Optique ondulatoire

005

Interférences à N ondes cohérentes entre elles

Sommaire

Questions de cours

- Superposition de N ondes cohérentes entre elles, de même amplitude et dont la différence de phase φ entre deux sources consécutives est constante : établir l'expression de l'intensité lumineuse en fonction de I_0, N et φ. Interpréter l'effet de N sur la figure d'interférences.
- Partant de la formule des interférences à N ondes $I(M) = I_0 \dfrac{\sin^2\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)}$, établir la condition d'interférences constructives et la demi-largeur des franges brillantes.
- Réseau en transmission : présentation, formule des réseaux (bien définir les grandeurs intervenant dedans !), application.

.

Prise de notes : Contexte concret : On a la lumière émise par une lampe spectrale (spectre de raies) : comment mesurer les différentes longueurs d'onde dans le spectre ?

- **Interféromètre des trous d'Young ou de Michelson ?** Non. Les ondes émises aux différentes longueurs d'onde ne sont pas synchrones entre elles : les différents systèmes de franges ou d'anneaux se somment et brouillage. On peut se servir du brouillage pour déterminer $\Delta\lambda$ mais pas λ. (Dans certains cas, on peut déterminer le λ_0 moyen, mais il faut alors que le brouillage intervienne loin de la frange centrale. C'est le cas avec le doublet du sodium.)

★

- **Utiliser un système dispersif** 2 systèmes différents :
  - Prisme : Rappel sur ce qu'est la dispersion : $v_\varphi(\omega) \Rightarrow n(\lambda)$. Loi empirique de Cauchy : $n = A + \dfrac{B}{\lambda^2}$ (A et B positifs) (n plus petit dans le rouge). En déduire les trajets des RL dans un prisme. Super pour visualiser à l'œil, mais pas pratique pour la mesure, car relation angle de sortie et λ compliquée...
  - Réseau : Bien plus pratique pour faire des mesures précises. Principe global et en déduire le fait que N ondes cohérents interfèrent entre elles.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Etablir l'expression de l'intensité lumineuse résultant de la superposition de N ondes cohérentes entre elles grâce à la notation complexe.
2. Utiliser la représentation de Fresnel pour interpréter efficacement l'effet de la superposition d'ondes cohérentes.
3. Etablir la formule des réseaux

I Superposition de N ondes cohérentes entre elles

Nous allons étudier la superposition de N ondes émises par N sources (sources secondaires) monochromatiques de longueur d'onde dans le vide λ_0, cohérentes entre elles. On suppose qu'au point M où elles interfèrent :

- les N ondes ont toutes la même amplitude s_0.
- la différence entre les retards de phase des ondes émises par 2 sources consécutives S_n et S_{n+1} est une constante : $\varphi_{n+1}(M) - \varphi_n(M) = \text{cste} = \varphi$.

On cherche à tracer et interpréter l'intensité lumineuse en fonction de φ. Ce graphe va dépendre de la valeur de N.

I.1 Utilisation de la notation complexe

Posons $s_n(M,t) = s_0 \cos(\omega t - \varphi_n(M))$ la vibration lumineuse en M, émise par la source S_n. En notation complexe : $\underline{s_n}(M,t) = s_0\, \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi_n(M))}$.

Etant donné que les ondes sont cohérentes entre elles, il y a additivité des amplitudes complexes : $\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{s_n}(M,t)$. L'intensité lumineuse totale est alors :

$$I = K\,|\underline{s}(M,t)|^2$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer $|\underline{s}(M,t)|^2$.
La vibration lumineuse émise par la source S_{n+1} est reliée à celle émise par S_n :

$$\underline{s_{n+1}}(M,t) = s_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \varphi_{n+1}(M))} \qquad \text{avec} \quad \varphi_{n+1}(M) = \varphi_n(M) + \varphi$$

★ Donc :

$$\underline{s_{n+1}}(M,t) = \underline{s_n}(M,t)\ \mathrm{e}^{-j\varphi}$$

(On reconnaît déjà une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{-j\varphi}$!)
Cette relation est vraie pour tout n. On choisit alors d'exprimer toutes les vibrations lumineuses en fonction de $\underline{s_1}(M,t)$ qui sera la vibration de référence :

$$\begin{aligned}
\underline{s_2}(M,t) &= \underline{s_1}(M,t)\ \mathrm{e}^{-j\varphi} \\
\underline{s_3}(M,t) &= \underline{s_2}(M,t)\ \mathrm{e}^{-j\varphi} = \underline{s_1}(M,t)\ \mathrm{e}^{-2j\varphi} \\
\underline{s_n}(M,t) &= \underline{s_1}(M,t)\ \mathrm{e}^{-j(n-1)\varphi}
\end{aligned}$$

I.2 Raisonnement qualitatif : influence de N sur l'intensité lumineuse

Pour raisonner qualitativement, utilisons la représentation graphique de Fresnel.

Représentation de Fresnel (rappel) :
La représentation de Fresnel consiste à représenter les amplitudes complexes dans le plan complexe (sous forme de vecteurs).

