

# Interféromètre à division du front d'onde : trous et fentes d'Young

## Sommaire

<b>I</b>	<b>Description de l'interféromètre des trous d'Young</b>	<b>2</b>
<b>II</b>	<b>Éclairage par une source ponctuelle monochromatique</b>	<b>3</b>
II.1	Différence de chemins optiques au point M dans le cas où la source est située sur la médiatrice des deux trous . . . . .	3
II.2	Intensité lumineuse et forme des franges observées . . . . .	4
II.3	Translation de la source ponctuelle primaire S . . . . .	5
<b>III</b>	<b>Du dispositif-modèle au dispositif réel</b>	<b>7</b>
III.1	Interféromètre des fentes d'Young éclairé par une fente source monochromatique . . . . .	7
III.2	Utilisation de lentilles : montage de Fraunhofer . . . . .	8
<b>IV</b>	<b>Eclairage par une source étendue spatialement monochromatique : notion de cohérence spatiale</b>	<b>10</b>
IV.1	Cas particulier : éclairage par deux sources distinctes monochromatiques . . . . .	11
IV.2	Cas général : source étendue spatialement monochromatique . . . . .	12
<b>V</b>	<b>Eclairage par une source ponctuelle polychromatique : notion de cohérence temporelle</b>	<b>13</b>
V.1	Cas particulier : éclairage par une source ponctuelle possédant un doublet spectral . . . . .	13
V.2	Cas général : source ponctuelle avec un spectre étendu . . . . .	16
V.3	Observation en lumière blanche . . . . .	17
	<b>Exercices</b>	<b>20</b>

## Questions de cours

- Interféromètre des trous d'Young avec point source monochromatique sur ou hors de l'axe optique : démonstration de l'ordre d'interférences, conséquences (forme des franges, interfrange, effet de la translation du point source)
- Interféromètre des fentes d'Young : effet de la diffraction sur la figure d'interférences, intérêt expérimental par rapport aux trous d'Young, présentation du montage de Fraunhofer et de son intérêt expérimental
- Interféromètre des trous d'Young dans la configuration de Fraunhofer avec point source monochromatique sur ou hors de l'axe optique : présentation, démonstration de l'ordre d'interférences, conséquences (forme des franges, interfrange, effet de la translation du point source)
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source étendue monochromatique : description qualitative de l'effet de l'élargissement spatial de la source, critère semi-quantitatif de brouillage, application de ce critère au cas d'une source primaire carrée de côté  $h$
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source ponctuelle polychromatique : description qualitative de l'effet de l'élargissement spectral de la source, critère semi-quantitatif de brouillage, application de ce critère au cas d'une source de largeur spectrale  $\Delta\nu$
- Interféromètre des trous d'Young éclairé par une source ponctuelle blanche : description qualitative, spectre cannelé, longueurs d'onde des cannelures en un point  $M$  fixé

*Prise de notes* : Les deux prochains chapitres d'optique sont consacrés à deux grands exemples d'interféromètres (= systèmes créant des interférences) : trous d'Young, puis interféromètre de Michelson.

Les interféromètres permettent des mesures très fines, irréalisables avec d'autres instruments de mesure, car on passe d'une frange brillante à une autre dès que la différence de chemins optiques  $\delta(M)$  varie de  $\lambda_0 \sim 0.5 \mu\text{m}$  : on est donc sensible à des variations infimes de longueurs ! Citons alors quelques mesures précises réalisables avec un interféromètre :

★

- longueur d'une lame introduite, ou de défaut de surface
- taille d'une source lumineuse / écart angulaire entre deux étoiles non distinguables avec un télescope
- indice optique d'un milieu
- longueur d'onde de la source / écart entre deux longueurs d'onde très proches (moins de 1 nm)

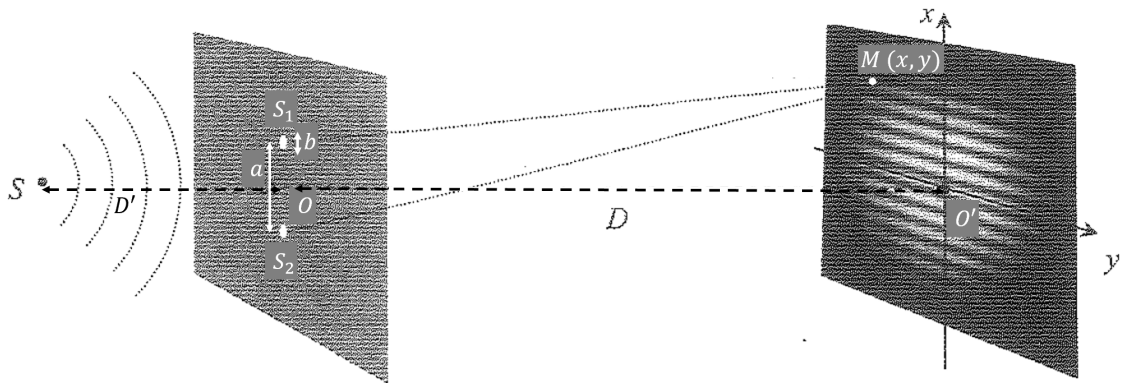
Du point de vue pragmatique, l'idée est d'appliquer les concepts des chapitres OO1 et OO2 au cas le plus simple pour obtenir des interférences : les trous d'Young

Ce chapitre a quatre objectifs principaux :

1. Distinguer les deux méthodes de calcul de la différence de chemins optiques  $\delta(M)$  suivant si des lentilles sont présentes ou non.
2. Déterminer l'interfrange connaissant  $\delta(M)$ .
3. Distinguer les deux types possibles de brouillage des franges : élargissement spatial de la source (problème de cohérence spatiale) ou élargissement spectral de la source (problème de cohérence temporelle).
4. Utiliser un critère semi-quantitatif de brouillage des franges.

## I Description de l'interféromètre des trous d'Young

On choisit un système de coordonnées cartésiennes  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ .



Une source primaire  $S$ , que l'on supposera pour l'instant ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  dans le vide, éclaire un écran opaque percé de deux trous  $S_1$  et  $S_2$ . On appelle  $S_1$  et  $S_2$  les sources secondaires. Ces deux sources secondaires émettent des ondes qui se superposent en un point  $M$  de coordonnées  $M(x, y, z = D)$ .

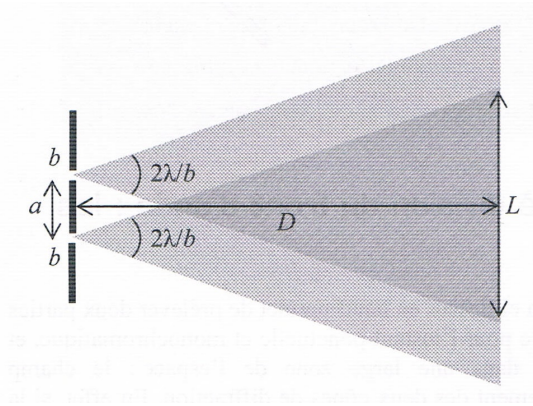
On étudie l'interféromètre dans les conditions de Gauss, de sorte à pouvoir utiliser l'approximation scalaire de l'optique ondulatoire. On choisit de placer la source à grande distance finie et d'observer à grande distance finie des trous d'Young. On supposera donc que  $D' \gg a$ ,  $D \gg a$ ,  $D \gg |x|$  et  $D \gg |y|$ .

Pourquoi observe-t-on des interférences en  $M$  ?

Cause 1 : La source primaire  $S$  étant ponctuelle et monochromatique (implique que  $\ell_c \rightarrow +\infty$ ), les deux ondes sont synchrones et cohérentes entre elles. Elles interfèrent donc aux points  $M$  où elles se superposent. La zone de superposition des deux ondes est appelé le champ d'interférences.

★

Cause 2 : En choisissant le diamètre  $b$  des trous d'Young suffisamment petit ( $b < 1000\lambda_0 \sim 0.5 \text{ mm}$ ), les trous d'Young diffractent l'onde primaire. Cette diffraction est indispensable pour qu'il existe une zone de recouvrement des deux faisceaux lumineux, et donc pour pouvoir observer des interférences. Dans le cas contraire, le champ d'interférences serait nul.



Un trou de diamètre  $b$  va essentiellement diffracter dans un cône de demi-angle au sommet  $\frac{\lambda_0}{b}$  autour de la direction de l'optique géométrique. On en déduit que sur l'écran, la zone d'interférences a pour largeur  $L \simeq \frac{2\lambda_0 D}{b}$ . Ainsi, la largeur  $b$  des trous d'Young a un effet sur la largeur totale de la zone d'interférences.

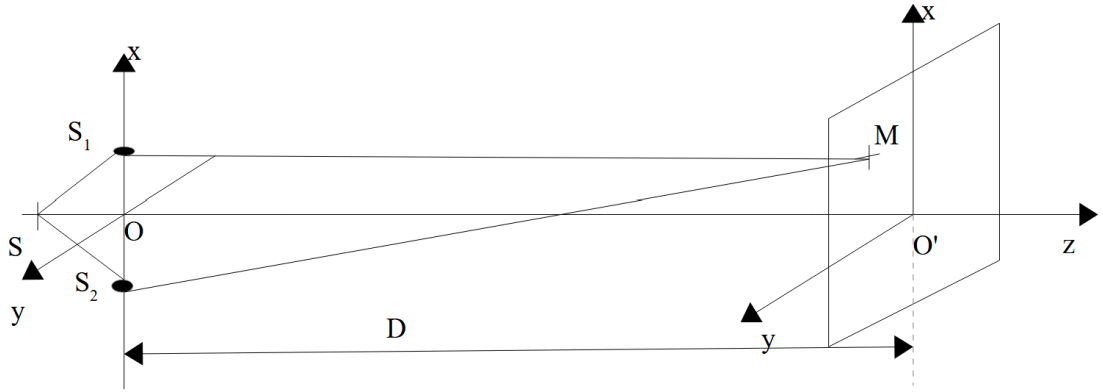
Notons que, à condition de respecter les conditions de Gauss, on peut placer l'écran n'importe où derrière les trous d'Young et observer des interférences. On dit que **les interférences sont non localisées**.

On appelle ce type d'interféromètre **un interféromètre à division du front d'onde**, car seules deux portions distinctes de la surface d'onde issue de  $S$  et arrivant aux trous d'Young serviront à créer les interférences en  $M$ .

## II Éclairage par une source ponctuelle monochromatique

### II.1 Différence de chemins optiques au point $M$ dans le cas où la source est située sur la médiatrice des deux trous

L'étude sera faite dans un milieu diélectrique linéaire homogène, isotrope (DLHI) et transparent d'indice optique  $n$ . La première étape du calcul de l'intensité lumineuse sur l'écran est de déterminer la différence de chemins optiques  $\delta(M)$ .



Les coordonnées des points  $M$ ,  $S_1$  et  $S_2$  sont :  $M(x,y,D)$ ,  $S_1(\frac{a}{2},0,0)$  et  $S_2(-\frac{a}{2},0,0)$ .

On a :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) + (S_2M) - (SS_1) - (S_1M)$$

Dans chaque chemin optique, les deux points considérés sont sur le même rayon lumineux :

$$\delta(M) = n(SS_2 - SS_1 + S_2M - S_1M)$$

Comme  $S$  est sur la médiatrice de  $[S_1S_2]$ , on a  $SS_1 = SS_2$ . Donc :  $\delta(M) = n(S_2M - S_1M)$

★

Les coordonnées des points permettent de déterminer :

$$S_1M = \sqrt{(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2} \quad \text{et} \quad S_2M = \sqrt{(x + \frac{a}{2})^2 + y^2 + D^2}$$

Or,  $D \gg a, |x|, |y|$ . On réalise donc un développement limité :

$$\delta(M) = \dots = \frac{na x}{D}$$

On en déduit la différence des phases se superposant en  $M$  :

$$\varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = \frac{2\pi na x}{\lambda_0 D}$$

ainsi que l'ordre d'interférences en  $M$  :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{na x}{\lambda_0 D}$$

## II.2 Intensité lumineuse et forme des franges observées

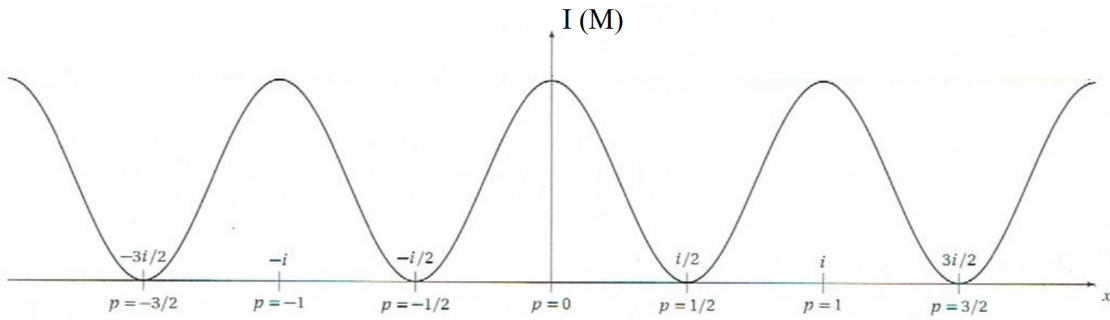
On considère que les deux vibrations lumineuses ont la même amplitude, et donc la même intensité lumineuse  $I_0$ . La formule de Fresnel donne alors l'intensité lumineuse en  $M$  :

$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi na x}{\lambda_0 D} \right) \right)$$

★

Les franges sont les points  $M$  vérifiant  $I(M) = \text{cste} \iff x = \text{cste}$ . Les franges sont donc rectilignes, de direction  $\vec{e}_y$ .

