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

II. Soient $G = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à G.

1. Déterminer les valeurs propres de g et déterminer une base de chaque sous-espace propre de g.

2. Justifier que G est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Déterminer un couple $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la famille $(u, g(u))$ ne soit pas une base de $\mathbb{R}^2$ et un couple $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que la famille $(v, g(v))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

III. On note tr l'application trace. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\text{tr}(A) = 1$.
On considère l'application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = M + \text{tr}(M)A.$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer un polynôme annulateur de f de degré 2.

3. Montrer que f admet deux valeurs propres réelles. Déterminer la dimension de chaque sous-espace propre.
Ces deux sous-espaces propres sont-ils supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Problème 4. *Valeurs propres complexes d'une matrice stochastique.*
Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est *stochastique* si et seulement si :

$$\forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2,\ m_{ij} \geq 0 \text{ et } \forall i \in \{1, \dots, n\},\ \sum_{j=1}^{n} m_{ij} = 1.$$

On note Σ_n l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que si $(A, B) \in \Sigma_n^2$, $AB \in \Sigma_n$.

2. Soit $A \in \Sigma_n$. Calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Quelle valeur propre de A vient-on de mettre en évidence ?

3. Soient $A = (a_{ij}) \in \Sigma_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A. Prouver que $|\lambda| \leq 1$.

Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ *tel que* $AX = \lambda X$. *Soient* $M = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ *et* $k \in \{1, \dots, n\}$ *tels que* $|x_k| = M$. *Considérer la* $k^{\text{ième}}$ *ligne du système* $AX = \lambda X$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \Sigma_n$ telle que $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $a_{ii} > 0$. Soit λ une valeur propre complexe de A telle que $|\lambda| = 1$.

On reprend les notations de la question précédente.

4. a. En considérant à nouveau la $k^{\text{ième}}$ ligne du système $AX = \lambda X$ de l'indication de la question **3.**, montrer que :

$$|\lambda - a_{kk}| \leq 1 - a_{kk}.$$

4. b. Montrer que l'on a plus précisement $|\lambda - a_{kk}| = 1 - a_{kk}$.

4. c. En déduire $\lambda = 1$. *Indication : développer l'égalité* $|\lambda - a_{kk}|^2 = (1 - a_{kk})^2$.

Remarque : Sous l'hypothèse supplémentaire de stricte positivité des coefficients diagonaux de $A \in \Sigma_n$, 1 *est donc la seule valeur propre complexe de* A *dont le module est égal à* 1.