Quitte à redéfinir l'origine des temps, on peut toujours choisir l'un des retards de phase pour l'un des signaux comme étant nul. On choisit ici d'imposer une phase nulle pour $\underline{s_1}(M,t)$. On dit qu'on choisit $\underline{s_1}$ comme origine des phases. Ainsi, on a $\underline{s_1}(M,t) = s_0\ \mathrm{e}^{j\omega t} = \underline{S_1}\ \mathrm{e}^{j\omega t}$ avec $\underline{S_1} = s_0$ l'amplitude complexe de $\underline{s_1}$.

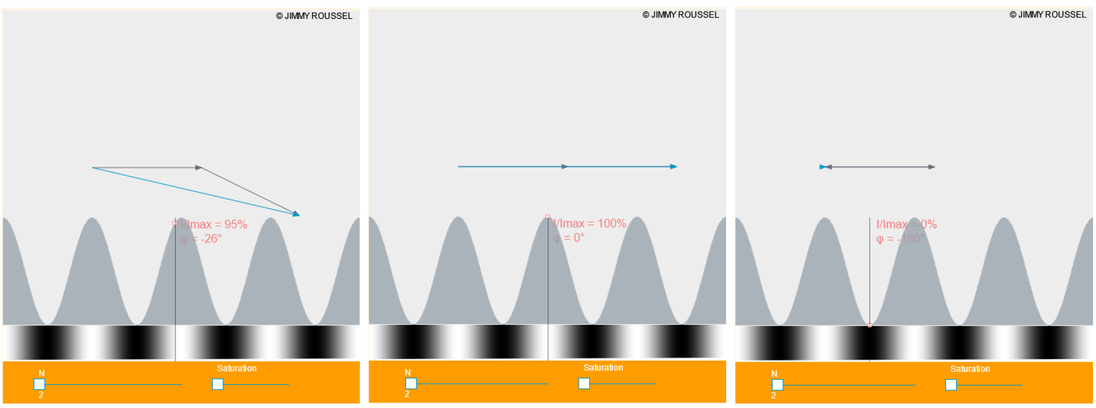
Réalisons par exemple la représentation de Fresnel dans le cas $N = 4$.

★ Représentation de Fresnel dans le cas $N = 4$.

Dans la suite, on se base sur la simulation https://femto-physique.fr/simulations/reseaux-construction-de-fresnel.php pour expliquer l'influence de la valeur de N.

<u>**Cas $N = 2$:**</u>

Ce cas correspond au chapitre OO2, dans le cas particulier où $I_1 = I_2 = I_0$.



(a) φ quelconque (b) $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ (c) $\varphi = \pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

★ Légender $\overrightarrow{S_1}$, $\overrightarrow{S_2}$ et $\overrightarrow{S}$ sur le cas φ qq. Indiquer : intensité max : interf constructives / intensité min : interf destructives

Cas N quelconque :

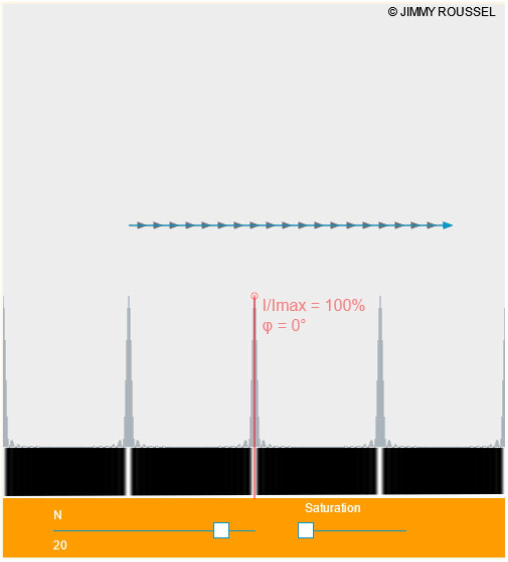


Figure 2: $N = 20$ et $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

★ On aura une intensité maximale si tous les vecteurs $\overrightarrow{S_n}$ sont colinéaires de même sens, c'est-à-dire si $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

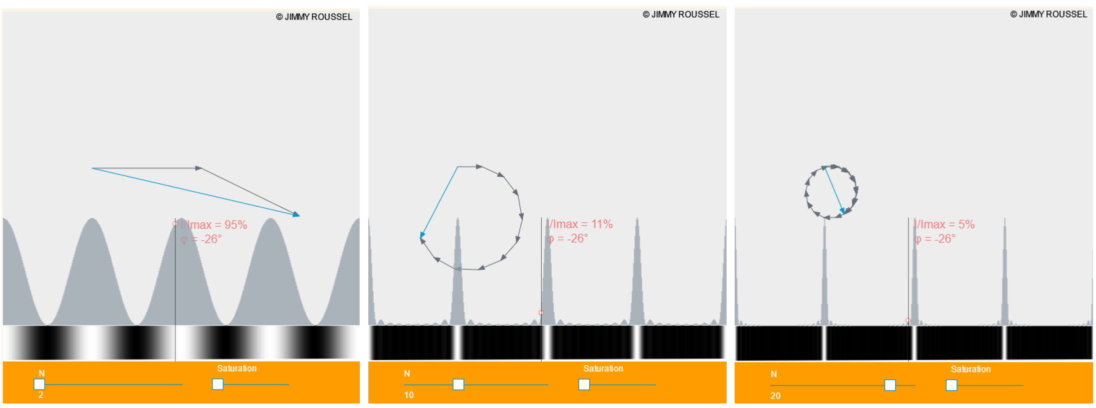
Condition d'interférences constructives

Dans le cas d'une interférences à N ondes, l'intensité lumineuse sera maximale si toutes les vibrations lumineuses sont en phase les unes avec les autres : $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Il s'agit de la condition d'interférences constructives.