Représentons l'intensité lumineuse  $I(x)$  en fonction du point  $x$ .



Les franges brillantes sont situées aux points d'abscisses  $x_k$  tels que :

$$p(M) = \frac{na x_k}{\lambda_0 D} = k \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{k \lambda_0 D}{na}$$

★

L'écart entre deux franges brillantes successives est  $x_{k+1} - x_k = i = \frac{\lambda_0 D}{na}$ . On appelle cet écart l'interfrange  $i$ .

On remarque qu'en  $x = 0$ , on obtient la frange brillante d'ordre d'interférence nul. On l'appelle frange centrale.

Les franges sombres sont situées aux points d'abscisses  $x_k$  tels que :

★

$$p(M) = \frac{na x_k}{\lambda_0 D} = k + \frac{1}{2} \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_k = \frac{k \lambda_0 D}{na} + \frac{\lambda_0 D}{2na}$$

L'écart entre deux franges sombres successives est  $x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{na} = i$ , équivalent également à l'interfrange.

Evaluation du nombre de franges visibles sur l'écran :

On se place dans le cas de l'air :  $n = 1$ . Sur l'écran, la largeur  $L$  du champ d'interférences est associé à la diffraction par les trous d'Young :  $L \simeq \frac{2\lambda_0 D}{b}$ .

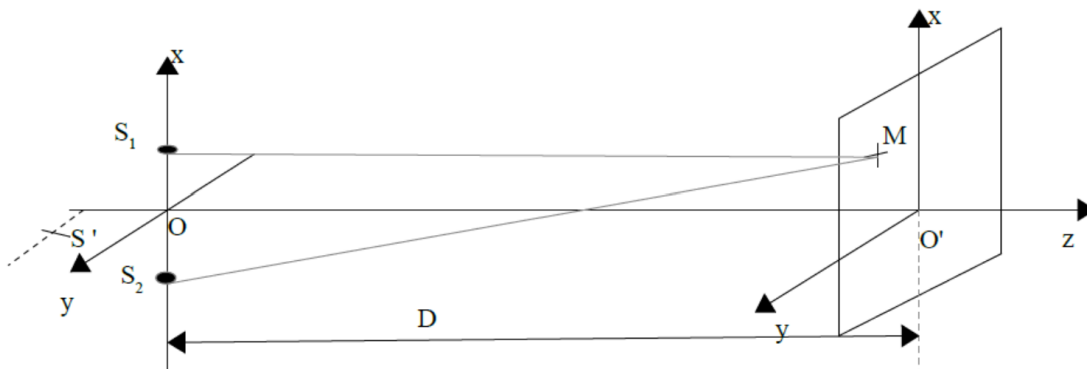
On estime le nombre  $N$  de franges brillantes visibles sur l'écran comme :

$$N = \frac{L}{i} = \frac{2\lambda_0 D a}{b \lambda_0 D} = \frac{2a}{b}$$

En prenant  $a = 1 \text{ mm}$  et  $b = 200 \mu\text{m}$ , on estime  $N = 10$ . Seule une dizaine de franges brillantes seront visibles expérimentalement sur l'écran.

## II.3 Translation de la source ponctuelle primaire S

### a Translation de S selon $y$



On translate la source ponctuelle primaire selon  $\vec{e}_y$ . Appelons  $S'$  la nouvelle position de cette source primaire.

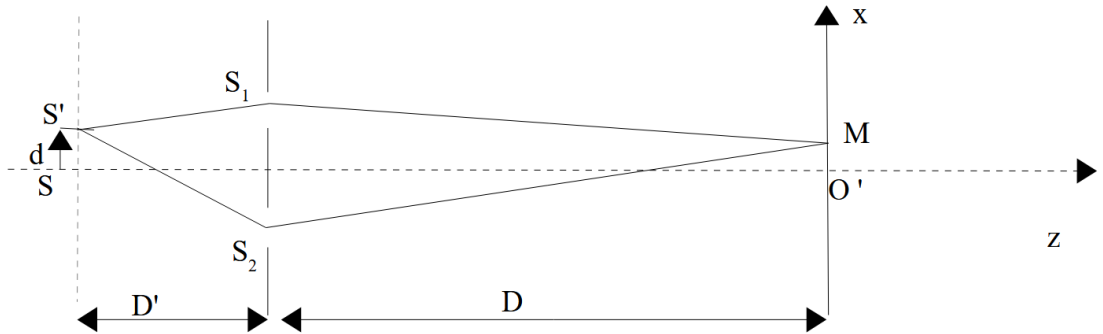
Géométriquement, on a toujours  $(S'S_1) = (S'S_2)$ . Donc, la différence de chemins optiques est toujours :

$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S_2M) - (S_1M) = \delta(M) = \frac{na x}{D}$$

La translation de la source primaire selon  $\vec{e}_y$  ne modifie pas la différence de chemins optiques, et ne modifie donc pas la figure d'interférences observée.

### b Translation de S selon x

La différence de chemins optiques étant indépendante de  $y$ , on travaillera désormais avec des schémas plans du dispositif interférentiel.



On translate la source ponctuelle primaire selon  $\vec{e}_x$ . Appelons  $S'$  la nouvelle position de cette source primaire.

Cette fois-ci,  $(S'S_2) \neq (S'S_1)$ , ce qui va avoir un impact sur la figure d'interférences. La différence de chemins optiques s'écrit :

$$\delta'(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

Si  $d \ll D'$  et  $a \ll D'$ , alors la différence de chemins optiques  $(S'S_2) - (S'S_1)$  se calcule exactement de la même manière que la différence des chemins optiques  $(S_2M) - (S_1M)$ .  
Donc :

$$\star \quad \delta'(M) = \frac{nad}{D'} + \frac{na x}{D}$$

L'ordre d'interférences est :

$$p(M) = \frac{\delta'(M)}{\lambda_0} = \frac{nad}{\lambda_0 D'} + \frac{na x}{\lambda_0 D}$$

Déterminons par exemple la position des franges brillantes.

Les franges brillantes vérifient  $p(M) = k$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Ceci est vérifié pour

$$\frac{nad}{\lambda_0 D'} + \frac{na x_k}{\lambda_0 D} = k \iff x_k = k \frac{\lambda_0 D}{na} - \frac{dD}{D'}$$

★ L'interfrange est :

$$i = x_{k+1} - x_k = \frac{\lambda_0 D}{na}$$

inchangé par rapport au cas de  $S$  sur la médiatrice de  $[S_1 S_2]$ .

La frange d'ordre 0 se trouve en  $x_0 = -\frac{dD}{D'}$  : toutes les franges ont été translatées.

La translation verticale vers le haut de la source primaire a provoqué un déplacement en bloc vers la bas de la figure d'interférence, l'interfrange restant inchangé.

On peut en effet donner l'intensité lumineuse sur l'écran dans le cas de la translation de la source primaire selon  $\vec{e}_x$ . D'après la formule de Fresnel :

$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{nad}{D'} + \frac{nax}{D} \right) \right) \right)$$

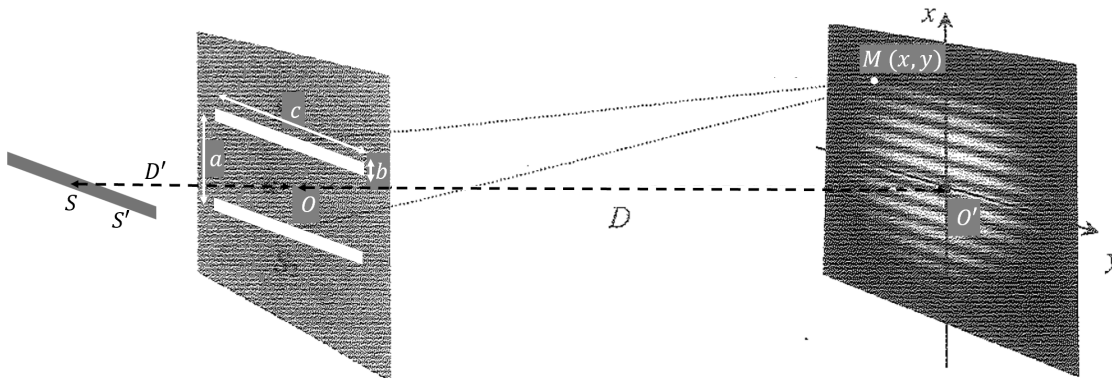
**Remarque :** Pour trouver le sens du décalage des franges, on peut faire une étude qualitative en s'intéressant à la frange d'ordre 0. L'ordre 0 correspond à l'égalité des chemins optiques des deux vibrations lumineuses, depuis la source primaire au point  $M$ .

- Si la source  $S$  est sur l'axe  $(Oz)$ ,  $(SS_2) = (SS_1)$  : la différence de chemins optiques est nulle lorsque  $(S_2M) = (S_1M)$ , c'est à dire lorsque  $M$  est confondu avec  $O'$ .
- Si la source est translatée vers le haut à la position  $S'$ ,  $(S'S_2) > (S'S_1)$  : le point  $M$  pour lequel l'ordre d'interférence est nul est donc tel que  $(S_2M) < (S_1M)$ . Le point  $M$  est donc situé sous le point  $O'$  ce qui implique une translation des franges vers le bas.
- Inversement, si la source est translatée vers le bas à la position  $S'$ ,  $(S'S_2) < (S'S_1)$  : le point  $M$  pour lequel l'ordre d'interférence est nul est donc tel que  $(S_2M) > (S_1M)$ . Le point  $M$  est donc situé au-dessus du point  $O'$  ce qui implique une translation des franges vers le haut.

### III Du dispositif-modèle au dispositif réel

#### III.1 Interféromètre des fentes d'Young éclairé par une fente source monochromatique

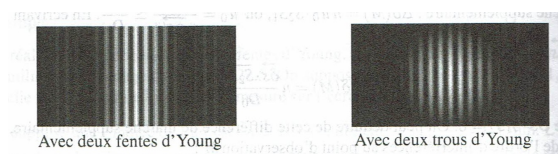
L'interféromètre des fentes d'Young se schématise comme suit :



En guise d'ordre de grandeur, les fentes d'Young utilisées en TP ont des tailles  $a \sim 500 \mu\text{m}$ ,  $b \sim 100 \mu\text{m}$  et  $c \sim 2.5 \text{ cm}$ .

Aspect visuel de la figure d'interférences :

Comparons les aspects visuels des figures d'interférences dans le cas de l'interféromètre des fentes d'Young et des trous d'Young, éclairés dans les deux cas par une fente source fine monochromatique de même longueur d'onde  $\lambda_0$ . La fente source s'étend suivant l'axe  $(Sy)$ .



★ Les deux figures d'interférences possèdent le même interfrange, et permettent donc toutes les deux d'analyser les mêmes caractéristiques de l'interféromètre et de la source lumineuse. En revanche, la figure obtenue avec les fentes d'Young est plus lumineuse et plus étendue que celle obtenue avec les trous d'Young. On privilégiera donc expérimentalement l'utilisation des fentes d'Young aux trous d'Young.



Dans la suite, nous cherchons à justifier rapidement la forme de la figure d'interférences obtenue avec les fentes d'Young, et en particulier à comprendre pourquoi l'interfrange est identique au cas de l'interféromètre des trous d'Young.

Effet de la diffraction :

- ★ Rappelons qu'il n'y a diffraction que si la taille de l'obstacle est inférieure à  $1000\lambda \sim 500\ \mu\text{m}$ . Dans le cas des fentes d'Young,  $b < 1000\lambda$  mais  $c > 1000\lambda$  : il y a donc diffraction selon la direction  $(Ox)$  mais pas selon la direction  $(Oy)$ .

Ainsi, pour un point source  $S'$  fixé et un point  $M$  fixé sur l'écran, il n'y a que deux rayons lumineux allant de  $S'$  à  $M$ . De plus, si les points  $S_1$  et  $S_2$  situés sur les fentes d'Young sont tous deux traduits de la même manière selon  $\vec{e}_y$ , cela ne modifie pas la différence des chemins optiques. Ainsi, la différence de chemins optiques des deux seuls rayons lumineux allant de  $S'$  à  $M$  est toujours  $\delta = \frac{na x}{D}$  : chaque point source  $S'$  de la fente source donne un système de franges rectilignes d'interfrange  $i = \frac{\lambda_0 D}{na}$ .

**Remarque :** Dans le cas des trous d'Young, le diamètre  $b$  des trous vérifie  $b < 1000\lambda$  : il y a diffraction selon les deux directions  $(Ox)$  et  $(Oy)$ .

Effet de la fente source :

On a vu que la translation selon  $\vec{e}_y$  de la source primaire n'avait aucun effet sur la figure d'interférences observée. Ainsi, chaque point source  $S'$  de la fente crée exactement le même système de franges.

Or, deux points sources primaires  $S$  et  $S'$  différents donnent des ondes incohérentes entre elles : l'intensité observée sur l'écran est la somme des intensités créées par chaque point source primaire. Ainsi, la figure d'interférences est constituée de franges rectilignes d'interfrange  $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ .

### Raisonnement théorique VS pratique expérimentale

Théoriquement, on raisonnera toujours sur l'interféromètre des trous d'Young pour mener les calculs. En revanche, pour améliorer la luminosité et l'extension des franges, on réalisera toujours les montages expérimentaux avec des fentes d'Young. Les résultats trouvés avec l'un des interféromètres sont directement applicables à l'autre interféromètre.

