**Exercice 1.** `[Exercice n° 6-TD 14]` Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $A^3+2A-3I_n = 0$.

---

*Indications :* Soit $A$ une telle matrice. Soit $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Justifier que $D^3 + 2D - 3I_n = 0$. En déduire $D = I_n$ et finalement $A = I_n$.

---

**Exercice 2.** `[Exercice n° 13-TD 14]` Soient $a$ et $b$ deux réels distincts. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable telle que $sp(A) = \{a, b\}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Vérifier qu'il existe deux réels $\alpha_k$ et $\beta_k$ que l'on calculera en fonction de $a$, $b$ et $k$, tels que :

$$A^k = \alpha_k A + \beta_k I_n.$$

---

*Solution :* Deux endomorphismes d'un espace vectoriel $E$ de dimension finie sont égaux ssi leurs matrices dans une base quelconque de $E$ sont égales. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à $A$. Comme $A^k$ est canoniquement associée à $f^k$, la question revient donc à déterminer les deux réels $\alpha_k$ et $\beta_k$ tels que $f^k = \alpha_k f + \beta_k Id_{\mathbb{R}^n}$. Par hypothèse, $\mathbb{R}^n = E_a(f) \oplus E_b(f)$. Soient $B_a$ une base de $E_a(f)$, et $B_b$ une base de $E_b(f)$. Alors $B = B_a \cup B_b$ est une base de $\mathbb{R}^n$ (constituée de vecteurs propres de $f$) et on a : $\mathrm{Mat}_B(f) = D = \mathrm{diag}(\underbrace{a, \dots, a}_{p fois}, \underbrace{b, \dots, b}_{q\,fois})$ avec $p = \dim E_a(f)$ et $q = \dim E_b(f)$. On en déduit que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{Mat}_B(f^k) = D^k = \mathrm{diag}(\underbrace{a^k, \dots, a^k}_{p fois}, \underbrace{b^k, \dots, b^k}_{q\,fois}).$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
f^k = \alpha_k f + \beta_k Id_{\mathbb{R}^n} \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_B(f^k) = \mathrm{Mat}_B(\alpha_k f + \beta_k Id_{\mathbb{R}^n}) \\
&\Leftrightarrow \quad D^k = \alpha_k D + \beta_k I_n \\
&\Leftrightarrow \quad a^k = \alpha_k\, a + \beta_k \text{ et } b^k = \alpha_k\, b + \beta_k \Leftrightarrow \alpha_k = \frac{b^k - a^k}{b-a} \text{ et } b^k = \frac{ba^k - ab^k}{b-a}.
\end{aligned}$$

Ainsi $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k = \dfrac{b^k - a^k}{b-a} A + \dfrac{ba^k - ab^k}{b-a} I_n \in \mathrm{Vect}(I_n, A)$.

*Autre rédaction posible : soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base de vecteurs propres $B$. On a : $A = PDP^{-1}$, $A^k = PD^kP^{-1}$, donc $A^k = \alpha_k A + \beta_k I_n \Leftrightarrow D^k = \alpha_k D + \beta_k I_n$.*

---

**Exercice 3.** `[Exercice n° 21-TD 14]` Soit $A = \begin{pmatrix} 11 & -5 & 5 \\ -5 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à la matrice $A$.

*Etude de la diagonalisabilité de $f$. Application au calcul d'une puissance de $f$.*

1. Déterminer les éléments propres de $f$.
2. a. Vérifier que $f$ est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^3$.
2. b. Déterminer $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et $D \in D_3(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.
3. Soit $A(X) = X(X-1)(X-16)$.
Déduire de 2. a. que $A(f) = f \circ (f - Id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 16Id_{\mathbb{R}^3})$ est l'endomorphisme nul.
4. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3.
a. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $X(X-1)(X-16)$.
b. En déduire qu'il existe un unique triplet $(a_n, b_n, c_n)$ que l'on précisera tel que $f^n = a_n f^2 + b_n f + c_n Id_{\mathbb{R}^3}$.