Cette condition est inchangée par rapport au cas $N = 2$.

★ On a alors $\vec{S} = N\overrightarrow{S_1} \Rightarrow I_{\max} = K\left\|\vec{S}\right\|^2 = K\left\|\overrightarrow{S_1}\right\|^2 N^2 = N^2 I_0$. Plus N est grand, plus l'intensité lumineuse maximale est grande.

On retiendra que l'intensité lumineuse maximale augmente en N^2 : elle augmente donc très vite quand N augmente.



(a) $N = 2$ et φ quelconque (b) $N = 10$ et φ quelconque (c) $N = 20$ et φ quelconque

Figure 3: La simulation est faite pour que la longueur de $\vec{S}$ correspondant à $I_{\max}$ soit toujours la même, quelque que soit N (redimensionnement de la longueur de $\overrightarrow{S_1}$).

★ Partons de $\varphi = 2k\pi$ et augmentons φ. L'intensité lumineuse diminue, d'autant plus rapidement que N est grand. On retiendra que les franges brillantes deviennent plus fines lorsque N augmente.

I.3 Raisonnement quantitatif : expression de l'intensité lumineuse

Dans la sous-partie I.1, nous avons établi que, pour tout n compris entre 1 et N :

$$\underline{s_n}(M,t) = \underline{s_1}(M,t)\ \mathrm{e}^{-j(n-1)\varphi}$$

Par additivité des amplitudes complexes (ondes cohérentes entre elles) :

$$\underline{s}(M,t) = \sum_{n=1}^{N} \underline{s_n}(M,t) = \underline{s_1}(M,t) \sum_{n=1}^{N}\ \mathrm{e}^{-j(n-1)\varphi} = \underline{s_1}(M,t) \sum_{p=0}^{N-1}\ \mathrm{e}^{-jp\varphi}$$

On reconnaît la somme des N premiers termes d'une suite géométrique. Donc :

★ $$\underline{s}(M,t) = \underline{s_1}(M,t)\frac{1-\ \mathrm{e}^{-jN\varphi}}{1-\ \mathrm{e}^{-j\varphi}} \qquad \text{et} \qquad I(M) = \underbrace{K\left|\underline{s_1}(M,t)\right|^2}_{=I_0}\left|\frac{1-\ \mathrm{e}^{-jN\varphi}}{1-\ \mathrm{e}^{-j\varphi}}\right|^2$$

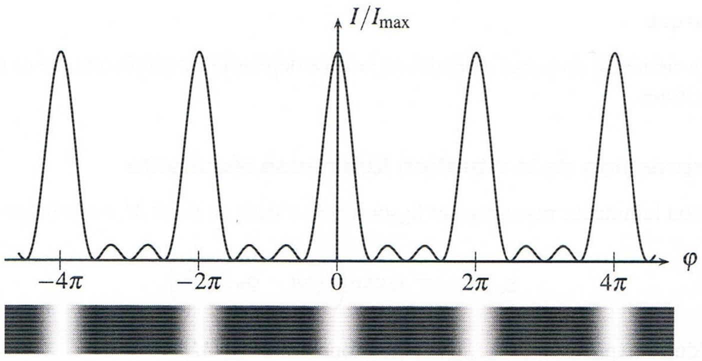
Maths (passer par la semi-somme) :

$$\left|\frac{1-\ \mathrm{e}^{-jN\varphi}}{1-\ \mathrm{e}^{-j\varphi}}\right|^2 = \frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

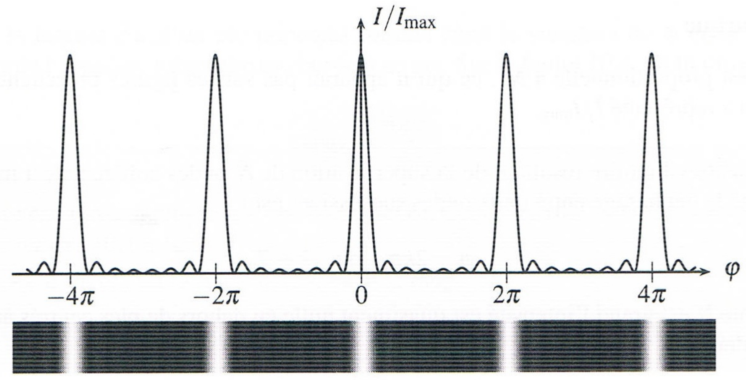
Ainsi :