## III.2 Utilisation de lentilles : montage de Fraunhofer

### a Description du montage de Fraunhofer

On souhaite étudier l'interféromètre des fentes d'Young expérimentalement. Pour pouvoir utiliser les résultats théoriques de la partie II, il faut se placer dans les conditions de Gauss et pouvoir considérer que la source et l'écran sont situés à des distances des fentes d'Young bien plus grandes que toutes les autres distances caractéristiques du problème.

En pratique, comme on ne peut pas placer la source et l'écran à l'infini, la solution est d'utiliser des lentilles convergentes.

- ★ On se ramène à une situation équivalente à une source primaire à l'infini en plaçant la source  $S$  dans le plan focal objet d'une lentille convergente. Du point de vue ondulatoire, cela revient à éclairer les fentes d'Young avec une onde plane.
- ★ Schéma avec  $S$  et  $\theta$ .
- ★ On se ramène à une situation équivalente à un écran à l'infini en plaçant l'écran dans le plan focal image d'une lentille convergente. Ainsi, deux rayons lumineux arrivant en un point  $M$  de l'écran seront issus de rayons lumineux parallèles entre eux avant la lentille.



## Montage de Fraunhofer

Le montage de Fraunhofer consiste à placer la source primaire dans le plan focal objet d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_1$ ), puis de placer le système des fentes d'Young et d'observer les interférences sur un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente ( $\mathcal{L}_2$ ).

★ Ne pas lire ce texte, mais faire une sorte de schéma synoptique bilan.

Ce montage permet simplement de se ramener expérimentalement à la situation théorique d'une source primaire à l'infini et d'un écran à l'infini.

**Remarque :** Autre avantage du montage de Fraunhofer : L'amplitude d'une onde diffractée dans la direction fixée par l'angle  $\theta$  dépend de cet angle  $\theta$ . Le montage de Fraunhofer permet de faire interférer entre eux des ondes diffractées dans la même direction  $\theta$  et donc des ondes avec des intensités lumineuses similaires. On se place alors dans la situation optimale pour améliorer le contraste obtenu sur la figure d'interférences (cf. chapitre OO2).

## b Calcul de la différence de chemins optiques dans le cas où la source primaire est sur l'axe optique

Dans la suite, on mène un raisonnement théorique sur une source primaire ponctuelle à travers des trous d'Young.

Considérons pour le moment la situation simplifiée où la source primaire  $S$  est sur l'axe optique du montage. La différence de chemins optiques s'exprime :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (SS_2) - (SS_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

★



Il ne faut pas calculer les chemins optiques de rayons lumineux traversant des lentilles en se basant sur les trajets géométriques du schéma avec des lentilles minces. On doit utiliser le théorème de Malus.

D'après le théorème de Malus,  $S_1$  et  $S_2$  sont sur la même surface d'onde. Comme  $S_1$  et  $S_2$  sont situés sur des rayons lumineux issus de la même source  $S$  et que l'optique géométrique s'applique entre ces points, on a :

$$(SS_1) = (SS_2)$$

**Remarque :** Rédaction : On pourra se contenter d'écrire que "D'après le théorème de Malus,  $S_1$  et  $S_2$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S$ ".

De même, on peut appliquer le théorème de Malus après les trous d'Young :  $S_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde. Mais attention, en  $S_1$  et  $S_2$  s'est produit un phénomène de diffraction ! Donc, les lois de l'optique géométrique ne s'appliquent pas en  $S_1$  et en  $S_2$ . A-t-on alors le droit d'écrire que  $(SS_1) = (SH)$  ?

★

Etre sur la même surface d'onde signifie que l'onde en  $S_1$  et en  $H$  est en phase :  $\varphi(S_1) = \varphi(H)$ . Mais comme l'optique géométrique n'est pas vérifiée en  $S_2$ , on ne peut plus écrire que  $\varphi(H) = \varphi(S) + \frac{2\pi}{\lambda_0}(SH)$ . Donc a priori,  $(SS_1) \neq (SH)$  !!!

Comment traduire alors que  $S_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde ?

Imaginons momentanément que l'on place une source ponctuelle au point  $M$ . Par principe de retour inverse de la lumière, les trajets géométriques suivis par les rayons lumineux issus de  $M$  sont identiques à ceux tracés ci-dessus. En particulier, on peut considérer deux rayons lumineux issus de  $M$  et arrivant en  $S_1$  et en  $H$ .

Cette fois, l'optique géométrique est vérifiée entre  $M$  et  $S_1$  et entre  $M$  et  $H$ . Donc,

$$(MS_1) = (MH) \iff (S_1M) = (HM)$$

★

**Remarque :** Rédaction : On pourra se contenter d'écrire : "D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière,  $S_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde relative à  $M$ ."

Ainsi, la différence de chemins optiques en  $M$  s'écrit :

$$\delta(M) = (S_2M) - (S_1M) = (S_2H) + (HM) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H$$

car  $S_2$  et  $H$  sont sur le même rayon lumineux.

★ Cf. poly MP page 7

Ainsi, l'ordre d'interférences en  $M$  est :

$$p(M) = \frac{\delta(M)}{\lambda_0} = \frac{nax}{\lambda_0 f'_2}$$

On en déduit que les franges sont rectilignes d'équation  $x = \text{cste}$  et que l'interfrange  $i$  vérifie :

$$1 = \frac{nai}{\lambda_0 f'_2} \iff i = \frac{\lambda_0 f'_2}{na}$$

On peut écrire l'intensité lumineuse sur l'écran :

$$I(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{nax}{f'_2} \right) \right)$$

### c Calcul de la différence de chemins optiques dans le cas où la source primaire est à une distance $d$ de l'axe optique

Considérons le cas général du montage de Fraunhofer où la source optique primaire  $S'$  est à une distance  $d$  de l'axe optique.

★ Schéma

La différence de chemins optiques est :

$$\delta(M) = (S'S_2M) - (S'S_1M) = (S'S_2) - (S'S_1) + (S_2M) - (S_1M)$$

★ Poly MP p. 8

De plus, d'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière,  $S_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde relative à  $M$ . Donc :  $(S_1M) = (HM)$ . Ainsi :

$$(S_2M) - (S_1M) = (S_2H) = nS_2H = na \sin(\theta)$$

car  $S_2$  et  $H$  sont sur le même rayon lumineux.

On en déduit que :  $\delta(M) = na (\sin(\theta) - \sin(\alpha))$ .

★ Poly MP p. 8

La frange centrale d'ordre 0 est donc dans la direction  $\theta_0 = \alpha$  : elle se forme au niveau de l'image géométrique de la source  $S'$  à travers les deux lentilles.

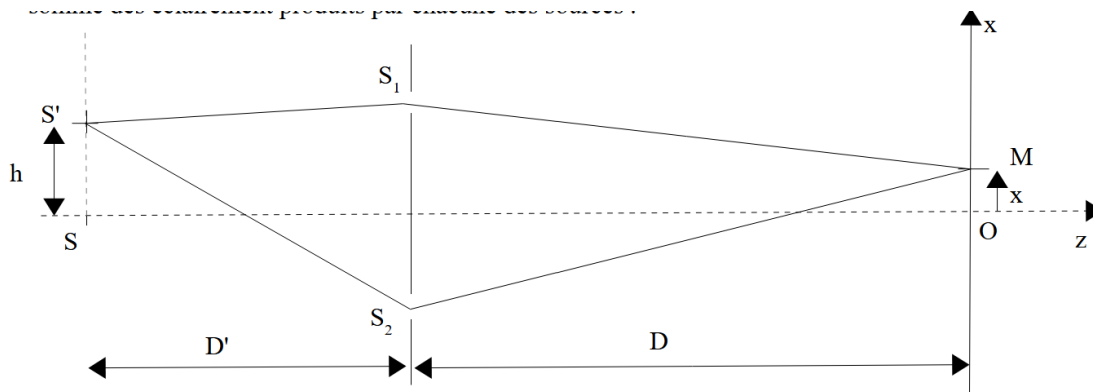
## IV Eclairage par une source étendue spatialement monochromatique : notion de cohérence spatiale

L'étude sera menée à partir du montage de base des trous d'Young placés dans l'air  $n = 1$ .

## IV.1 Cas particulier : éclairage par deux sources distinctes monochromatiques

On considère des trous d'Young éclairés par deux sources ponctuelles distinctes  $S$  et  $S'$ .

$S$  et  $S'$  étant distinctes, les ondes qu'elles produisent sont incohérentes entre elles. L'intensité lumineuse en un point  $M$  de l'écran est donc la somme des intensités lumineuses produites par chacune des sources.

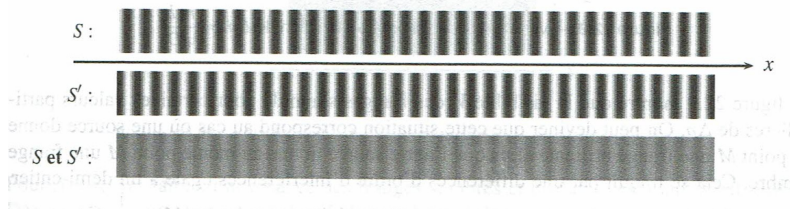


Calculons l'intensité lumineuse en  $M$  en supposant que les deux vibrations lumineuses issues de  $S$  et  $S'$  ont la même amplitude.

★ Poly MP p. 9 et 10

On peut donner une explication qualitative à cette évolution du contraste de la figure d'interférences. En effet, chaque source donne le même système de franges (même forme des franges et même interfrange). Lorsque la source  $S'$  s'éloigne de l'axe optique, le système de franges qu'elle produit subit une translation en bloc (vers le bas si  $S'$  se déplace vers le haut et vers le haut si  $S'$  se déplace vers le bas).

- Lorsque  $h = 0$ , les deux systèmes de franges sont en coïncidence : les franges brillantes (respectivement les franges sombres) du système de franges créé par  $S$  coïncident avec les franges brillantes (respectivement les franges sombres) du système de franges créé par  $S'$ . Les franges brillantes résultantes sont parfaitement brillantes et les franges sombres résultantes parfaitement noires, le contraste vaut 1.
- Lorsque  $h$  augmente, le système de franges créé par  $S'$  se décale vers le bas, les franges brillantes (respectivement sombres) des deux systèmes de franges ne coïncident plus, le contraste diminue.



- Pour  $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a}$ , les deux systèmes de franges se retrouvent en anti-coïncidence : les franges brillantes (respectivement sombres) produites par  $S$  coïncident avec les franges sombres (respectivement brillantes) produites par  $S'$ . Le contraste s'annule, on ne peut plus distinguer les franges brillantes résultantes des franges sombres résultantes (éclairage uniforme sur l'écran) : on dit qu'il y a brouillage des franges. Il y aura brouillage des franges lorsque  $\mathcal{C} = 0$ , c'est à dire lorsque  $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a} + k \frac{\lambda_0 D'}{a}$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ . La plus petite valeur de  $h$  assurant le brouillage est  $h = \frac{\lambda_0 D'}{2a}$ .

- ★ Le brouillage des franges a lieu de la même manière sur tout l'écran : le contraste est uniforme.

Autre méthode pour retrouver les conditions d'anti-coïncidence :

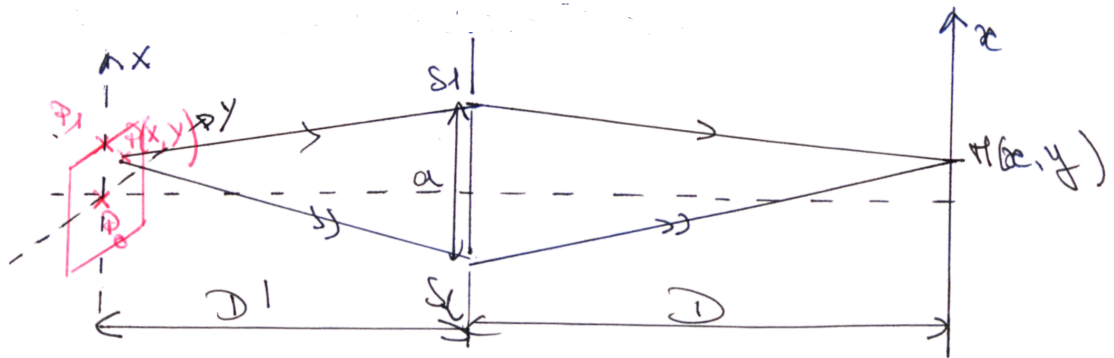
On peut également, pour trouver les conditions d'annulation du contraste, travailler avec les ordres d'interférence au point  $M$  relatifs aux sources  $S$  et  $S'$ . Il y aura anti-coïncidence lorsqu'au point  $M$ , la différence des ordres d'interférence  $p_{S'}(M) - p_S(M)$  sera égale à  $k + \frac{1}{2}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- ★ Poly MP p. 11

## IV.2 Cas général : source étendue spatialement monochromatique

### a Etude qualitative

On considère une source monochromatique spatialement étendue, centrée sur  $P_0$  et de dimension  $h$  selon la direction  $(P_0X)$ .



La source peut-être considérée comme un ensemble de sources distinctes et donc incohérentes entre elles. Chaque point source va créer son propre système de franges. Les différents systèmes de franges ont le même interfrange mais sont décalés les uns par rapport aux autres. Les franges brillantes et sombres des différents systèmes ne coïncident pas, le contraste diminue et peut même s'annuler (brouillage des franges).