---

*Solution :* 1, 2. a, 2. b. On vérifie que $\chi_A(X) = X(X-1)(X-16)$ (commencer par effectuer l'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ sur $\chi_A(X)$).
Donc $f$ admet trois valeurs propres réelles : 0, 1 et 16.
Comme card $\mathrm{sp}_{\mathbb{R}}(f) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, $f$ est diagonalisable et chaque sous-espace propre de $f$ est de dimension 1.
On vérifie que :

$$E_0(f) = \mathrm{Vect}((0,1,1)),\ E_1(f) = \mathrm{Vect}((1,1,-1)) \text{ et } E_{16}(f) = \mathrm{Vect}((2,-1,1)).$$

Posons $\varepsilon_1 = (0,1,1)$, $\varepsilon_1 = (1,1,-1)$ et $\varepsilon_1 = (2,-1,1)$. Alors $(\varepsilon) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $E$, formée de vecteurs propres de $f$, et $D = Mat_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}(f) = \mathrm{diag}(0,1,16)$. Soit $P$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base de vecteurs propres $(\varepsilon)$. D'après le cours, $D = P^{-1}AP$.

3. Comme $f$ est diagonalisable, de valeurs propres distinctes 0, 1 et 16, on a : $\mathbb{R}^3 = E_0(f) \oplus E_1(f) \oplus E_{16}(f)$.

Notons $g$ l'endomorphisme $f \circ (f - Id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 16Id_{\mathbb{R}^3})$. Soit $u \in \mathbb{R}^3$. Alors $\exists!(a,b,c) \in E_0(f) \times E_1(f) \times E_{16}(f)$ tel que $u = a + b + c$. On vérifie que $g(c) = 0$, et comme deux « polynômes en $f$ » commutent, que l'on a aussi $g(b) = f \circ (f - 16Id_{\mathbb{R}^3})(f - Id_{\mathbb{R}^3})(b) = 0_{\mathbb{R}^3}$ et $g(a) = (f - 16Id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - Id_{\mathbb{R}^3})(f(a)) = 0_{\mathbb{R}^3}$. Donc $g(u) = g(a) + g(b) + g(c) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

*Autre méthode.* Vérifier directement que $D(D - I_3)(D - 16I_3) = O_3$ et en déduire que $A(A - I_3)(A - 16I_3) = O_3$.

*Remarque : on vient de démontrer que le polynôme caractéristique de $A$ (de $f$) est un polynôme annulateur de $A$ (de $f$). Rappelons que ce résultat, vrai en fait pour tout endomorphisme $f$, s'appelle le théorème de Cayley-Hamilton.*

4. a. et b. Il existe un unique couple $(Q_n, R_n) \in \mathbb{R}[X]^2$ avec $\deg R_n < \deg X(X-1)(X-16)$ tel que

$$X^n = X(X-1)(X-16)Q_n(X) + R_n(X). \tag{1}$$

Le reste $R_n$ de la division de $X^n$ par $X(X-1)(X-16)$ s'écrit donc $R_n(X) = a_nX^2 + b_nX + c_n$, avec $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$.

D'après (1) : $0^n = R_n(0)$, $1^n = R_n(1)$ et $16^n = R_n(16)$. C'est-à-dire $c_n = 0$, $a_n + b_n = 1$ et $256a_n + 16b_n = 16^n$.

Ce qui nous donne finalement : $a_n = \frac{16^{n-1}-1}{15}$, $b_n = \frac{16-16^{n-1}}{15}$ et $R_n(X) = \frac{16^{n-1}-1}{15}X^2 + \frac{16-16^{n-1}}{15}X$.

En outre, toujours d'après (1), $f^n = f \circ (f - Id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 16Id_{\mathbb{R}^3}) \circ Q_n(f) + R_n(f)$ et par conséquent

$$f^n = R_n(f) = a_n f^2 + b_n f$$

car, d'après 3. $f \circ (f - Id_{\mathbb{R}^3}) \circ (f - 16Id_{\mathbb{R}^3}) = \theta$. Donc pour tout $n \geq 3$, $f^n \in Vect(f, f^2)$.