$$I(M) = I_0\frac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)}$$

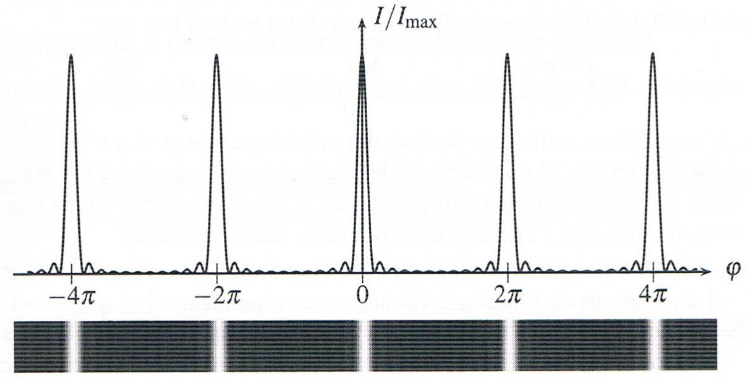
Sur les figures ci-dessous, on a représenté $\dfrac{I}{I_{\max}}$ en fonction de φ pour différentes valeurs de N. $I_{\max}$ est l'intensité lumineuse maximale.



Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 4$.



Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 8$.



Représentation de l'intensité vibratoire pour $N = 12$.

On retrouve les conclusions faites avec le raisonnement qualitatif, que l'on va pouvoir compléter :

- On observe une série de pics au centre desquels l'intensité est maximale : on parle de maxima principaux. Ces maxima principaux sont atteints pour $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire lorsque les ondes sont toutes en phase. On retrouve la condition d'interférences constructives.
- Plus N est grand, plus la finesse des maxima principaux est grande.
- On observe en plus la présence de maxima secondaires entre deux maxima principaux. L'intensité de ces maxima secondaires est bien plus faible que celle des maxima principaux. Le nombre de maxima secondaires augmente quand N augmente.

Enfin, déterminons explicitement la largeur des maxima principaux et l'expression de l'intensité maximale en s'appuyant sur la formule déterminée.

Largeur des maxima principaux :

On cherche les valeurs de φ telles que $I(\varphi) = I_0 \dfrac{\sin^2(N\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = 0$.

Ceci sera vérifié si $\sin(N\varphi/2) = 0$ et que $\sin(\varphi/2) \neq 0$. Donc :

$$\frac{N\varphi}{2} = q\pi \iff \varphi = \frac{2q\pi}{N} \qquad \text{et} \qquad \frac{\varphi}{2} \neq k\pi \iff \varphi \neq 2k\pi$$

★ avec $(q,k) \in \mathbb{Z}^2$.
Représentation d'un maximum principal et représentation de la demi-largeur des maxima principaux $\Delta\varphi_{1/2} = \dfrac{2\pi}{N}$
On retrouve que plus N est grand, plus les maxima principaux sont fins.

Demi-largeur des maxima principaux

Les maxima principaux ont une demi-largeur de

$$\Delta\varphi_{1/2} = \frac{2\pi}{N}$$

Plus N est grand, plus ces maxima principaux sont fins.

Remarque : On peut interpréter la condition $I = 0$ pour $\varphi = \dfrac{2q\pi}{N} \neq 2k\pi$ dans la représentation de Fresnel. En effet, pour ces valeurs de φ, $N\varphi$ est un multiple de 2π : les vecteurs mis bout à bout forment un cercle et induisent que l'intensité lumineuse résultante est effectivement nulle.

Intensité maximale :

Vérifions que si $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, alors l'intensité lumineuse est maximale. On se retrouve dans le cas où $\sin\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) = 0$: on est dans le cas d'indétermination de la valeur de la fonction.

Pour déterminer cette valeur, on procède comme en mathématiques, et on cherche un équivalent de la fonction au voisinage de $2k\pi$. Posons $\varphi = 2k\pi + \varepsilon$ avec $\varepsilon \to 0$. Des développements limités donnent alors :

$$\sin\left(\frac{N\varphi}{2}\right) = \pm\sin\left(\frac{N\varepsilon}{2}\right) \simeq \pm\frac{N\varepsilon}{2}$$
$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \simeq \pm\frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$I(M) \sim I_0 \frac{\left(\pm\dfrac{N\varepsilon}{2}\right)^2}{\left(\pm\dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = N^2 I_0$$

qui est bien la valeur maximale possible de l'intensité lumineuse. On valide donc que la condition $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est la condition d'interférences constructives.

II Application concrète de l'interférences à N ondes : le réseau de diffraction

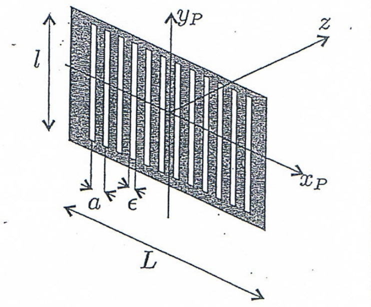
II.1 Pourquoi observe-t-on des interférences avec un réseau ?

Un réseau est une surface diffractante sur laquelle un motif est répété un grand nombre N de fois. La période spatiale de répétition du motif s'appelle le **pas** a **du réseau**. Les motifs sont appelés les **traits du réseau**.
Un réseau peut être aussi caractérisé par son **nombre de traits par millimètre**.

Le motif sera généralement une fente, mais il existe d'autres réseaux avec un motif différent (par exemple, la surface d'un CD est formée de petits creux régulièrement espacés : cette surface agit comme un réseau).