### b Critère semi-quantitatif de brouillage

La différence de chemins optiques en  $M$  entre deux vibrations issues d'un point  $P$  de la source est :

- ★ Poly MP p. 11

Pour évaluer les contraintes sur la dimension de l'ouverture, on utilise le critère semi-quantitatif suivant :

#### Critère semi-quantitatif de brouillage

On considère qu'il y a brouillage en  $M$  si l'écart entre les ordres d'interférences produits par un point  $P_0$  au centre de la source et le point  $P_1$  au bord de la source (écart évalué sur la moitié de l'étendue spatiale de la source) est supérieur à  $\frac{1}{2}$ .

- ★ Poly MP p. 12

$L_s$  est la longueur de cohérence spatiale de la source.

- Si les dimensions de la source sont très inférieures à  $L_s$ , les interférences sont quasiment les mêmes que pour une source ponctuelle.
- Si les dimensions de la source sont supérieures à  $L_s$ , les franges sont brouillées, on dit que dans ce cas la source est peu cohérente spatialement.

Le brouillage a lieu de la même manière sur tout l'écran : le contraste est uniforme. Ceci est une caractéristique d'un problème de cohérence spatiale.

**Application numérique :**  $D' = 0.5 \text{ m}$ ,  $a = 1 \text{ mm}$ ,  $\lambda = 500 \text{ nm}$ . On obtient :  $L_s \sim 0.25 \text{ mm}$ , ce qui est faible.

Pour les dispositifs à division du front d'onde, la longueur de cohérence spatiale est très faible, l'utilisation de sources étendues brouillent très rapidement les figures d'interférences.

Expérimentalement, hormis avec un laser, il sera donc indispensable d'utiliser une fente source primaire très fine ( $\sim 0.1 \text{ mm}$ ) pour limiter l'extension spatiale de la source.

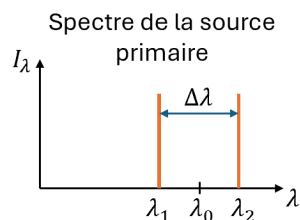
## V Eclairage par une source ponctuelle polychromatique : notion de cohérence temporelle

L'étude sera menée à partir du montage de base des trous d'Young placés dans l'air  $n = 1$ .

On reprend le cas d'une source primaire  $S$  ponctuelle pour ne pas avoir de problème de cohérence spatiale. On place la source  $S$  sur l'axe optique pour simplifier les calculs.

### V.1 Cas particulier : éclairage par une source ponctuelle possédant un doublet spectral

Supposons que le spectre de source  $S$  contienne deux raies de longueurs d'onde proches  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . On note  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  l'écart spectral entre les raies et  $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$  la longueur d'onde moyenne. Dans le cas où  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ , on parle d'un doublet spectral.



**Exemple :** Une lampe à vapeur de sodium possède un doublet spectral dans le jaune :  $\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$ .

On suppose que les ondes émises par la source aux deux longueurs d'onde ont la même intensité lumineuse  $I_0$  au point  $M$ .

Les deux vibrations de longueur d'onde  $\lambda_1$  qui arrivent en  $M$  sont cohérentes entre elles : elles interfèrent. Elles créent l'intensité lumineuse :

$$I_1(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_1 D} \right) \right)$$

Franges rectilignes d'interfrange  $i_1 = \frac{\lambda_1 D}{a}$ .

De même, les vibrations de longueur d'onde  $\lambda_2$  sont cohérentes entre elles :

★

$$I_2(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_2 D} \right) \right)$$

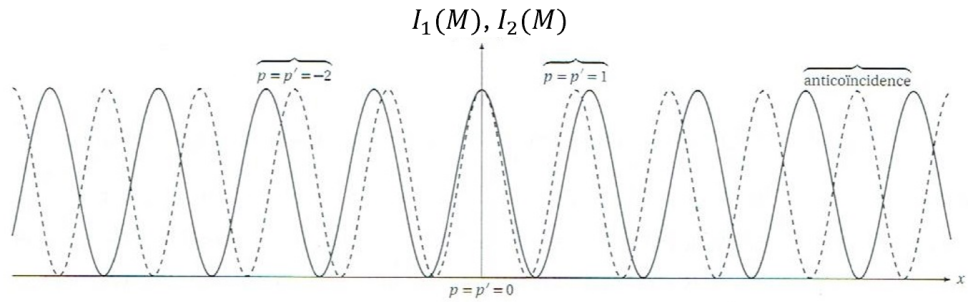
Franges rectilignes d'interfrange  $i_2 = \frac{\lambda_2 D}{a}$ .

En revanche, les vibrations de longueurs d'onde différentes ne sont pas synchrones : elles n'interfèrent pas entre elles. L'intensité lumineuse totale sur l'écran est donc :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M)$$

#### a Etude qualitative

Représentons les deux intensités lumineuses  $I_1(M)$  et  $I_2(M)$ .



Les interfranges étant différents les maxima des deux systèmes de franges se décalent progressivement lorsqu'on s'éloigne du centre ( $x = 0$ ).

Au voisinage de  $x = 0$  les franges brillantes (respectivement les franges sombres) des deux systèmes sont quasiment en coïncidence : les franges seront bien visibles. On observera des franges résultantes proches de celles du cas d'une source monochromatique, le contraste est proche de 1. Lorsqu'on s'éloigne de  $x = 0$ , les franges brillantes (respectivement sombres) des deux systèmes se décalent. Le contraste diminue jusqu'à atteindre une zone de brouillage où une frange sombre d'un des systèmes de franges coïncide avec une frange brillante de l'autre système : le contraste s'annule alors, il y a brouillage des franges.

Ensuite le décalage des systèmes de franges continue, le contraste augmente à nouveau puis diminue et ainsi de suite.

- ★ Le brouillage des franges n'a pas lieu partout : le contraste est donc variable sur l'écran et dépend du point d'observation.

## b Etude quantitative

Calculons explicitement l'intensité résultante :

$$\begin{aligned}
 I(M) &= I_1(M) + I_2(M) \\
 &= 2I_0 \left( 2 + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_1 D}\right) + \cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_2 D}\right) \right) \\
 &= 2I_0 \left( 2 + 2 \cos\left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{ax}{D}\right) \times \cos\left(\pi \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) \frac{ax}{D}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Poly MP p. 13

Les franges sont toujours rectilignes.

On souhaite représenter  $I(x)$ . La difficulté est que  $I(x)$  fait apparaître un produit de deux cosinus. Dans ce cas, la méthode est souvent la même : comparons les périodes des deux cosinus.

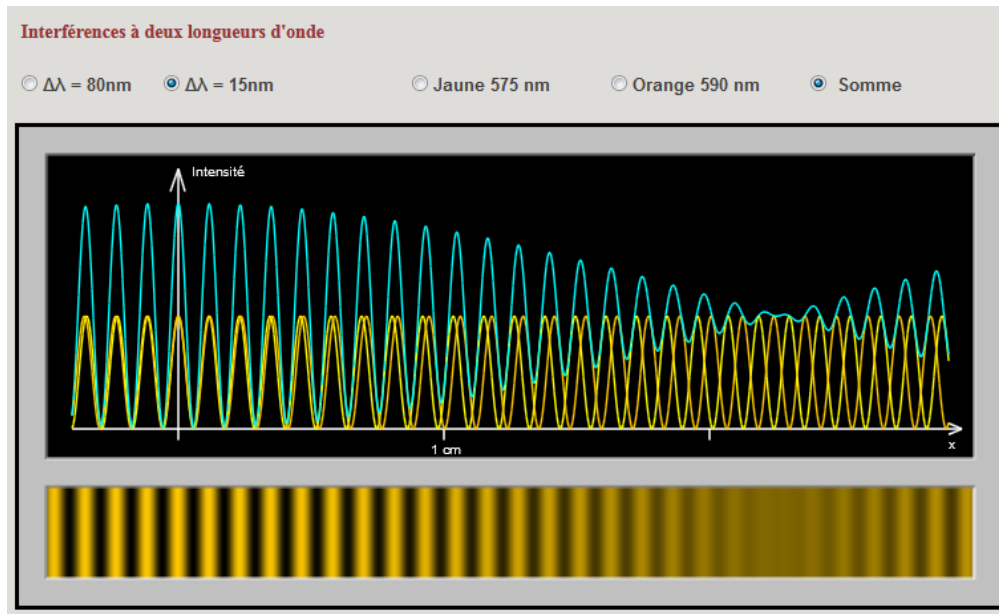
- ★ Poly MP p. 14

Donc,  $\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)$  varie lentement et caractérise l'enveloppe de la fonction.

$\cos\left(\frac{2\pi ax}{\lambda_0 D}\right)$  varie rapidement.

Graphes  $I(x)$  en mettant en évidence les deux périodes

L'interfrange vaut donc :  $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ , formule identique au cas des trous d'Young éclairés par une source ponctuelle primaire monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ .



Nombre de franges entre deux anti-coïncidences successives :

On détermine le nombre  $N$  de franges entre deux anti-coïncidences successives :

$$N = \frac{\frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a}}{\frac{\lambda_0 D}{\Delta\lambda}} = \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda} \gg 1$$

| **Ordre de grandeur** : Dans ce cas du doublet jaune du sodium, on obtient :  $N \simeq 1000$

Contraste de la figure d'interférences :

Visuellement, ce qui compte pour distinguer les franges brillantes des franges sombres est la différence d'intensités lumineuses entre une frange brillante et une frange sombre successive. Donc, on calcule

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

en prenant le  $I_{\max}$  et le  $I_{\min}$  distants d'une demi-interfrange. Il s'agit donc d'un maximum et d'un minimum locaux.

Graphique zoomé et rapide pour expliquer le calcul.

Sur une demi-interfrange,  $\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)$  ne varie quasiment pas. Donc :

★

$$I_{\max} = 4I_0 \left(1 + \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right|\right) \quad \text{et} \quad I_{\min} = 4I_0 \left(1 - \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right|\right)$$

Ainsi, le contraste vaut :

$$C(x) = \left|\cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)\right|$$

et n'est pas uniforme dans tout l'espace : il dépend de  $x$ . En particulier, le contraste est nul et il y a brouillage des franges pour les abscisses  $x_k$  vérifiant :

$$\frac{\pi\Delta\lambda ax_k}{\lambda_0^2 D} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x_k = \frac{\lambda_0^2 D}{2\Delta\lambda a} + k \frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a}$$

avec  $k \in \mathbb{Z}$ .



**Remarque :** Vocabulaire : La fonction  $\gamma(x) = \cos\left(\frac{\pi\Delta\lambda ax}{\lambda_0^2 D}\right)$  est appelée fonction de contraste. Le contraste vaut alors  $\mathcal{C} = |\gamma(x)|$ .

Autre méthode pour retrouver les conditions d'anti-coïncidence :

On peut directement retrouver les abscisses  $x_k$  des anti-coïncidences en raisonnant sur les ordres d'interférences.

Pour la longueur d'onde  $\lambda_1$ , l'ordre d'interférences est :  $p_1(M) = \frac{ax}{\lambda_1 D}$ .

Pour la longueur d'onde  $\lambda_2$ , l'ordre d'interférences est :  $p_2(M) = \frac{ax}{\lambda_2 D}$ .

Il y a anti-coïncidence quand, pour un même point  $M$  :

★

$$p_1(M) - p_2(M) = k + \frac{1}{2} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

Or,

$$p_1(M) - p_2(M) = \frac{ax}{D} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \simeq \frac{ax}{D} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2}$$

Il y a donc anti-coïncidence pour :

$$x_k = \frac{\lambda_0^2 D}{2\Delta\lambda a} + k \frac{\lambda_0^2 D}{\Delta\lambda a} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

**Remarque :** Le premier brouillage observé va être atteint pour des ordres d'interférences  $p_1(M)$  et  $p_2(M)$  très élevés (de l'ordre de 500 pour le sodium). Les brouillages des franges ne seront donc observables expérimentalement qu'avec des interféromètres permettant d'observer des ordres d'interférences élevés.

## V.2 Cas général : source ponctuelle avec un spectre étendu

Supposons que le spectre de la source  $S$  soit un spectre continu. Cela peut par exemple modéliser une raie non monochromatique d'une lampe spectrale ou une source blanche.

Appelons  $\nu_0$  la fréquence centrale du spectre et  $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$  la largeur spectrale caractéristique (on prendra le plus souvent la largeur à mi-hauteur).

★ Profil lorentzien de  $I_\nu(\nu)$  en définissant graphiquement la largeur à mi-hauteur.

Il y a deux façons de raisonner sur les interférences créées par une source de spectre étendu.

### a Décomposition en une infinité de sources ponctuelles monochromatiques - Critère semi-quantitatif de brouillage

On peut décomposer la source ponctuelle à spectre continu en une infinité de sources ponctuelles monochromatiques de fréquence  $\nu_i$ .

Chaque fréquence  $\nu_i$  crée son propre système de franges d'interférences, les différents systèmes ont des interfranges différents. Comme deux ondes émises à des fréquences  $\nu_i$  différentes ne sont pas synchrones, l'intensité lumineuse totale est la somme des intensités lumineuses de chacun des systèmes de franges créées par les différentes fréquences  $\nu_i$ .

#### Etude qualitative :

Pour la frange en  $x = 0$ , l'ordre d'interférence est nul pour toutes les longueurs d'onde : il s'agit d'une frange centrale brillante. Autour de cette frange, le contraste est bon, car les différents systèmes de frange sont quasiment en coïncidence. En s'éloignant de la frange centrale, les franges brillantes et sombres des différents systèmes ne coïncident plus, il y a brouillage des franges.