---

**Exercice 4.** `[Exercice n° 27-TD 14]` Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})^2$ tel que $\chi_A(X) = \chi_B(X) = X^3 - 3X - 1$.
1. Vérifier que $X^3 - 3X - 1$ admet trois racines réelles distinctes.
2. Les matrices $A$ et $B$ sont-elles semblables ?

---

*Indications :* 1. Etudier les variations de la fonction polynôme $x \mapsto x^3 - 3x - 1$, dont la dérivée est $x \mapsto 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$.
2. La réponse est oui. Soient $a$, $b$ et $c$ les trois racines réelles distinctes du polynôme $X^3 - 3X - 1$. Comme $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (resp. $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$) admet trois valeurs propres réelles, $A$ et $B$ sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ : les deux matrices $A$ et $B$ sont toutes les deux semblables à la *même* matrice diagonale $D = \mathrm{diag}(a, b, c)$. Il existe donc $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$ et $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = QDQ^{-1}$. D'où $B = RAR^{-1}$ avec $R = QP^{-1} \in GL_3(\mathbb{R})$.

*Attention !* Deux matrices ayant le même polynôme caractéristique ne sont pas forcément semblables : la matrice élémentaire $E_{21}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ont toutes les deux $X^2$ comme polynôme caractéristique et pourtant elles ne sont pas semblables car la seule matrice semblable à la matrice nulle est la matrice nulle.

---

**Exercice 5.** `[Exercice n° 26-TD 14]` Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
1. On suppose $A$ inversible. Prouver que $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.
2. On suppose $A$ non inversible. Soit $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$, $k \in \mathbb{N}^*$.
a. Prouver qu'il existe $K \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall k \geq K$, $A_k \in GL_n(\mathbb{R})$.
b. En utilisant le résultat de 1. avec $A_k$ à la place de $A$, prouver que l'on a encore $\chi_{AB}(X) = \chi_{BA}(X)$.

---

*Solution :* 1. Supposons $A$ inversible. Comme $BA = A^{-1} \cdot AB \cdot A$, les matrices $AB$ et $BA$ sont donc semblables et ont par conséquent le même polynôme caractéristique (cf. cours).
2. a. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A$ admet au plus $n$ valeurs propres réelles. Remarquons que 0 est une valeur propre de $A$ car $A$ n'est pas inversible. Distinguons deux cas :

*a)* $A$ n'admet pas de valeur propre strictement positive : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k}$ n'est pas une valeur propre de $A$ et $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$ est donc inversible.

*b)* $A$ admet au moins une valeur propre strictement positive : notons $\alpha$ la plus petite valeur propre strictement positive de $A$. Il existe alors un entier $K \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \geq K$, $0 < \frac{1}{k} < \alpha$, c'est-à-dire tel que pour tout $k \geq K$, $A_k = A - \frac{1}{k} I_n$ est inversible.

2. b. D'après 1. et 2. a. pour tout $k \geq K$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det(xI_n - A_k B) = \det(xI_n - BA_k)$ $(*)$ car $A_k$ est inversible.

Il suffit maintenant de *faire tendre $k$ vers $+\infty$ dans* $(*)$ pour obtenir $\det(xI_n - AB) = \det(xI_n - BA)$ car, l'application déterminant : $M \mapsto \det(M)$ étant une application *continue* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, par caractérisation séquentielle de la continuité, on a : $\lim\limits_{k \to +\infty} xI_n - A_k B = xI_n - AB \Rightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} \det(xI_n - A_k B) = \det(xI_n - AB)$, idem $\lim\limits_{k \to +\infty} \det(xI_n - BA_k) = \det(xI_n - BA)$.

---

**Exercice 6.** `[Exercice n° 28-TD 14]` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{tr}(A) \neq 0$. On pose, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \mathrm{tr}(A)M - \mathrm{tr}(M)A$.

