
Exercice 1.

1. La somme $Z_1 + \cdots + Z_n$ donne le nombre de fois où la puce a sauté d'une case lors des n premiers sauts, autrement dit on a : $Y_n = Z_1 + \cdots + Z_n$. Sachant que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $Z_k \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{1}{2})$ car $P(Z_k = 1) = P(Z_k = 0) = \frac{1}{2}$ et que les v.a. $Z_1, \cdots, Z_n$ sont des v.a. mutuellement indépendantes de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, on a donc : $Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

2. Lors des n sauts la puce s'est déplacée Y_n fois d'une case et $n - Y_n$ fois de deux cases donc

$$X_n = Y_n \cdot 1 + (n - Y_n) \cdot 2 = 2n - Y_n.$$

La v.a. X_n est à valeurs dans $[\![n, 2n]\!]$ et pour tout $k \in [\![n, 2n]\!]$, $P(X_n = k) = P(Y_n = 2n-k) = \binom{n}{2n-k}(\frac{1}{2})^n = \binom{n}{k-n}(\frac{1}{2})^n$. En utilisant les propriétés de l'espérance et de la variance et aussi la valeur de l'espérance et de la variance d'un v.a. suivant une loi binomiale, on obtient : $E(X_n) = 2n - E(Y_n) = 2n - \frac{n}{2} = \frac{3n}{2}$ et $V(X_n) = (-1)^2 V(Y_n) = V(Y_n) = \frac{n}{4}$.

Exercice 2.

1. a. On a : $(X = 2) = C_1 \cap \overline{C_2}$. Donc $P(X = 2) = P(C_1)P_{C_1}(\overline{C_2}) = 1 \cdot (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
De même, $(X = 4) = C_1 \cap C_2 \cap \overline{C_3}$ d'où par la formule des probabilités composées :

$$P(X = 4) = P(C_1)P_{C_1}(C_2)P_{C_1 \cap C_2}(\overline{C_3}) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1 - \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}.$$

1. b. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(X = 2^n) = C_1 \cap C_2 \cdots \cap C_n \cap \overline{C_{n+1}}$ et, par la formule des probabilités composées :

$$P(X = 2^n) = P(C_1)P_{C_1}(C_2) \cdots P_{C_1 \cap \cdots C_{n-1}}(C_n)P_{C_1 \cap \cdots C_n}(\overline{C_{n+1}}) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{n} \cdot (1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)!}.$$

Notons A l'événement : « le jeu s'arrête ». On a : $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (X = 2^n)$ (le candidat s'arrête s'il n'a répondu correctement qu'à la question 1 ou s'il n'a répondu correctement qu'aux questions 1 et 2 ou s'il n'a répondu correctement qu'aux questions 1,2,3 etc.)
L'événement A est quasi-certain (presque sûr) car

$$P(A) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} (\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}) = \lim_{N \to +\infty} (1 - \frac{1}{(N+1)!}) = 1.$$

2. Le critère de D'Alembert permet de justifier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n \geq 1} \frac{n 2^n}{(n+1)!}$. Donc X est d'espérance finie. Rappelons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ (DSE(0) de la fonction exponentielle). Par conséquent :

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n P(X = 2^n) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n (\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} = (e^2 - 1) - \frac{1}{2}(e^2 - 1 - 2) = \frac{e^2 + 1}{2}.$$

Problème 1.

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $P(X = n) = P(X + 1 = n + 1) = p(1 - p)^{(n+1)-1} = pq^n$ car $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p et $P(X = n) = P(Y = n)$ car X et Y suivent la même loi.

1. b. D'après le cours, $E(X + 1) = \frac{1}{p}$ et $V(X) = \frac{1 - p}{p^2} = \frac{q}{p^2}$ car $X + 1$ suit la loi géométrique de paramètre p. D'où, par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = E((X + 1) - 1) = E(X + 1) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p}$$

et

$$V(X) = V(X + 1) = \frac{q}{p^2}$$

car si U est une v.a. telle que U^2 est d'espérance finie, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(aU+b)^2$ est d'espérance finie et $V(aU+b) = a^2 V(U)$.