On retrouve qualitativement que le contraste ne sera pas uniforme sur l'écran et dépendra de la position du point d'observation.

## Critère semi-quantitatif de brouillage :

### Critère semi-quantitatif de brouillage pour un spectre étendu

On considère qu'il y a brouillage des franges lorsque la différence des ordres d'interférences des ondes de fréquence  $\nu_0$  et de fréquence  $\nu_2$  (demi-plage spectrale) est supérieure à  $\frac{1}{2}$ .

★ Cf. poly MP p. 16

Plus le spectre de la source est étendu, moins  $\ell_c$  est grand et moins il y aura de franges visibles avant le premier brouillage. On dit dans ce cas que la source possède une mauvaise cohérence temporelle.

Notons que le fait que le brouillage ne soit pas uniforme sur l'écran est une caractéristique des problèmes de cohérence temporelle.

**Remarque :** Attention néanmoins à ne pas confondre expérimentalement le phénomène d'absence de franges du fait de la figure de diffraction (cf. TP8-B) avec le brouillage des franges lié à une mauvaise cohérence temporelle de la source.

**Exercice :** Une des raies d'émission de l'hydrogène, appelée raie  $H\alpha$  (très très utilisée en astrophysique), a pour longueur d'onde centrale  $\lambda_0 = 656.3 \text{ nm}$  et pour largeur spectrale  $\Delta\lambda \sim 0.1 \text{ nm}$  pour de l'hydrogène basse pression à température ambiante. Estimer la longueur de cohérence temporelle  $\ell_c$  associée à cette raie d'émission.

$$\ell_c = c\tau_c = \frac{c}{\Delta\nu}. \text{ Or, } \nu = \frac{c}{\lambda}. \text{ Donc, } d\nu = -\frac{cd\lambda}{\lambda^2}. \text{ Ainsi :}$$

★

$$\ell_c = \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} = 4.3 \text{ mm}$$

## b Modèle (simpliste) des trains d'onde

Dans le modèle simple des trains d'onde, on considère qu'une source ponctuelle avec un spectre étendu émet des trains d'onde. Un train d'onde n'est susceptible d'interférer qu'avec un autre train d'onde émis durant la même durée  $\tau_c$  (temps de cohérence temporelle). Dans cette vision temporelle de l'émission d'une source, on ne décompose pas l'émission de la source en une émission d'une infinité de sources à des fréquences différentes.

Etant donné que  $\ell_c$  représente la longueur d'un train d'onde, on en déduit que deux ondes ne peuvent interférer que si  $|\delta(M)| \leq \ell_c$ .

Le modèle des trains d'onde donne le bon critère pour déterminer le premier brouillage des franges. Néanmoins, c'est un modèle simpliste de l'émission d'une source. En particulier, expérimentalement, on voit que si on augmente de nouveau  $\delta(M)$  après avoir atteint  $\ell_c$ , le contraste ré-augmente à nouveau. Ce phénomène est inexplicable dans le modèle des trains d'onde...

## V.3 Observation en lumière blanche

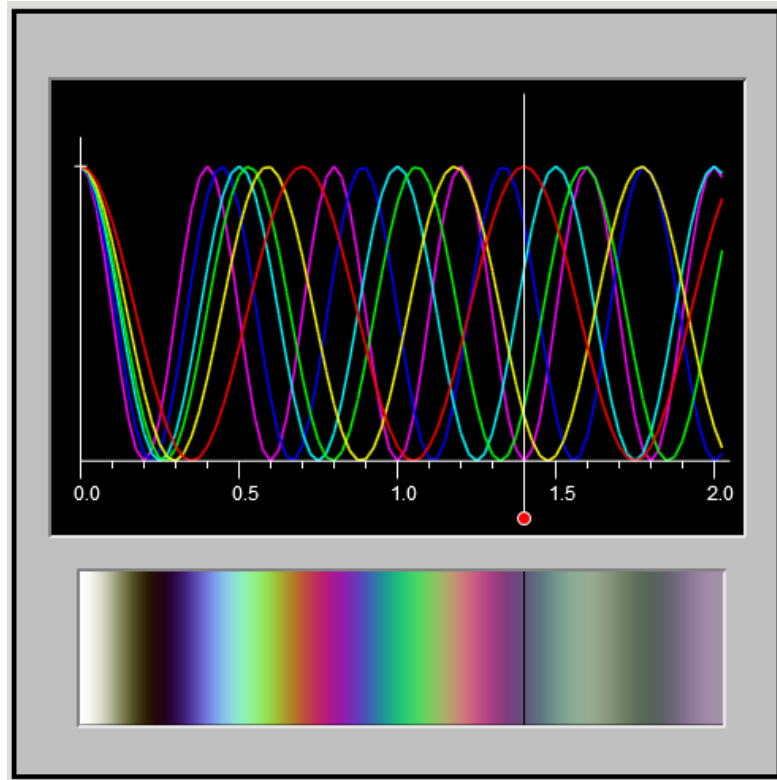
La lumière blanche est constituée des radiations électromagnétiques dont la longueur d'onde est comprise entre  $0,4 \mu\text{m}$  et  $0,8 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à une longueur de cohérence  $\ell_c \sim 1 \mu\text{m}$ . Cette valeur est très faible : avec le critère  $|\delta(M)| \leq \ell_c$ , on trouve que l'on pourra observer des interférences sans brouillage pour  $|p_\lambda(M)| = \frac{|\delta(M)|}{\lambda} < 1$  à  $2$ . Ainsi, on observera une figure d'interférence non brouillée uniquement autour de la différence de marche nulle.

En  $x = 0$ , l'ordre d'interférence est nul pour toutes les longueurs d'onde, on observe donc une frange brillante blanche de même composition spectrale que la source. Cette frange centrale est bordée de deux franges noires (ordre d'interférences  $p = \pm \frac{1}{2}$  pour toutes les longueurs d'onde). Ensuite la structure des franges disparaît et laisse place à des irisations colorées (cer-

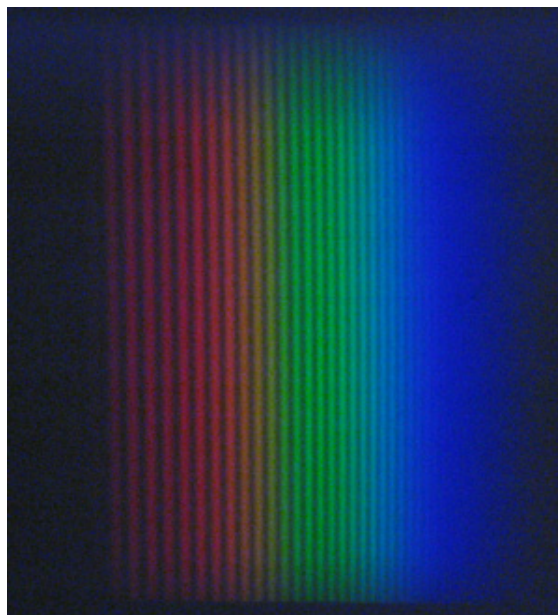
taines longueurs d'onde ont une intensité lumineuse associée au point  $M$ , d'autres non, ce qui donne une teinte colorée sur l'écran).

Ensuite, on retrouve de la lumière blanche "grisâtre" appelée blanc d'ordre supérieur. Celui-ci n'a pas la même composition spectrale que la lumière émise par la source. En effet, en un point de cette zone, l'intensité lumineuse associée à certaines longueurs d'onde est nulle (ce sont les longueurs d'onde pour lesquelles l'ordre d'interférence en ce point est demi-entier). Si on décompose, à l'aide d'un spectroscope, la lumière en un point du blanc d'ordre supérieur, on observe le spectre de la lumière blanche dans lequel figurent des raies sombres, appelées cannelures, ces cannelures correspondant aux longueurs d'onde dont l'ordre d'interférence au point d'observation est demi-entier. On appelle le spectre du blanc d'ordre supérieur un spectre cannelé.

La figure ci-dessous représente l'aspect visuel pour la partie  $x > 0$ .



Voici un spectre cannelé obtenu pour le blanc d'ordre supérieur :



Détermination des longueurs d'onde des cannelures :

On peut déterminer mathématiquement les longueurs d'onde  $\lambda_k$  pour lesquelles le spectre présentera une cannelure en un point  $M$ . Pour cela, on fixe le point  $M$  ( $x$  fixé).

Pour les cannelures, l'ordre d'interférences est :

★ 
$$p(M) = \frac{ax}{\lambda_k D} = k + \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda_k = \frac{ax}{D} \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

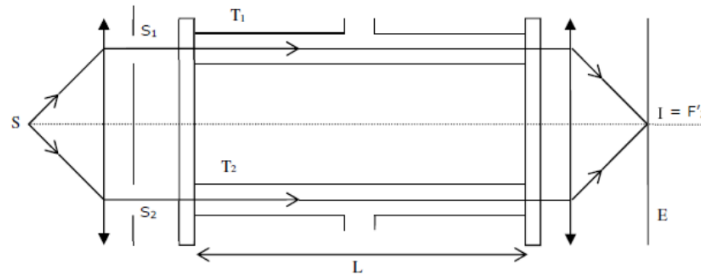
Ne pas oublier que ces cannelures sont dans le visible, donc :  $400 \text{ nm} < \lambda_k < 750 \text{ nm}$ .

## Exercices

### Ex. 1 Interféromètre de Rayleigh

L'interféromètre de Rayleigh (dérivé du dispositif d'Young) est représenté sur la figure ci-dessous. Lorsque les tubes  $T_1$  et  $T_2$  sont remplis d'air dans les conditions normales, le montage est symétrique, et on observe une frange brillante au centre  $I$  de l'écran. La source  $S$  émet la radiation  $\lambda = 0.577 \mu\text{m}$ . La longueur commune des tubes est  $L = 0.20 \text{ m}$ .

$T_2$  étant toujours rempli d'air dans les conditions normales, on fait progressivement le vide dans  $T_1$ . On pose  $a = 8 \text{ mm}$  la distance entre les deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  et  $f'_2 = 1 \text{ m}$  la distance focale de la lentille de projection.



1. Préciser la couleur de la source. Donner l'expression de l'interfrange lorsque le tube  $T_1$  est rempli d'air.
2. Dans quel sens défilent les franges pendant le pompage ?
3. Pendant le pompage, 101 franges brillantes défilent en  $I$  et lorsque la pression dans  $T_1$  est quasi nulle on observe en  $I$  une frange sombre. Déterminer la distance entre la frange d'ordre 0 et le foyer image  $F'_2$  de la lentille de projection.
4. Déterminer l'indice absolu  $n$  de l'air dans les conditions normales.
5. L'indice  $n$  de l'air de masse volumique  $\mu$  obéit à la loi de Gladstone :  $\frac{n-1}{\mu} = \text{cste}$ . Quelle doit être l'élévation de température de l'air du tube  $T_2$  initialement à  $0^\circ\text{C}$  et maintenu à la pression atmosphérique pour observer un déplacement des franges d'un interfrange.

### Correction de l'exercice 1

1. Jaune. Lorsque le tube  $T_1$  est rempli d'air, il s'agit de l'interféromètre des trous d'Young dans l'air :  $i = \frac{\lambda f'_2}{a} = 72 \mu\text{m}$
2. Raisonnons sur la frange centrale (ordre d'interférences nul). Pour cette frange, les deux chemins optiques  $(SS_1M)$  et  $(SS_2M)$  doivent être identiques. Lors du pompage, l'indice optique dans  $T_1$  passe de  $n_2 = n$  (indice de l'air) à  $n_1 = 1$  (indice du vide) : le chemin optique  $(SS_1I)$  diminue. Donc la frange centrale doit se déplacer vers le bas de l'écran pour compenser l'effet du pompage : les franges descendent.
3. Nommons  $V_1$  et  $V_2$  les points aux sorties des tubes  $T_1$  et  $T_2$ . Justifions d'abord que l'interfrange sur l'écran ne varie pas lors du pompage. En supposant que l'angle entre le centre optique  $O_2$  et la frange d'ordre 0 soit faible (semble largement validé au vu de la valeur de l'interfrange), on peut négliger l'angle d'incidence dans  $T_1$  lors du calcul de la variation du chemin optique  $(S_1V_1)$  créé par le pompage. Ainsi, quelque que soit le rayon passant par  $T_1$ , la différence de chemin optique introduit par le pompage est constante : l'interfrange reste constant. Donc, la distance entre  $F'_2$  et la frange centrale est de  $101.5 \times i = 7.3 \text{ mm}$
4. Le plus simple est de raisonner directement sur l'ordre d'interférences en  $F'_2$ . Avec le théorème de Malus,  $S_1$  et  $S_2$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S$  :  $(SS_1) = (SS_2)$ . D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière,  $V_1$  et  $V_2$  sont sur la même surface d'onde relative à  $I$  :  $(V_1I) = (V_2I)$ . Donc :

$$\delta(F'_2) = (S_2V_2) - (S_1V_1) = n_2L - n_1L = (n-1)L$$

avec les notations introduites ci-avant.