1. Vérifier que $f$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Déterminer les éléments propres de $f$ et justifier que $f$ est diagonalisable.

---

*Indications :* 2. On peut éviter les calculs grâce aux deux observations suivantes :

*i)* Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \mathrm{tr}(M) = 0\}$ : $H$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = \mathrm{tr}(A)M$. Donc $\mathrm{tr}(A)$ est une valeur propre de $f$ (il existe une matrice non nulle ayant pour trace 0 !) et $H \subset E_{\mathrm{tr}(A)}(f)$. En fait cette dernière inclusion est une égalité car $f(M) = \mathrm{tr}(A)M \Leftrightarrow -\mathrm{tr}(M)A = 0_n \Leftrightarrow \mathrm{tr}(M) = 0$ car $A \neq O_n$.

*ii)* De plus $f(A) = 0_n$. Donc 0 est une valeur propre de $f$ et $\mathrm{Vect}(A) \subset E_0(f) = \mathrm{Ker}\, f$. Cette dernière inclusion est aussi une égalité pour une raison de dimension : on sait que la somme $E_{\mathrm{tr}(A)}(f) + E_0(f)$ est directe donc $\dim(E_{\mathrm{tr}(A)}(f) + E_0(f)) = \dim E_{\mathrm{tr}(A)}(f) + \dim E_0(f) \geq (n^2 - 1) + 1 = n^2$. On a donc $E_{\mathrm{tr}(A)}(f) \oplus E_0(f) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En résumé, $f$ admet deux valeurs propres (distinctes) : 0 et $\mathrm{tr}(A)$. Les deux sous-espaces propres sont : $E_0(f) = \mathrm{Vect}(A) = \{\alpha A / \alpha \in \mathbb{R}\}$ et $E_{\mathrm{tr}(A)}(f) = H$. Et $f$ est diagonalisable car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = E_{\mathrm{tr}(A)}(f) \oplus E_0(f)$.

*Autre méthode.* Commencer par déterminer un polynôme annulateur de $f$.

---

**Exercice 7.** `[Exercice n° 29-TD 14]` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\chi_A(0) \neq 0$. Justifier que $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de $\chi_A$.

---

*Solution :* Rappelons que $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Donc $\chi_A(0) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$. Par conséquent :

$$\chi_A(0) \neq 0 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Pour trouver la relation entre $\chi_{A^{-1}}$ et $\chi_A$, considérons les fonctions polynômes associées en la variable $z \in \mathbb{C}$.
Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (on est conduit à diviser par $z$). On a :

$$\chi_{A^{-1}}(z) = \det(zI_n - A^{-1}) = \det((zA - I_n)A^{-1}) = \det(z(A - \frac{1}{z} I_n)A^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} z^n \cdot \chi_A(\frac{1}{z}).$$

Autrement dit, $\chi_{A^{-1}}(X) = \dfrac{(-1)^n}{\det(A)}\, X^n \cdot \chi_A(\dfrac{1}{X})$.

*Remarque : On pourra vérifier que $\chi_{A^{-1}}(X)$ est bien un polynôme de degré $n$ dont le terme de plus haut degré est $X^n$.*

---

**Exercice 8.** `[Exercice n° 30-TD 14]` Soit $A \in GL_6(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$ et $\mathrm{tr}(A) = 8$. Justifier que $A$ est diagonalisable et déterminer son polynôme caractéristique.