1. c. *i)* Soit $(j,k) \in \mathbb{N}^2$. On a : $\boxed{(D=j) \cap (M=k) = (X=k+j) \cap (Y=k)}$ (car D étant positif, on a $X \geq Y$ et $M = Y$).
Et comme X et Y sont indépendantes, on a donc :

$$P((D=j) \cap (M=k)) = P((X=k+j) \cap (Y=k)) = P(X=k+j)P(Y=k) = pq^{k+j}pq^k = p^2q^{2k+j}.$$

ii) Soit $(j,k) \in \mathbb{Z}^- \times \mathbb{N}$. On a cette fois : $\boxed{(D=j) \cap (M=k) = (Y=k-j) \cap (X=k)}$ (car D étant négatif, on a $Y \geq X$ et $M = X$).
Et comme X et Y sont indépendantes, on a donc :

$$P((D=j) \cap (M=k)) = P((Y=k-j) \cap (X=k)) = P(Y=k-j)P(X=k) = pq^{k-j}pq^k = p^2q^{2k-j}.$$

Donc, pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, $P((D=j) \cap (M=k)) = p^2q^{2k+|j|}$.

1. d. *i)* Soit $j \in \mathbb{Z}$. Les événements $(M=0)$, $(M=1)$, $(M=2)$, $\cdots$, formant un système complet d'événements, on a :

$$(D=j) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} ((D=j) \cap (M=k))$$

et d'après **1. c.** comme $q^2 \in]0,1[$,

$$P(D=j) = \sum_{k=0}^{+\infty} P((D=j) \cap (M=k)) = \sum_{k=0}^{+\infty} p^2q^{2k+|j|} = p^2q^{|j|}\sum_{k=0}^{+\infty}(q^2)^k = \frac{p^2q^{|j|}}{1-q^2} = \frac{p^2q^{|j|}}{(1-q)(1+q)} = \frac{pq^{|j|}}{1+q}.$$

ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Les événements $(D=j)$, $\underline{j \in \mathbb{Z}}$, formant un système complet d'événements, on a donc :

$$(M=k) = \bigcup_{j=-\infty}^{+\infty} ((D=j) \cap (M=k)) = \bigcup_{j=-\infty}^{j=-1} ((D=j) \cap (M=k)) \cup \bigcup_{j=0}^{+\infty} ((D=j) \cap (M=k))$$

(ne pas comptabiliser deux fois $j = 0$!) et d'après **1. c.** comme $q \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
P(M=k) &= \sum_{j=-\infty}^{j=-1} P((D=j) \cap (M=k)) + \sum_{j=0}^{+\infty} P((D=j) \cap (M=k)) \\
&= \sum_{j=-\infty}^{j=-1} p^2q^{2k-j} + \sum_{j=0}^{+\infty} p^2q^{2k+j} \\
&= p^2q^{2k}\sum_{l=1}^{+\infty} q^l + p^2q^{2k}\sum_{j=0}^{+\infty} q^j \ \ \text{(changement d'indice } l=-j \text{ dans la première somme)} \\
&= p^2q^{2k}(2\sum_{j=0}^{+\infty} q^j - 1) = p^2q^{2k}(\frac{2}{1-q} - 1) = p^2q^{2k}(\frac{1+q}{1-q}) = pq^{2k}(1+q).
\end{aligned}$$

Et les variables aléatoires D et M sont indépendantes car pour tout $(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$:

$$P(D=j)P(Z=k) = \frac{p}{1+q}q^{|j|}pq^{2k}(1+q) = p^2q^{2k+|j|} = P((D=j) \cap (M=k)).$$

2. *On établit ci-dessous une réciproque du résultat obtenu précédement : Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes, de même loi, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) > 0$, et telles que $D = X - Y$ et $M = \min(X,Y)$ sont indépendantes. Alors $X+1$ (et donc $Y+1$) suit une loi géométrique.*

2. a. Soit $j \in \mathbb{N}$. Comme $(D=j) \cap (M=0) = (X=j) \cap (Y=0)$ et $(D=j) \cap (M=1) = (X=j+1) \cap (Y=1)$, on obtient :

$$P(D=j)P(M=0) = P((D=j) \cap (M=0)) = P((X=j) \cap (Y=0)) = P(X=j)P(Y=0)$$

et

$$P(D=j)P(M=1) = P((D=j) \cap (M=1)) = P((X=j+1) \cap (Y=1)) = P(X=j+1)P(Y=1)$$

car, d'une part, D et M sont indépendantes, et d'autre part X et Y sont indépendantes.