Donc :  $p(F'_2) = \frac{(n-1)L}{\lambda} = 101.5$ . Donc :  $n = 1.00029$

5. On veut que  $|dp| = 1 = \frac{L}{\lambda} |d(n-1)|$ . Or, GP :

$$\mu = \frac{PM}{RT}$$

Donc, ici,

$$T(n-1) = \text{cste}$$

Différentielle log :

$$\frac{dT}{T} + \frac{d(n-1)}{n-1} = 0 \Rightarrow dT = T \frac{\lambda}{L(n-1)} = 2.7 \text{ K}$$

## Ex. 2 Déplacement d'un système de franges

Une source  $S$  monochromatique éclaire deux fentes fines  $F_1$  et  $F_2$  parallèles distantes de  $a = 3 \text{ mm}$  situées à une distance  $d = 50 \text{ cm}$  de  $S$ .

La source est située sur la médiatrice de  $F_1$  et  $F_2$  et on compte 6 franges brillantes de chaque côté de la frange centrale située en  $O$ , occupant dans leur ensemble une longueur  $L = 7.2 \text{ mm}$ , sur un écran situé à une distance  $D = 3 \text{ m}$  des deux fentes. On définit un repère cartésien de centre  $O$ , de sorte que  $(Oz)$  coïncide avec l'axe optique.

1. Faire une figure représentant le système. Etablir la différence de chemins optiques entre deux rayons venant interférer en un point  $M$  de l'écran de coordonnées  $(x, y, 0)$ .  
Décrire précisément le système de franges observable sur l'écran. Le système de franges est-il observable uniquement pour  $D = 3 \text{ m}$ . Qualifie-t-on alors les interférences de localisées ou de délocalisées ?
2. Calculer la longueur d'onde  $\lambda$  de la radiation émise par  $S$ .
3. Avec quelle incertitude-type connaît-on  $\lambda$  sachant que l'on a mesuré  $L$  au  $1/10 \text{ mm}$ ,  $a$  au  $1/10 \text{ mm}$  et  $D$  à  $1 \text{ cm}$  près ?
4. On déplace  $S$  de  $2,5 \text{ mm}$  vers le haut de la figure. Dans quel sens se déplace la frange centrale ? Déterminer la distance de déplacement de la frange centrale.
5. On ramène la frange centrale dans sa position initiale  $O$  en plaçant devant une des 2 fentes une lame à faces parallèles d'indice  $1,5$ . Où doit-on mettre la lame à faces parallèles ? Quelle épaisseur convient-il de lui donner ?

---

### Correction de l'exercice 2

**Remarque générale :** Si l'exercice n'introduit pas d'indice optique, il est sous-entendu qu'on travaille dans l'air, assimilable à du vide du point de vue optique :  $n = 1$ .

1. La différence de chemins optiques est :

$$\delta(M) = (SF_2M) - (SF_1M) = \underbrace{(SF_2) - (SF_1)}_{=0} + (F_2M) - (F_1M) = F_2M - F_1M$$

Géométriquement :

$$F_1M = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2} \simeq D \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x - \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{D} \right)^2 \right)$$

car  $D \gg x - \frac{a}{2}$  et  $D \gg y$  (conditions de Gauss). Et de manière similaire :

$$F_2M \simeq D \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x + \frac{a}{2}}{D} \right)^2 + \left( \frac{y}{D} \right)^2 \right)$$

Ainsi, on obtient, après calculs :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D}$$

On en déduit l'ordre d'interférences en  $M$  :

$$p(M) = \frac{ax}{\lambda D}$$

Or, les franges vérifient  $p(M) = \text{cste}$  : les franges sont rectilignes d'équation  $x = \text{cste}$ . On détermine également l'interfrange tel que

$$\Delta p = \frac{ai}{\lambda D} = 1 \Rightarrow i = \frac{\lambda D}{a}$$

**Remarque :** Lorsque vous devez décrire le système de franges, on attend leur forme et l'interfrange (s'il en existe un).

Les interférences sont observables partout derrière les fentes (le calcul précédent restant valable à condition que  $D \gg a, x, y$ ), donc pas que pour  $D = 3 \text{ m}$ . On parle d'interférences délocalisées.

- Les données mesurées se traduisent par :  $L = 12i$ . Donc :  $\lambda = \frac{La}{12D}$ . A.N. :  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$
- On ne nous donne pas l'incertitude-type sur  $L$  mais une précision de mesure à comprendre comme : «  $L$  est situé quelque part dans un intervalle  $L - 1/10 \text{ mm}$  et  $L + 1/10 \text{ mm}$ . L'incertitude-type sur  $L$  est donc :  $u(L) = \frac{1}{10\sqrt{3}} \text{ mm}$ . On raisonne de même pour les deux autres grandeurs. Par formule de composition des incertitudes pour un quotient :

$$u(\lambda) = \lambda \sqrt{\left(\frac{u(L)}{L}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2}$$

L'incertitude relative sur  $D$  est nettement négligeable devant les deux autres (logique !). A.N. :  $u(\lambda) = 0.1 \mu\text{m}$

**Remarque :** On devrait donc conclure :  $\lambda = 0.6 \pm 0.1 \mu\text{m}$ .

- Avec le déplacement de  $S$ , la différence de chemins optiques est modifiée :

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} + \frac{ah}{d}$$

avec  $h = 2.5 \text{ mm}$ . On en déduit l'ordre d'interférences et on cherche  $x$  tel que  $p(x) = 0 \iff \delta(x) = 0$ . On obtient :

$$x = -\frac{hD}{d} = -15 \text{ mm}$$

La frange centrale s'est déplacée vers le bas.

- Remarque générale :** Si l'exercice n'explique pas clairement qu'on doit considérer un angle d'incidence dans une lame à faces parallèles, alors on suppose qu'on peut considérer que le rayon lumineux orthogonal aux faces parallèles. Cela revient à négliger les termes d'ordre 2 en  $x/D$  devant les termes d'ordre 1. On raisonne sur la frange centrale (ordre d'interférence nul). Il y a donc égalité des chemins optiques depuis  $S$ . Vu que le chemin optique 1 avait été diminué par le déplacement vers le haut de  $S$ , on compense en mettant une lame à faces parallèles pour le rayon lumineux 1 : cela va rallonger à nouveau le chemin optique 1. Appelons  $e$  l'épaisseur de la lame à faces parallèles. On souhaite qu'en  $x = 0, p = 0$ . Or,

$$\delta(x = 0) = (SF_2) - (SF_1) = \frac{ah}{d} - (n - 1)e$$

On en déduit :

$$e = \frac{ah}{d(n - 1)}$$

A.N. :  $e = 30 \mu\text{m}$

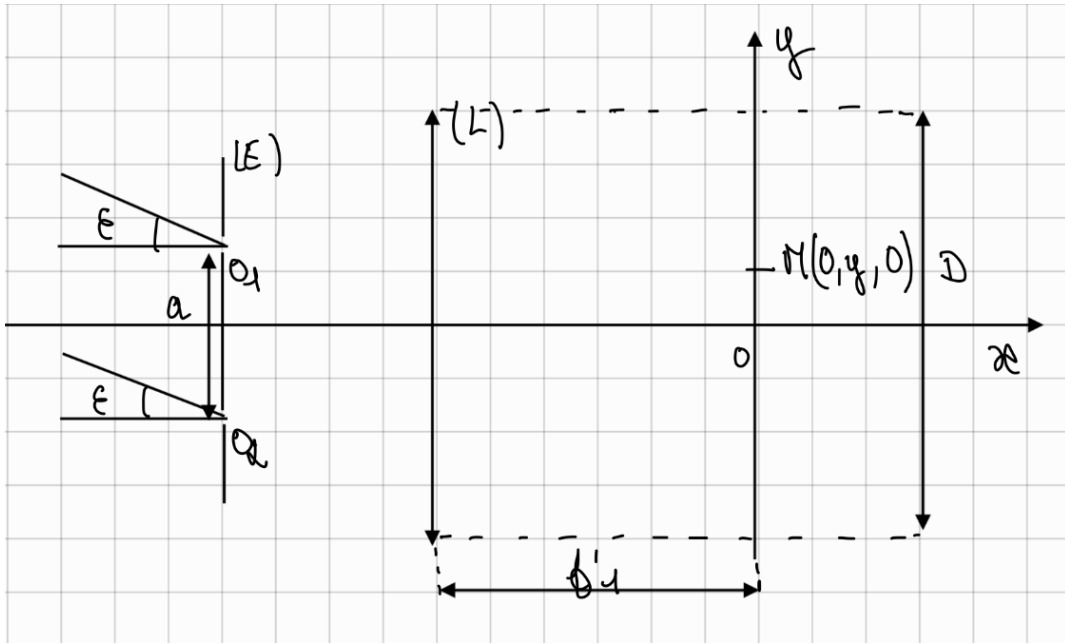
### Ex. 3 Résolution angulaire d'un système d'étoiles doubles

Pour mesurer l'angle  $\varepsilon$  séparant deux étoiles proches  $S_1$  et  $S_2$  vues depuis la Terre, on utilise la méthode de Fizeau décrite ci-dessous.

Deux fentes infiniment fines  $O_1$  et  $O_2$ , distantes de  $a$ , identiques et percées dans un écran ( $E$ ) opaque, sont placées devant une lentille convergente ( $L$ ) de focale  $f'_1$  et de diamètre  $D$ . L'observation est faite dans le plan focal image de ( $L$ ).

On considère, pour simplifier, que  $S_1$  est sur l'axe optique et on note  $\varepsilon \ll 1$  l'écart angulaire entre les deux sources  $S_1$  et  $S_2$  distinctes. On note  $\lambda = 550 \text{ nm}$  la longueur d'onde émise par les deux étoiles, en supposant que l'émission est monochromatique. On suppose également que les deux étoiles émettent une onde arrivant en  $O_1$  et  $O_2$  avec la même intensité lumineuse  $I_0$ . On considère le dispositif dans l'air d'indice optique 1.





On rappelle qu'une minute d'arc équivaut à un angle de  $(1/60)^\circ$  et qu'une seconde d'arc équivaut à un angle  $(1/3600)^\circ$ .

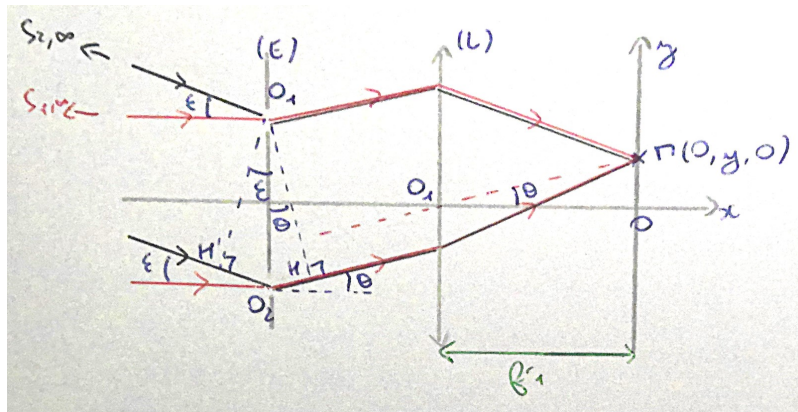
1. Représenter les rayons lumineux arrivant au point  $M$ .
2. Démontrer l'expression de l'intensité lumineuse au point  $M$  dans le cas où on n'observerait que l'étoile  $S_1$ .
3. Déterminer l'intensité lumineuse au point  $M$  dans le cas où on n'observerait que l'étoile  $S_2$ .
4. Montrer que l'intensité lumineuse due aux deux sources  $S_1$  et  $S_2$  observées simultanément peut se mettre sous la forme :

$$I(y) = K \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi \delta}{\lambda} + \frac{\pi \delta'}{\lambda} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{ya}{f_1'} \quad \text{et} \quad \delta' = a\epsilon$$

On exprimera la constante  $K$ .

5. Déterminer l'expression du facteur de contraste, aussi appelé facteur de visibilité.
6. On étudie le système d'étoiles doubles Hercule. Afin de déterminer  $\epsilon$ , on modifie l'écartement  $a$  entre les deux fentes afin d'annuler le contraste. En démarrant pour une valeur de  $a$  nulle et en augmentant progressivement  $a$ , on observe le premier brouillage des franges pour  $a = 41$  mm. Déterminer l'angle  $\epsilon$  entre les deux étoiles du système. On donnera le résultat en secondes d'arc.
7. Retrouver rapidement la condition de brouillage des franges portant sur  $a$ ,  $\epsilon$  et  $\lambda$  à l'aide du critère semi-quantitatif de brouillage des franges.

### Correction de l'exercice 3



2. Les ondes lumineuses émises par  $S_1$  sont cohérentes entre elles. D'après la formule de Fresnel :

$$I_1(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \delta_1(M) \right) \right)$$

avec  $\delta_1(M) = (S_1O_2M) - (S_1O_1M)$ .

D'après le théorème de Malus, les points  $O_1$  et  $O_2$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S_1$ . Donc :  $(S_1O_1) = (S_1O_2)$ . D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, les points  $O_1$  et  $H$  sont sur la même surface d'onde relative à  $M$ . Donc  $(O_1M) = (HM)$ . Ainsi :  $\delta_1(M) = (O_2H) = O_2H$ . Dans les conditions de Gauss,  $\theta \ll 1$  rad. Donc,

$$\delta_1(M) = a\theta = \frac{ay}{f'_1} \Rightarrow I_1(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ay}{f'_1} \right) \right)$$

3. Le raisonnement est similaire pour  $S_2$ , à l'exception du fait que  $O_1$  et  $O_2$  ne sont pas sur la même surface d'onde.