---

*Solution :* Comme $A$ est inversible, en multipliant par $A^{-1}$ l'égalité $A^3 - 3A^2 + 2A = 0$, on obtient $A^2 - 3A + 2I_n = 0$. Comme $(X-1)(X-2)$ est un polynôme annulateur de $A$, scindé à racines simples dans $\mathbb{R}[X]$, $A$ est diagonalisable par théorème. De plus les seules valeurs propres possibles de $A$ sont 1 et 2 (relire le complément de cours sur les polynômes annulateurs...) sachant que l'un au moins des réels 1 ou 2 est valeur propre : en effet, si 1 et 2 n'étaient pas des valeurs propres de $A$, la matrice $A^2 - 3A + 2I_n = (A - I_n)(A - 2I_n)$ serait inversible comme produit de deux matrices inversibles ce qui n'est pas le cas puisque $A^2 - 3A + 2I_n = 0$. En d'autres termes, le spectre de $A$ est à ce stade du raisonnement soit $\{1\}$, soit $\{2\}$, soit $\{1, 2\}$. Donc la polynôme caractéristique de $A$ s'écrit $(X-1)^{m_1}(X-2)^{m_2}$ où au moins l'un des deux entiers $m_1$, $m_2$ est non nul. Comme $d^0\chi_A(X) = 6$, $m_1 + m_2 = 6$ et comme $\mathrm{tr}(A) = m_1 + 2m_2 = 8$ (la matrice $A$ est semblable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire dont la diagonale comprend $m_1$ fois le 1 et $m_2$ fois le 2). Conclusion : $m_1 = 4$, $m_2 = 2$ et $\chi_A(X) = (X-1)^4(X-2)^2$.

---

**Exercice 9.** `[Exercice n° 32-TD 14]` Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2$ et $\mathrm{tr}(A) = n$.

1. $A$ est-elle trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

2. a. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Montrer que $\lambda$ n'est pas une valeur propre de $A$.

3. a. Prouver que 0 n'est pas une valeur propre de $A$.

3. b. En déduire que $A = I_n$.

---

*Indications :* 1. Oui d'après le cours car son polynôme caractéristique est scindé dans $\mathbb{C}[X]$.

2. Soit $\lambda$ une valeur propre complexe de $A$. Justifier que $\lambda^3 = \lambda^2$. En déduire que $\lambda \in \{0, 1\}$.

3. a. Montrer que si 0 est une valeur propre de $A$, alors $\mathrm{tr}(A) \neq n$.

3. b. Justifier que $A$ est inversible et utiliser $A^{-1}$.

---

**Exercice 10.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sans valeur propre réelle. Prouver que $\det(A) > 0$.

---

*Indications :* On rappelle que si $\lambda$ une valeur propre complexe non réelle de $A$, alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de $A$ de même ordre de multiplicité que $\lambda$. Justifier que $n$ est pair. Exprimer $\det(A)$ à l'aide des valeurs propres complexes de $A$.

---

**Exercice 11.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que 9 est une valeur propre de $A^2$. Prouver que $-3$ ou 3 est une valeur propre de $A$.

---

*Indications* : Raisonner par l'absurde. On rappelle qu'un produit de deux matrices inversibles est inversible.

*Autre méthode* : utiliser le polynôme caractéristique.

---

**Exercice 12.** Vérifier que l'on définit un endomorphisme $f$ de $\mathbb{R}_n[X]$ en posant : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = (X-1)P'(X)$.

Déterminer les éléments propres de $f$. $f$ est-il un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$ ?

---

*Indications pour la recherche des éléments propres* : On rappelle que $f$ admet au plus $n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$ valeurs propres réelles distinctes. Un réel $\lambda$ est valeur propre de $f$ ssi il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $f(P) = (X-1)P'(X) = \lambda P$, donc ssi il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$, non nul, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x-1)P'(x) - \lambda P(x) = 0$. En d'autres termes, $\lambda$ est une valeur propre de $f$ ssi l'équation différentielle

$$\mathcal{H} \,:\, (x-1)y'(x) - \lambda y(x) = 0$$

admet une solution polynomiale non nulle sur $\mathbb{R}$. Résoudre $\mathcal{H}$ sur $]1, +\infty[$. En déduire les valeurs de $\lambda$ pour lesquelles $\mathcal{H}$ admet des solutions polynomiales sur $\mathbb{R}$ (autres que la fonction nulle) et conclure.