Dans le cadre du cours, nous considérerons uniquement des réseaux par transmission pour lesquels la lumière traverse le réseau, mais il existe aussi des réseaux par réflexion (par exemple : le CD).

Modélisation d'un réseau par transmission :



On appelle :

- a le pas du réseau
- ε la largeur d'une fente et ℓ sa hauteur
- L la largeur éclairée du réseau et N le nombre de fentes éclairées : $L \simeq Na$

Ordres de grandeur :

- Caractéristiques de la fente : $\varepsilon \sim 500\,\text{nm}$ à $1\,\mu\text{m}$ et $\ell \sim 5\,\text{cm}$
- Caractéristiques du motif : environ 1000 traits/mm.

★ Le pas du réseau est donc $a = \dfrac{1}{1000}$ mm, soit $a \sim 1\,\mu\text{m}$.

- Largeur éclairée par la source lumineuse : $L \sim 1\,\text{mm}$. On en déduit le nombre N de fentes éclairées : $N = \dfrac{L}{a} \sim 1000$

On éclaire toujours un réseau par une onde plane incidente, c'est-à-dire un faisceau parallèle de rayons lumineux provenant du même point source primaire S.

Conséquences des ordres de grandeur et des conditions d'éclairage :

★

- **Cohérence** : Les rayons lumineux arrivant sur toutes les fentes du réseau proviennent du même point source primaire : les ondes sont cohérentes entre elles.
- **Diffraction** : $\varepsilon < 1000\lambda$: il y a diffraction dans la direction $\overrightarrow{e_x}$. Cela permet d'obtenir un champ d'interférences non nul. En revanche, $\ell > 1000\lambda$: pas de diffraction selon $\overrightarrow{e_y}$.
- **N ondes** : $N \gg 1$: les intensités lumineuses des maxima principaux seront importantes et les maxima principaux seront très fins. Cela permettra de repérer les pics d'interférences constructives très précisément.

II.2 Formule des réseaux

On considère un réseau éclairé par une source primaire S ponctuelle et monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0. Cette source est **située à l'infini**. On appelle n l'indice optique du milieu homogène de propagation.

Appelons θ_0 l'angle d'incidence sur le réseau (par définition d'un angle d'incidence, il est défini par rapport à la normale du réseau).

On choisit d'étudier les **interférences à l'infini**, en un point M. Appelons θ l'angle repérant la direction de diffraction associée au point M.

Soient O_1, O_2, ..., O_N les centres des traits du réseau. Déterminons la différence de chemins optiques $\delta(M)$ entre deux traits consécutifs.

Schéma, cf poly MP p.6
On définit : $\delta(M) = (SM)_j - (SM)_{j+1}$.
D'après le théorème de Malus, O_j et H' sont sur la même surface d'onde relative à S : $(SO_j) = (SH')$. D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, O_{j+1} et H sont sur la même surface d'onde relative à M : $(O_{j+1}M) = (HM)$.
★ Donc : $\delta(M) = (O_jH) - (H'O_{j+1}) = n\,(O_jH - H'O_{j+1}) = n\,(a\,\sin(\theta) - a\,\sin(\theta_0))$
On en déduit la différence de phase entre deux ondes émises par deux traits successifs du réseau :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} na\,(\,\sin(\theta) - \,\sin(\theta_0))$$

Cette différence de phase entre deux ondes émises par deux traits successifs est constante. On est donc dans le cas traité dans la partie I.

Faire deux graphes superposés (cf. poly 24-25).
On sait donc que le maximum principal d'ordre k vérifie $\varphi = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Donc, les maxima principaux vérifient :

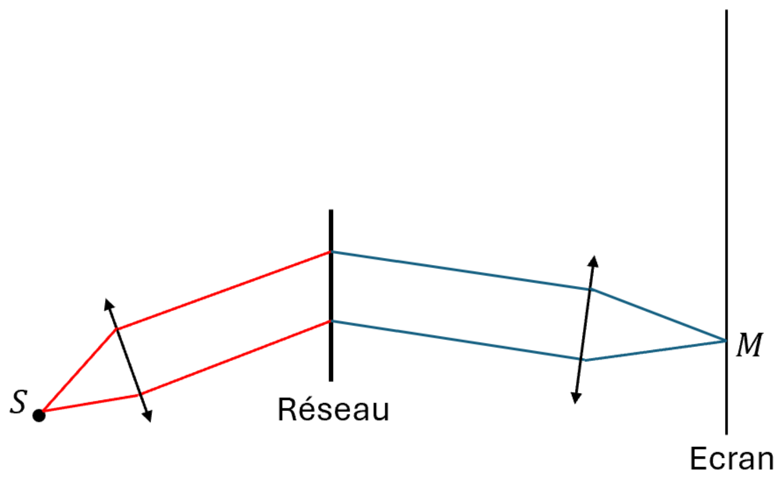
★
$$\frac{2\pi}{\lambda_0} na\,(\,\sin(\theta_k) - \,\sin(\theta_0)) = 2k\pi \iff \sin(\theta_k) - \,\sin(\theta_0) = \frac{k\lambda_0}{na}$$

Formule des réseaux (A savoir par coeur)
On appelle alors k l'ordre de diffraction du réseau. Cette formule donne **la direction des maxima d'intensité derrière un réseau**.