D'après le théorème de Malus,  $O_1$  et  $H'$  sont sur la même surface d'onde relative à  $S_2$ . Donc :  $(S_2O_1) = (S_2H')$ . Ainsi :

$$\delta_2(M) = (H'O_2) + (O_2H) = H'O_2 + O_2H$$

Comme  $\varepsilon \ll 1$ , on aboutit à :

$$\delta_2(M) = a\varepsilon + \frac{ay}{f'_1} \Rightarrow I_2(M) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \left( a\varepsilon + \frac{ay}{f'_1} \right) \right) \right)$$

4. Les ondes issues de  $S_1$  sont incohérentes avec celles issues de  $S_2$ . Donc, l'intensité lumineuse totale est :

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) = 4I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{\pi a\varepsilon}{\lambda} \right) \cos \left( \frac{2\pi ay}{\lambda f'_2} + \frac{\pi a\varepsilon}{\lambda} \right) \right)$$

qui est le résultat demandé avec  $K = 4I_0$

5. On identifie le terme d'interférences et le facteur de contraste directement. Le facteur de contraste est  $V(\varepsilon) = \cos \left( \frac{\pi a\varepsilon}{\lambda} \right)$

6. Le premier brouillage de franges est atteint pour

$$\frac{\pi a\varepsilon}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{2a}$$

A.N. :  $\varepsilon = 6.7 \times 10^{-6}$  rad. **Attention : le résultat trouvé est en radians, et non en degrés, car l'approximation  $\sin(\varepsilon) \simeq \varepsilon$  n'est valable qu'avec des angles en radians !** On convertit le résultat :  $\varepsilon = 1.4$  secondes d'arc.

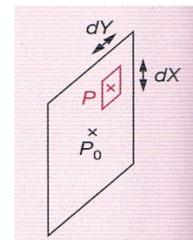
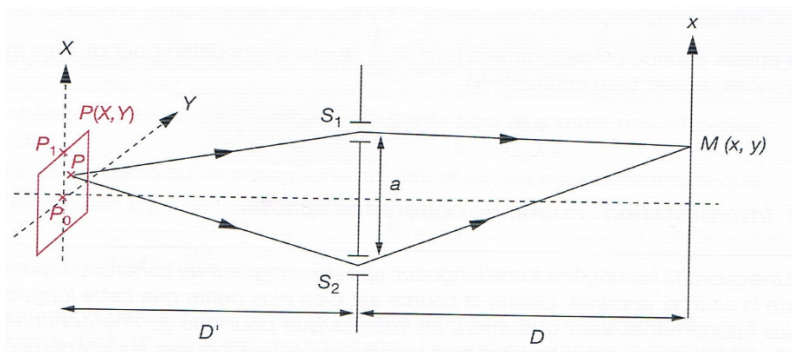
7. L'ordre d'interférences lié à  $S_1$  est  $p_1(M) = \frac{ay}{f'_1\lambda}$  et l'ordre d'interférences lié à  $S_2$  est  $p_2(M) = \frac{ay}{f'_1\lambda} + \frac{a\varepsilon}{\lambda}$ .

Critère de brouillage (égalité dans le cas du 1er brouillage) :

$$p_2(M) - p_1(M) = \frac{a\varepsilon}{\lambda} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\lambda}{2a}$$

## Ex. 4 Trous d'Young éclairés par une source étendue : calcul de l'intensité lumineuse

On se propose d'effectuer le calcul précis de l'intensité observée sur l'écran pour une source étendue (monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ ) de dimension  $h$  selon les directions  $x$  et  $y$ . On découpe par la pensée la source carrée en petites sources quasi ponctuelles de taille  $dX \times dY$ .



Un formulaire est disponible en fin d'exercice.

1. Les différentes sources ainsi considérées sont incohérentes entre elles. Qu'en déduit-on pour le calcul de l'intensité lumineuse totale ?
2. Soit  $P(X,Y)$  un point de la source étendue. Donner la différence de chemins optiques en un point  $M(x,y)$  de l'écran pour un rayon issu de  $P$ .
3. **Critère semi-quantitatif** : En utilisant le critère semi-quantitatif de brouillage, déterminer la taille minimale  $h_0$  de la source telle que la figure d'interférences soit brouillée.
4. **Calcul exact** On suppose une répartition homogène de l'éclairement sur toute la source. Ainsi, l'intensité lumineuse de l'onde émise du point  $P$  est  $\frac{I_0}{h^2} dXdY$ .
  - (a) Montrer que l'intensité lumineuse élémentaire  $dI(M)$  créée au point  $M$  par la portion de source comprise entre  $X$  et  $X + dX$  et entre  $Y$  et  $Y + dY$  est :

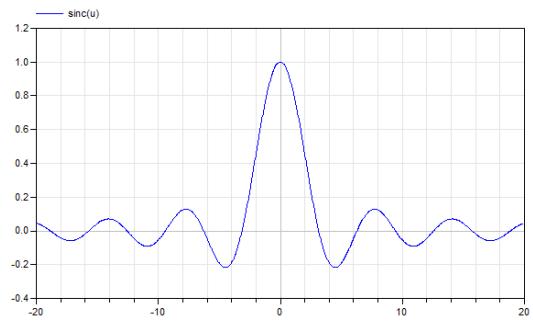
$$dI(M) = 2 \frac{I_0}{h^2} dXdY \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{aX}{D'} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right)$$

- (b) En intégrant sur toute la source, en déduire l'expression de l'intensité  $I(x)$  sur l'écran.
- (c) Interpréter le résultat en identifiant le facteur de contraste et le terme d'interférences. Décrire le système de franges (forme des franges, interfrange).
- (d) Tracer le graphe du contraste en fonction de la taille  $h$  de la source. Déterminer la taille minimale  $h_0$  de la source telle que le contraste s'annule. Comparer au résultat trouvé avec le critère semi-quantitatif.
- (e) En déduire un domaine de taille de la source telle que le contraste reste correct.

**Formulaire :**

$$\sin(p) - \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

On définit la fonction "sinus cardinal" sur  $\mathbb{R}$  par  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ . On donne le graphe de cette fonction ci-contre.



**Correction de l'exercice 4**

1. L'intensité lumineuse totale est la somme des intensités lumineuses créées par chaque source élémentaire  $dX \times dY$ .
2. Résultat classique, pouvant être donné directement :

$$\delta_P(M) = \frac{ax}{D} + \frac{aX}{D'}$$

si  $D \gg a$  et  $D' \gg a$ .

3. On déduit de la question précédente l'ordre d'interférence :  $p_P(M) = \frac{a}{\lambda_0} \left( \frac{x}{D} + \frac{X}{D'} \right)$ .  
 Critère du premier brouillage : Pour les points  $P_0(0,0)$  au centre de la source et  $P_1(h/2,0)$  au bord de la source :

$$p_{P_1}(M) - p_{P_0}(M) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{ah}{2\lambda_0 D'} = \frac{1}{2} \Rightarrow h_0 = \frac{\lambda_0 D'}{a}$$

- (a) Les ondes émises depuis la même source élémentaire  $dX \times dY$  sont cohérentes entre elles. D'après la formule de Fresnel et la Q.2, on trouve le résultat de l'énoncé.
- (b) D'après la Q.1, il suffit de sommer les intensités créées sur l'écran par chaque portion élémentaire de la

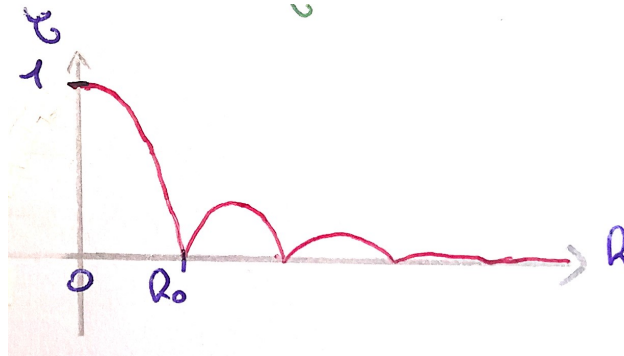
source étendue. D'où :

$$\begin{aligned}
 I(x) &= \int_{X=-h/2}^{h/2} \int_{Y=-h/2}^{h/2} 2 \frac{I_0}{h^2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{aX}{D'} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right) dXdY \\
 &= \frac{2I_0}{h^2} \left( \int_{Y=-h/2}^{h/2} dY \right) \left( \int_{X=-h/2}^{h/2} \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{aX}{D'} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right) dX \right) \\
 &= \frac{2I_0}{h} \left( h + \left[ \frac{\lambda_0 D'}{2\pi a} \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \left( \frac{aX}{D'} + \frac{ax}{D} \right) \right) \right]_{X=-h/2}^{X=+h/2} \right) \\
 &= 2I_0 \left( 1 + \frac{\lambda_0 D'}{2\pi ah} \times 2 \sin \left( \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right) \\
 &= 2I_0 \left( 1 + \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) \right)
 \end{aligned}$$

- (c) On identifie le facteur de contraste  $\operatorname{sinc} \left( \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right)$  homogène sur tout l'écran (indépendant de  $x$ ) et le terme d'interférences  $\cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right)$ .

Avec le terme d'interférences, on identifie que les franges vérifient  $\cos \left( \frac{2\pi ax}{\lambda_0 D} \right) = \text{cste}$ , ce qui, pour les franges, implique  $x = \text{cste}$  : les franges sont rectilignes. On identifie directement l'interfrange :  $i = \frac{\lambda_0 D}{a}$ .

- (d) Le contraste est  $\mathcal{C} = \left| \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \right) \right|$



$h_0$  vérifie  $\sin \left( \frac{\pi ah_0}{\lambda_0 D'} \right) = 0$ , soit donc, pour la taille minimale :  $h_0 = \frac{\lambda_0 D'}{a}$ , soit exactement le même résultat que celui donné avec le critère semi-quantitatif ! En fait, le calcul que l'on vient de réaliser est le véritable calcul à considérer, et cela justifie le critère semi-quantitatif du cours.

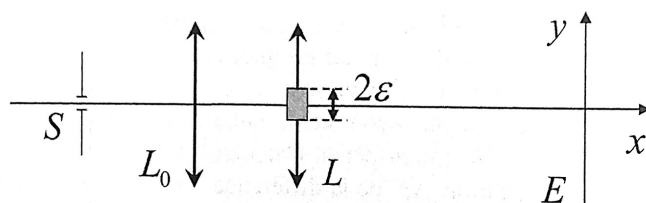
- (e) Fixons un critère : on considère que le contraste reste correct si  $\mathcal{C} \geq 0.5$ . En s'aidant de la courbe fournie dans le formulaire, on en déduit que

$$\frac{\pi ah}{\lambda_0 D'} \leq 2 \Rightarrow h \leq \frac{1}{\pi} \frac{\lambda_0 D'}{a} = \frac{h_0}{\pi}$$

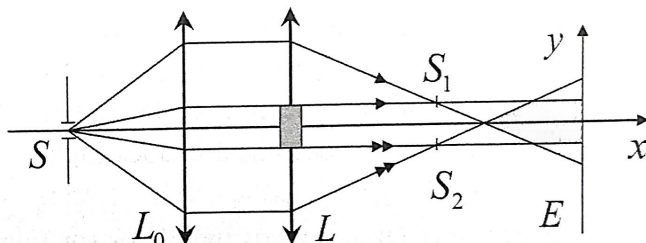
(Au vu du graphe du sinus cardinal, il n'est pas nécessaire d'imposer  $h$  plus petit d'un facteur 10 ou 100 par rapport à la valeur de  $h_0$  !)

## Ex. 5 Bi-lentilles à obturation

Une fente source  $S$  fine, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0 = 589.3 \text{ nm}$ , est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente ( $L_0$ ). On place, derrière ( $L_0$ ), les deux moitiés d'une lentille convergente ( $L$ ) de distance focale  $f' = 25 \text{ cm}$ . Cette lentille ( $L$ ) a été sciée en deux en passant par le centre de la lentille : on a alors écarté symétriquement les deux moitiés de la lentille obtenue d'une distance  $2\varepsilon = 2 \text{ mm}$ . L'espace formé entre les deux demi-lentilles est obturé par un cache opaque. On place enfin un écran à une distance  $d = 50 \text{ cm}$  de ( $L$ ). On définit un repère ( $Exy$ ).



1. On donne ci-dessous le tracé de quelques rayons lumineux issus de  $S$ . Expliquer la construction de la figure et donner les coordonnées des points  $S_1$  et  $S_2$ .



2. Déterminer la taille du champ d'interférences sur l'écran.
3. Le système est utilisé dans les conditions de Gauss, ce qui permet de supposer que les lentilles sont approximativement stigmatiques. Rappeler la définition d'un système stigmatique en termes de rayons lumineux, puis en termes de chemins optiques.
4. En raisonnant par analogie avec l'interféromètre des trous d'Young, déterminer la forme des franges sur l'écran ainsi que leur interfrange. Quelle est la nature (brillante ou sombre) de la frange au centre de l'écran ? Combien de franges brillantes sont visibles sur l'écran ?
5. En réalité, la source  $S$  n'est pas monochromatique. Elle est constituée d'une lampe spectrale à vapeur de sodium à laquelle est ajoutée une fente fine. Le sodium possède un doublet spectral de longueurs d'onde  $\lambda_1 = 589.0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589.6 \text{ nm}$ . Déterminer le nombre de franges au bout duquel les deux systèmes de franges sont en anti-coïncidence (premier brouillage de franges). Commenter.
6. On place entre  $(L_0)$  et  $(L)$  une lame à faces parallèles d'un verre d'indice  $n = 1.52$ . Cette lame est placée perpendiculairement à l'axe optique, sur la partie supérieure du montage (au-dessus de l'axe optique). Déterminer l'épaisseur  $e$  à choisir pour cette lame de sorte à visualiser au centre de l'écran la première anti-coïncidence. Décrire alors ce qu'on observerait sur l'écran.