2. b. D'après **2. a.**, pour tout $j \in \mathbb{N}$: $P(X=j+1) = \dfrac{P(M=1)P(Y=0)}{P(Y=1)P(M=0)}P(X=j)$.

Notons b la constante strictement positive $\frac{P(M=1)P(Y=0)}{P(Y=1)P(M=0)}$. La suite $(P(X=j))_{j\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison b. D'où pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X=j) = P(X=0)b^j$. Comme la série $\sum_{j\geq 0} P(X=j)$ converge et a pour somme 1, on a donc : $b \in]0,1[$ et $P(X=0)\frac{1}{1-b} = 1$. En posant $a = 1-b = P(X=0) \in]0,1[$, on obtient que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $P(X=j) = a(1-a)^j$, c'est-à-dire que $X+1$ (et $Y+1$) suivent une loi géométrique (de paramètre a).

Problème 2.

1. a. f_n est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}}$ et $f_n''(x) = \dfrac{1}{n^2(x^2+\frac{1}{n^2})^{\frac{3}{2}}}$. Comme f_n'' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, f_n' est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, f_n' est bornée sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f_n'(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} < 1$.

1. b. Comme f_n'' est (strictement) positive sur $\mathbb{R}$, f_n est (strictement) convexe sur $\mathbb{R}$. Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ de f en $(a, f(a))$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ ce que traduit l'inégalité demandée.

$\triangleright$ On pouvait aussi retrouver ce résultat avec l'égalité des accroissements finis : supposons $t > a$. Il existe $c \in]a,t[$ tel que $f_n(t) - f_n(a) = (t-a)f_n'(c)$ et par croissance de f_n', on a $f_n'(c) \geq f_n'(a)$ donc $(t-a)f_n'(c) \geq (t-a)f_n'(a)$. Même raisonnement avec $t < a$.

$\triangleright$ On pouvait établir l'inégalité demandée d'une autre façon avec $f_n(t) - f_n(a) = \displaystyle\int_a^t f_n'(s)ds$ et la croissance de f_n'.

2. a. Comme $(|Z| + \frac{1}{n})^2 = Z^2 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}|Z| \geq Z^2 + \frac{1}{n^2} = Z_n^2$, par croissance de la fonction racine carrée, on a : $Z_n \leq |Z| + \frac{1}{n}$. Par hypothèse, $E(|Z|)$ existe et la v.a constante égale à $\frac{1}{n}$ est d'espérance finie $\frac{1}{n}$, donc la somme $|Z| + \frac{1}{n}$ est une v.a. d'espérance finie (égale à $E(|Z|) + \frac{1}{n}$) et par comparaison de v.a. positives, Z_n est d'espérance finie.

2. b. La suite $(E(Z_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_{n+1} < Z_n$ d'où $E(Z_{n+1}) \leq E(Z_n)$ par propriété de l'espérance. De plus, elle est minorée par 0 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(Z_n) \geq 0$ car $Z_n \geq 0$. Donc elle converge vers une limite réelle positive par le théorème de la limite monotone.

2. c. On a : $|Z| \leq Z_n$ (comparer les carrés) et par 2. a. $Z_n \leq |Z| + \frac{1}{n}$. On en déduit par propriété de l'espérance que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(|Z|) \leq E(Z_n) \leq E(|Z|) + \frac{1}{n}.$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Z_n) = E(|Z|)$ par le théorème des gendarmes.

3. a. Comme X et $X+Y$ sont d'espérance finie, il en est de même de $f_n(X)$ et $f_n(X+Y)$ d'après 2. a. De plus, $f_n'(X)$ est une v.a bornée d'après 1. a. donc d'espérance finie et comme $|f_n'(X)Y| = |f_n'(X)||Y| \leq |Y|$, la v.a. $f_n'(X)Y$ est d'espérance finie par comparaison.

3. b. • Comme X et Y sont indépendantes, la v.a $f_n'(X)$ est indépendante de Y par transfert d'indépendance et, par propriété de l'espérance, $E(f_n'(X)\,Y) = E(f_n'(X))E(Y) = 0$ car $E(Y) = 0$.