II.3 Montage expérimental

Source primaire ponctuelle

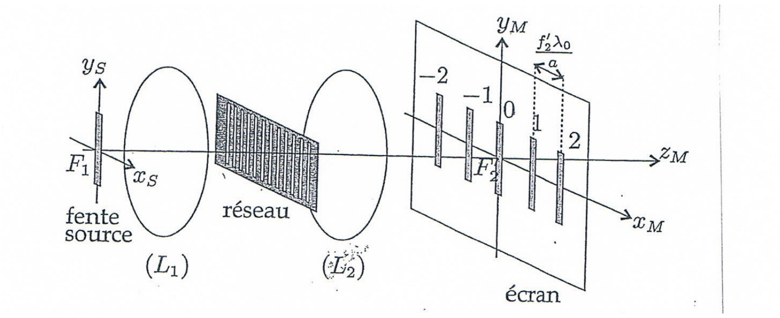
On souhaite éclairer le réseau avec une onde plane : on place donc en pratique la source primaire S dans le plan focal objet d'une lentille convergente $(\mathcal{L}_1)$. On souhaite observer les interférences à l'infini : on place donc un écran dans le plan focal image d'une lentille convergente $(\mathcal{L}_2)$.



Concrètement, on utilisera un dispositif nommé spectrogoniomètre à réseau, dans lequel la lentille $(\mathcal{L}_2)$ pourra être déplacée. En la déplaçant, nous observerons successivement chacun des maxima d'intensité lumineuse, pour chaque ordre de diffraction k.

Fente source primaire

Pour gagner en luminosité, on sera ammené à utiliser une fente source primaire plutôt qu'une source primaire ponctuelle. Cela ne pose aucun problème, car la diffraction n'a pas lieu selon la direction des fentes du réseau et que les différents points sources de la fente émettent des ondes incohérentes entre elles : les intensités lumineuses se somment sur l'écran.



On obtiendra alors des figures d'interférences de ce type :

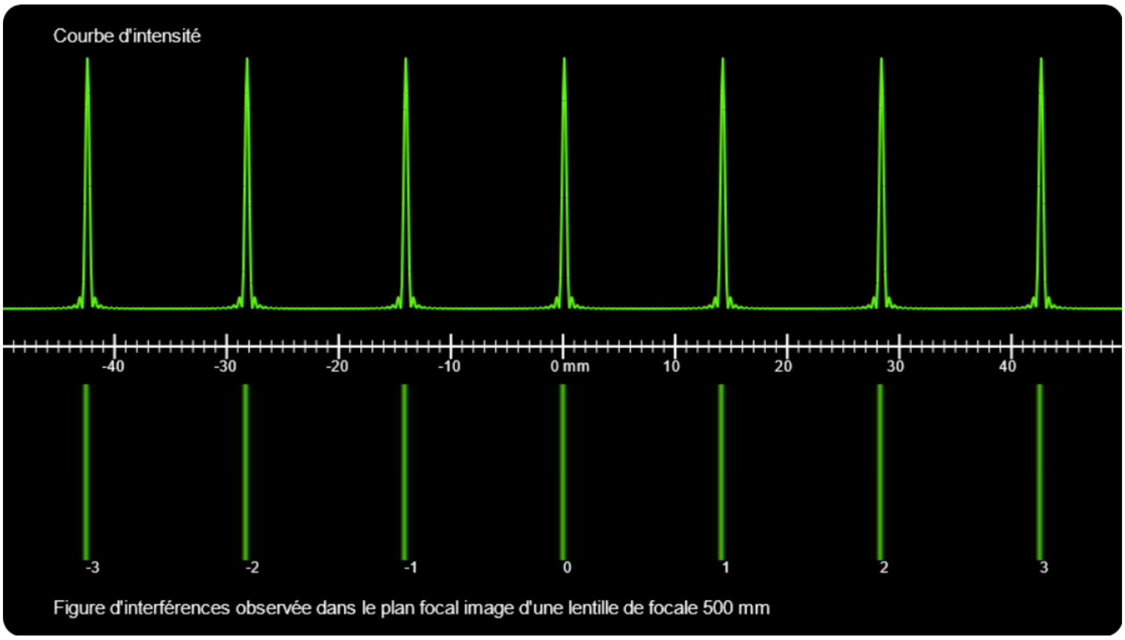


Figure d'interférences observée dans le plan focal image d'une lentille de focale 500 mm

Exercice : On éclaire un réseau ayant 500 traits par millimètre avec un faisceau incident parallèle normal de longueur d'onde $\lambda = 600\,\text{nm}$. On travaille dans l'air assimilable au vide. Déterminer le nombre maximal de pics de diffraction observables.

★

Sont fixés : $a = \dfrac{1\,\text{mm}}{500} = 2 \times 10^{-6}\,\text{m}$, λ, $n = 1$ et $\theta_0 = 0$. On a :

$$|\sin(\theta_k)| = \frac{|k|\,\lambda}{a} \leqslant 1 \Rightarrow |k| \leqslant \frac{a}{\lambda} = 3.3$$

Au maximum, on voit donc 7 pics de diffractions (ordres -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3).
En pratique, ordres ± 3 faiblement observables car peu d'intensité diffractée à ces grands angles. Et on retient : on ne pourra souvent pas faire de DL car pas de petits angles.