### Correction de l'exercice 5

1.  $S$  étant sur le foyer objet de  $(L_0)$ , les rayons lumineux émergents de  $(L_0)$  sont parallèles entre eux et parallèles à l'axe optique.

Après découpage de la lentille, le centre optique de  $(L)$  se retrouve juste au-dessus et juste en-dessous du cache optique. Donc, les rayons lumineux passant juste au-dessus et juste en-dessous du cache opaque ne sont pas déviés par  $(L)$ . Les autres rayons lumineux arrivant sur  $(L)$  parallèlement à l'axe optique passent par le « foyer image découpé » de  $(L)$ . Ainsi, tous les rayons passant par la partie supérieure de  $(L)$  se coupent en  $S_1$ , situé à une distance  $f'$  de  $(L)$ , c'est-à-dire de coordonnées  $S_1(-d + f', \varepsilon, 0)$ . De même, tous les rayons lumineux passant par la partie inférieure de  $(L)$  se coupent en  $S_2(-d + f', -\varepsilon, 0)$ .

A ce stade, on comprend que tout se passe comme si les ondes étaient émises par deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  : on reconnaît la configuration des trous d'Young !

2. D'après le schéma, la taille du champ d'interférences est  $2\varepsilon$ .
3. Un système stigmatique est un système dont l'image d'un point est un point. Formulé en terme de chemins optiques, cela signifie que le chemin optique pour aller d'un point à son image est indépendant du chemin suivi entre l'objet et l'image.  
Ici, on en déduit que  $(SS_1) = (SS_2)$  (se rappeler que, normalement, dans le cas où la lentille  $(L)$  serait intacte, alors  $S_1$  et  $S_2$  sont confondus et sont la même image de  $S$ ).
4. On cherche la différence de chemins optiques en un point  $M$  de l'écran :

$$\delta(M) = (SS_2M) - (SS_1M) = (S_2M) - (S_1M)$$

d'après la réponse précédente. On reconnaît une situation analogue aux trous d'Young :

$$\delta(M) = \frac{2\varepsilon y}{d - f'}$$

car  $2\varepsilon \ll d - f'$ . L'ordre d'interférences est :  $p(M) = \frac{2\varepsilon y}{\lambda_0(d - f')}$ .

Comme les franges vérifient  $p(M) = \text{cste}$ , elles sont rectilignes d'équation  $y = \text{cste}$ . L'interfrange vérifie :  $\frac{2\varepsilon i}{\lambda_0(d - f')} = 1 \Rightarrow i = \frac{\lambda_0(d - f')}{2\varepsilon} = 74 \mu\text{m}$ .

En  $y = 0$ ,  $p = 0$  : il s'agit d'une frange brillante. On trouve le nombre de franges brillantes à l'aide de la taille du champ d'interférences :

$$\frac{2\varepsilon}{i} = 27.2$$

Donc, 27 franges brillantes sont visibles.

5. Critère du premier brouillage :

$$p_1(M) - p_2(M) = \frac{2\varepsilon y}{d - f'} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \simeq \frac{2\varepsilon y}{d - f'} \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2}$$

car  $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ . On en déduit la position  $y_{ac}$  de la première anti-coïncidence sur l'écran :

$$y_{ac} = \frac{(d - f')\lambda_0^2}{4\varepsilon\Delta\lambda}$$

On vérifie que  $y$  augmente si  $\Delta\lambda$  diminue (meilleure cohérence temporelle) : cohérent.

Pour trouver le nombre de franges correspondant à cette position sur l'écran, on calcule l'ordre d'interférences associé à cette position  $y_{ac}$  pour l'une des deux longueurs d'onde ou pour la longueur d'onde moyenne (ne changera pas le résultat, qui doit être un entier) :  $p_2(y_{ac}) = \frac{\lambda_0}{2\Delta\lambda} = 491$ . Le brouillage aura lieu autour de la 492ème frange. Comme on ne voit que 27 franges dans le champ d'interférences, ce brouillage n'est pas visible sur l'écran. Tout se passe comme si la source émettait réellement une onde monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$  du point de vue de la figure d'interférences visible.

6. On souhaite donc que  $p_1(y = 0) - p_2(y = 0) = \pm \frac{1}{2}$ . Déterminons la nouvelle valeur de l'ordre d'interférence  $p(y)$  pour une longueur d'onde  $\lambda$  quelconque, du fait de la présence de la lame à faces parallèles.

La lame à faces parallèles implique que  $(SS_1) \neq (SS_2)$ . En revanche,  $(S_2M) - (S_1M)$  n'a pas été modifié. Il n'y a pas nécessité de refaire toute la démonstration de  $(SS_2) - (SS_1)$  avec le théorème de Malus ou le théorème de Malus inversé (c'est possible, mais vous vous rallongez la tâche inutilement). On note juste que, par rapport à la situation sans lame,  $(SS_1)$  a été allongé de  $ne - e$ . Donc :

$$(SS_2) - (SS_1) = (1 - n)e \Rightarrow p(y) = \frac{2\varepsilon y}{\lambda(d - f')} + \frac{(1 - n)e}{\lambda}$$

Pour observer le premier brouillage en  $y = 0$ , il faut donc que

$$p_2(y = 0) - p_1(y = 0) = (n - 1)e \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{\lambda_0^2}{2(n - 1)\Delta\lambda}$$

A.N. :  $e = 0.56 \text{ mm}$

Dans ce cas, on observerait sur l'écran une intensité lumineuse uniforme, sans frange d'interférence discernable.

## Ex. 6 Miroir de Lloyd

Un miroir plan, de largeur  $L = 20 \text{ cm}$ , est placé perpendiculairement à un écran. Celui-ci est en contact avec le bord  $O$  du miroir. On éclaire le miroir par une source lumineuse  $S$  ponctuelle, située à faible distance  $y = 1.5 \text{ mm}$  du plan du miroir et à une distance  $D = 70 \text{ cm}$  de l'écran. On nomme  $x = OM$ .



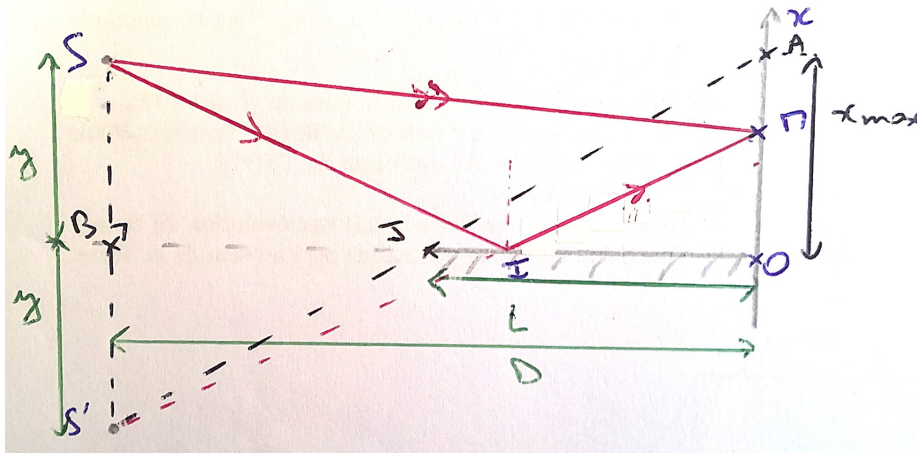
1. Représenter les rayons lumineux associés aux ondes susceptibles d'interférer au point  $M$ . Montrer alors que, du point de vue de la différence de chemins optiques, tout se passe comme si l'une des ondes était issue de  $S$  et l'autre était issue du symétrique  $S'$  de  $S$  par rapport au plan du miroir.
2. La source émet une lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ . Ecrire la loi  $I(x)$  donnant l'intensité vibratoire sur l'écran en un point  $M$  du champ d'interférence. On précise que lors de la réflexion d'une onde sur un miroir métallique, l'onde réfléchie est déphasée de  $\pi$  par rapport à l'onde incidente.
3. Quelle est la forme des franges observées ? La frange au point  $O$  est-elle brillante ou sombre ?



4. (a) A quelle distance de  $O$  se trouve la troisième frange brillante ?  
 (b) Quel est le nombre de franges brillantes visibles sur l'écran ?
5. La source émet désormais de la lumière blanche dont les limites sont  $\lambda_b = 0.4 \mu\text{m}$  et  $\lambda_r = 0.75 \mu\text{m}$ . On dispose un spectroscope dans le plan d'observation, à la distance  $x = 0.5 \text{ mm}$  du centre du système de franges. Décrire l'aspect du spectre observé.
6. Calculer le nombre de cannelures et les longueurs d'onde des radiations manquantes dans le spectre.

### Correction de l'exercice 6

1. Du fait de la réflexion sur le miroir plan, tout se passe comme si le rayon émergent du miroir plan était issu de  $S'$ , symétrique de  $S$  par rapport au miroir. Du point de vue des chemins optiques, on a alors  $(SI) = (S'I)$  (mêmes indices et mêmes longueurs géométriques).



2. Difficultés relevées lors du TD :

- D'après la Q.1, on peut considérer que les deux ondes interférant en  $M$  sont les ondes associées aux rayons lumineux  $SM$  (deux flèches) et  $S'IM$  (ne pas considérer le rayon  $SIM$ , car on le prend en compte via  $S'IM$ ). Faire un schéma équivalent si cela vous aide.
- On reconnaît une situation analogue aux trous d'Young : inutile de refaire le calcul de la différence de chemins optiques, c'est un résultat de cours pouvant être immédiatement donné.

Sans prendre en compte le déphasage de  $\pi$  à la réflexion, on a la différence de chemins optiques :  $\delta(M) = (S'IM) - (SM) = \frac{2yx}{D}$ , car les ondes sont en phase aux points  $S$  et  $S'$  (rappelons que le point  $S'$  est un point source fictif, en réalité les deux ondes sont émises de  $S$ , donc évidemment qu'elles sont en phase au niveau de leur point d'émission).

Les deux ondes sont cohérentes entre elles, on applique la formule de Fresnel, en ajoutant le déphasage de  $\pi$  lié à la réflexion :

$$I(x) = 2I_0 \left( 1 + \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yx}{D} + \pi \right) \right) = 2I_0 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{2yx}{D} \right) \right)$$

3. D'après la formule de l'intensité lumineuse, les franges sont rectilignes d'équation  $x = \text{cste}$ . L'interfrange est identifié :  $i = \frac{\lambda D}{2y} = 0.14 \text{ mm}$ .

En  $x = 0$ ,  $I(0) = 0$  : il s'agit d'une frange sombre en  $O$ .

4. (a) Deux façons de raisonner :

- Utiliser l'ordre d'interférences, mais attention, celui doit prendre en compte le déphasage de  $\pi$  :  $p(M) = \frac{2yx}{\lambda D} + \frac{1}{2}$ . On aura la troisième frange brillante si  $p = 3$  (vérifier que pour  $p = 1$ , et non  $p = 0$ , cela donne la première frange brillante).
- Représenter la figure d'interférences sur l'écran : on trouve facilement la position de la troisième frange brillante.

On trouve :  $x = \frac{5i}{2} + 2i = \frac{5i}{2} = 0.35 \text{ mm}$

- (b) On doit connaître la taille du champ d'interférences. Ce champ d'interférences est limité par le rayon lumineux issu de  $S'$  et passant par le bord extérieur  $J$  du miroir. Avec le th de Thalès dans  $S'BJOAJ$ , on trouve :

$$\frac{y}{D-L} = \frac{x_{\text{max}}}{L} \Rightarrow x_{\text{max}} = \frac{yL}{D-L} = 0.6 \text{ mm}$$



La 4ème frange brillante est en  $x = 0.49$  mm. La 5ème serait en  $x = 0.63$  mm  $> x_{\max}$ . On voit donc 4 franges brillantes sur l'écran.

5. Chaque longueur d'onde du visible donne un système de franges d'interférences dont les intensités lumineuses se somment (incohérence des ondes émises à deux longueurs d'onde distinctes). Or, pour chaque longueur d'onde, en  $x = 0.5$  mm, l'ordre d'interférences est supérieur à 2 (pour  $\lambda = 600$  nm, la question précédente permet de voir qu'on observe la troisième frange brillante en  $x = 0.5$  mm).

On sait alors qu'on observe un blanc d'ordre supérieur en  $x = 0.5$  mm (la teinte est blanche, noire ou colorée seulement pour  $p \geq 2$ ). Le spectre est donc cannelé : certaines longueurs d'onde sont absentes du spectre.

6. Le plus simple est de raisonner sur l'intensité lumineuse. On voit que la longueur d'onde  $\lambda_k$  donne une cannelure si

$$\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_k} \frac{2yx}{D}\right) = 1 \iff \frac{2yx}{\lambda_k D} = k \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z} \iff \lambda_k = \frac{2yx}{Dk}$$

Par tâtonnement, on trouve :  $\lambda_5 = 0.43$   $\mu\text{m}$ ,  $\lambda_4 = 0.54$   $\mu\text{m}$ ,  $\lambda_3 = 0.71$   $\mu\text{m}$ , soit 3 cannelures (les autres  $\lambda_k$  sont hors du visible).