• Soit $\omega \in \Omega$ (quelconque). Utilisons 1. b. avec les réels $a = X(\omega)$ et $t = X(\omega) + Y(\omega)$. On a donc :

$$f_n(X(\omega) + Y(\omega)) - f_n(X(\omega)) \geq f_n'(X(\omega))Y(\omega).$$

Autrement dit, on a l'inégalité suivante entre v.a. : $f_n(X+Y) - f_n(X) \geq f_n'(X)Y$.
D'où par propriété de l'espérance (croissance, linéarité) : $E(f_n(X+Y) - f_n(X)) \geq E(f_n'(X)Y)$ ou encore

$$E(f_n(X+Y)) \geq E(f_n(X))\ (*)$$

car $E(f_n'(X)Y) = 0$. Enfin grâce à 2. c. on obtient $E(|X+Y|) \geq E(|X|)$ en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $(*)$.

4. On a : $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ et la v.a. S_n est indépendante de X_{n+1} par le lemme des coalitions. De plus, $E(X_{n+1}) = 0$. On peut donc utiliser le résultat de la question précédente avec $X = S_n$ et $Y = X_{n+1}$:

$$E(|S_{n+1}| = E(|S_n + X_{n+1}|) \geq E(|S_n|).$$

La suite $(E(|S_n|))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien croissante.

Problème 4. 1. Posons $C = AB = (c_{ij})$. On a : $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \in \mathbb{R}^+$ (somme de termes positifs) et

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\,\underbrace{(\sum_{j=1}^{n} b_{kj})}_{=1} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$

donc $AB \in \Sigma_n$.

2. Si $A \in \Sigma_n$, la somme des termes de chaque ligne de A est égale à 1 et on a donc :

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $C = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas... la colonne nulle, 1 est donc une valeur propre de A et C appartient à l'espace propre $E_1(A)$.

3. Soient $A = (a_{ij}) \in \Sigma_n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de A.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tel que $AX = \lambda X$ (X est une colonne propre associée à la valeur propre λ).

Soient $M = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|) > 0$ (car $X \neq 0$) et $k \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_k| = M$. La $k^{\text{ième}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j = \lambda x_k.$$

Comme les coefficients de A sont positifs, l'inégalité triangulaire et les propriétés du module d'un complexe impliquent alors que :

$$|\lambda||x_k| = |\lambda x_k| = |\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{kj}||x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1}^{n} a_{kj}$$

car chaque $|x_j|$ est majoré par $M = |x_k|$. Après simplification par $|x_k| > 0$, on obtient $|\lambda| \leq 1$ car $\sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$.

4. a. La $k^{\text{ième}}$ ligne de l'égalité $AX = \lambda X$ s'écrit aussi : $(\lambda - a_{kk})x_k = \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}x_j$ et on a donc :

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}|x_j| \leq |x_k| \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}.$$

En simplifiant par $M = |x_k| > 0$, on obtient $|\lambda - a_{kk}| \leq \sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj}$, c'est-à-dire $|\lambda - a_{kk}| \leq 1 - a_{kk}$ car

$$\sum_{j=1, j\neq k}^{n} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - a_{kk} = 1 - a_{kk}.$$

4. b. *Rappel.* Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a : $|z| - |z'| \leq |z - z'|$ car $|z| = |z' + (z - z')| \leq |z'| + |z - z'|$ (inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$). Comme $|\lambda| = 1$ et $a_{kk} \geq 0$, on a donc :

$$1 - a_{kk} = |\lambda| - |a_{kk}| \leq |\lambda - a_{kk}|$$

et par conséquent avec **4. a.** : $|\lambda - a_{kk}| = 1 - a_{kk}$.

4. c. *Rappel.* Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a : $|z + z'|^2 = (z + z')(\overline{z + z'}) = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) = |z|^2 + |z'|^2 + 2\text{Re}\,(z\overline{z'})$.

D'après **4. b.** $|\lambda - a_{kk}|^2 = (1 - a_{kk})^2$. En développant cette égalité, on obtient :

$$|\lambda|^2 - 2a_{kk}\text{Re}\,(\lambda) + a_{kk}^2 = 1 - 2a_{kk} + a_{kk}^2,$$

c'est-à-dire : $a_{kk}\text{Re}\,(\lambda) = a_{kk}$ car $|\lambda| = 1$. Par hypothèse, a_{kk} est strictement positif donc $\text{Re}\,(\lambda) = 1$ et finalement $\lambda = 1$: en effet, $\text{Im}\,\lambda = 0$ car $1 = |\lambda|^2 = \text{Re}\,(\lambda)^2 + \text{Im}\,(\lambda)^2 = 1 + \text{Im}\,(\lambda)^2$.