II.4 Application : mesure des longueurs d'onde du spectre d'émission d'une source

Considérons désormais une source primaire (ponctuelle ou sous forme de fente) polychromatique éclairant un réseau. On réalise les montages expérimentaux précédents. Comme les ondes émises par différentes longueurs d'onde sont incohérentes entre elles, il y a additivité de l'intensité lumineuse résultant de chaque longueur d'onde λ_0. Ainsi la formule des réseaux s'applique pour chacune des longueurs d'onde λ_0 :

$$\sin(\theta_k) = \sin(\theta_0) + \frac{k\lambda_0}{na}$$

Ordre 0 :

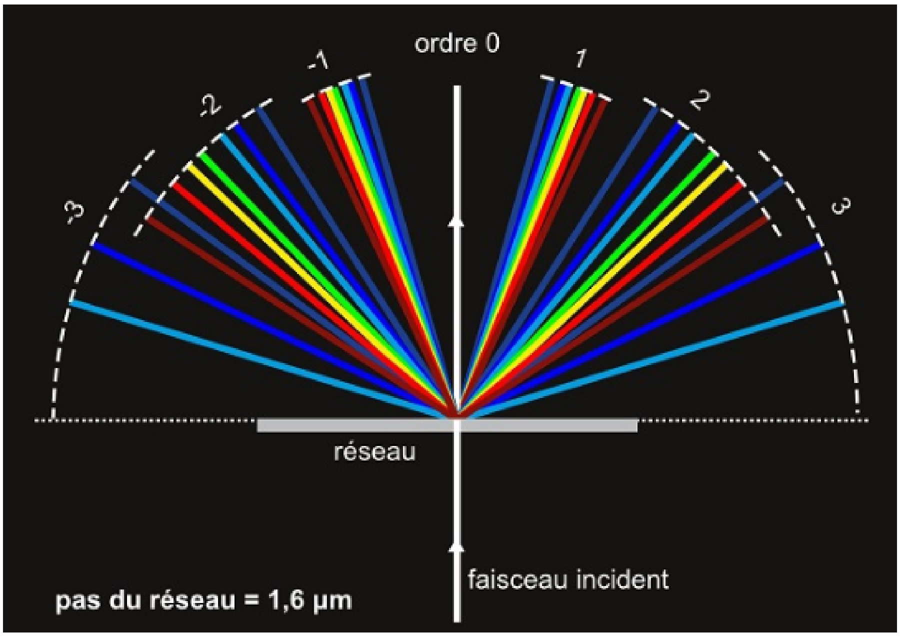
★ Quelque que soit λ_0, $\sin(\theta) = \sin(\theta_0) \Rightarrow \theta = \theta_0$ (angles compris dans $[-\pi/2, \pi/2]$). Ainsi, l'ordre 0 n'est pas dévié par le réseau : on dit que l'ordre 0 n'est pas dispersif.

Pour l'ordre 0, l'optique géométrique s'applique donc (aucune déviation par le réseau), et le point M est l'image géométrique de S.

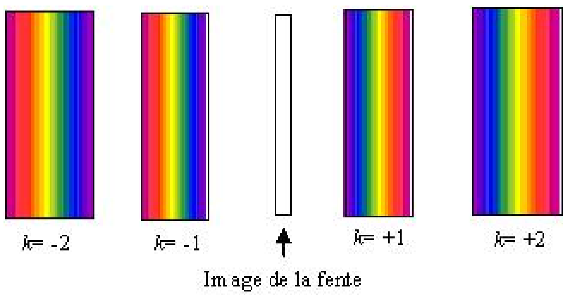
Ordre $k \neq 0$:

★ La position des maxima d'intensité dépend alors de λ_0 : on parle d'ordres dispersifs.

Ainsi, si le pas du réseau a (ainsi que l'indice n du milieu de propagation) est connu, alors le réseau permet de mesurer les longueurs d'onde λ_0 du spectre d'émission de la source. Le réseau est le constituant principal d'un **spectromètre**.



Exemple de figure obtenue sur un écran :



Commentaires sur la figure d'interférences :

- On observe bien la dispersion de la lumière pour tous les ordres $k \neq 0$.
- Dans un ordre k donné, en partant de $\theta = \theta_0$, on observe d'abord le bleu puis les différentes couleurs par ordre croissant de longueur d'onde puis en dernier le rouge.
- La différence entre les angles θ relatifs aux couleurs rouge et bleu dans un ordre k augmente avec k : plus l'ordre est grand plus le réseau est dispersif et plus les différentes couleurs sont séparées angulairement.

II.5 Minimum de déviation

Expérimentalement, il n'est pas aisé de déterminer précisément la direction de la normale au réseau (cela est possible, mais un peu technique). Le souci est que tous les angles θ_k et θ_0 sont définis à partir de cette normale... Comment peut-on s'affranchir de la connaissance de la direction de la normale au réseau tout en déterminant néanmoins les longueurs d'onde λ_0 ?