**Exercice 13.** Soient $p$ et $q$ deux projecteurs d'un espace vectoriel $E$ tels que : $p \circ q = q \circ p$.
Montrer que 2 est une valeur propre de $p+q$ si et seulement si Im $p \cap$ Im $q \neq \{0_E\}$.

---

*Indications.* $\Leftarrow$ Soit $v \neq 0_E$ tel que $v \in$ Im $p \cap$ Im $q$. Calculer $(p+q)(v)$ et conclure.
$\Rightarrow$ Soit $u \neq 0_E$ tel que $(p+q)(u) = 2u$. Montrer que $(p \circ q)(u) = p(u)$ et $(q \circ p)(u) = q(u)$. Vérifier que $p(u)$ est non nul et conclure.

---

**Exercice 14.** Soit $E$ un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2Id_E = \theta$ (l'endomorphisme nul de $E$).
1. a. Prouver que $f$ est bijectif et exprimer $f^{-1}$ à l'aide de $f$.
1. b. Vérifier que Im $(f + Id) \subset$ Ker$(f - 2Id)$.
2. Quelles sont les valeurs propres possibles de $f$ ?
3. Prouver que $E =$ Im $(f + Id) \oplus$ Ker$(f - 2Id)$.
4. On suppose $E$ de dimension finie. Prouver que Im $(f + Id) =$ Ker$(f - 2Id)$.

---

*Indications.* 1. a. Remarquer que $f \circ (f - Id_E) = 2Id_E$.
1. b. Remarquer que $f^2 - f - 2Id_E = (f - 2Id_E) \circ (f + Id_E)$.
2. Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ et $u$ un vecteur propre associé. Calculer $(f^2 - f - 2Id_E)(u)$. En déduire que $-1$ et 2 sont les seules valeurs propres possibles de $f$.
3. Raisonner par analyse-synthèse.
4. Utiliser 1. b, 3, et le théorème du rang.

---

**Exercice 15.** `[10 points]` *Vrai ou faux ?*

*Réponse juste : 1 point, réponse fausse : -0.5 point, pas de réponse : 0 point.*

**1**. Il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_7(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I_3 = 0$.

**2.** Une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, non diagonale, n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

**3.** Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors :

**3. a.** $\det(XI_3 - A) = (X-3)((X+1)^2 + 1)$.

**3. b.** $A$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

**3. c.** $A$ est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

**3. d.** $A$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

**4.** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

**4. a.** Si sp$(f) = \{1, 2, 3\}$ et si $\dim E = 3$, alors $f$ est diagonalisable.

**4. b.** Si $\dim E \geq 3$ et sp$(f) = \{1, 2, 3\}$, alors $f$ est bijective.

**4. c.** Si $f$ est diagonalisable, alors $f^2$ est diagonalisable.

**4. d.** Si $f^2$ est diagonalisable, alors $f$ est diagonalisable.

---

**Exercice 16.** `[10 points]` *Vrai ou faux ?*

*Réponse juste : 1 point, réponse fausse : -0.5 point, pas de réponse : 0 point.*

**1**. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX = \lambda X$.

**2.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $A$ est inversible si et seulement si $\chi_A(0) \neq 0$.

**3.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $Sp(A) = \{-1, 2, 3\}$.

**3. a.** 9 est une valeur propre de $A^2$.

**3. b.** $A$ est inversible et $Sp(A^{-1}) = \{-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

**3. c.** 6 est une valeur propre de $A + 7I_n$ et $E_6(A + 7I_n) = E_{-1}(A)$.

**3. d.** Si $n = 4$ et $A$ est diagonalisable, il y a un seul sous-espace propre de $A$ de dimension 2.

**4.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A \neq 0$, $A \neq 5I_n$, et $A^2 = 5A$.

**4. a.** $Sp(A) \subset \{0, 5\}$.

**4. b.** $Sp(A) = \{0, 5\}$ car $A$ et $A - 5I_n$ ne sont pas inversibles.

**5.** La seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telle que $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{3\}$, est la matrice $3I_n$.

**6.** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Il y a exactement trois droites vectorielles stables par $f$.