L'astuce est de mesurer non pas θ_k, mais l'angle de déviation $D_k = \theta_k - \theta_0$. Cet angle dépend de l'ordre k et de la longueur d'onde λ_0 étudiés. Considérons donc k et λ_0 fixés. (Expérimentalement, cela revient à étudier l'une des raies visibles derrière le réseau.)

En faisant varier l'angle θ_0, on se rend compte que D_k passe par un minimum, que l'on notera $D_{k,m}$. On cherche à exprimer théoriquement ce minimum de déviation.

Etape 1 : Différentions l'angle de déviation et plaçons nous au niveau du minimum de cet angle D_k :

$$\mathrm{d}D_k = \mathrm{d}\theta_k - \mathrm{d}\theta_0 = 0 \Rightarrow \mathrm{d}\theta_k = \mathrm{d}\theta_0$$

Etape 2 : Différentions la relation des réseaux, sachant que seuls θ_0 et θ_k peuvent être modifiés :

$$\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0) = \frac{k\lambda_0}{na} \Rightarrow \cos(\theta_k)\mathrm{d}\theta_k - \cos(\theta_0)\mathrm{d}\theta_0 = 0 \Rightarrow \cos(\theta_k) = \cos(\theta_0)$$

Les angles θ_k et θ_0 étant compris dans $[-\pi/2, \pi/2]$, les deux solutions possibles sont :

- $\theta_k = \theta_0$: c'est le cas de l'ordre 0, inintéressant dans le but d'accéder aux valeurs de λ_0. On exclut donc expérimentalement cette situation.
- $\theta_k = -\theta_0$: situation intéressante. Le maximum d'intensité est donc dans une direction symétrique à la direction de l'ordre 0 par rapport à la normale du réseau.

En se plaçant donc au minimum de déviation, on a $\theta_k = -\theta_0$, soit $D_{k,m} = \theta_k - \theta_0 = 2\theta_k$ et soit :

$$\sin(\theta_k) - \sin(\theta_0) = 2\sin(\theta_k) = \frac{k\lambda_0}{na}$$

On aboutit à la formule des réseaux exprimée avec le minimum de déviation :

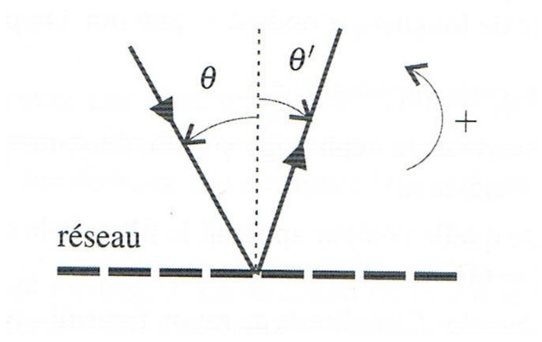
$$\sin\left(\frac{D_{m,k}}{2}\right) = \frac{k\lambda_0}{2na}$$

$D_{m,k}$ étant facile à mesurer en pratique, on en déduit aisément la valeur de λ_0.

Exercices

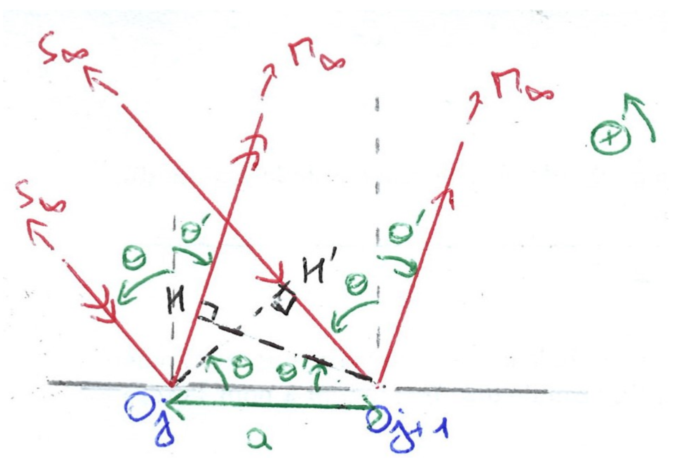
Ex. 1 Réseau par réflexion

Dans un réseau plan par réflexion, les fentes transparentes sont remplacées par des bandes rectangulaires réfléchissantes distantes de a, séparées par des traits pratiquement non réfléchissants. Un faisceau lumineux parallèle de longueur d'onde λ_0 tombe sur ce réseau avec un angle d'incidence algébrique θ.



1. Etablir la relation, faisant intervenir un entier relatif quelconque k, donnant les angles θ'_k, repérant les directions dans lesquelles on trouve de la lumière réfléchie.
2. On considère que N fentes du réseau sont éclairées et on appelle I_0 l'intensité lumineuse émise par une seule des fentes du réseau considérée seule. Déterminer l'expression de l'intensité diffractée totale dans les directions θ'_k déterminées précédemment.
3. On envoie sous l'incidence $\theta = 30°$ un faisceau parallèle de lumière blanche. Calculer la(les) longueur(s) d'ondes qui est(sont) diffractée(s) dans la direction du faisceau incident sachant que le réseau comporte 1000 traits par millimètre.

Correction de l'exercice 1



1. On cherche la différence de chemins optiques $\delta = (SO_{j+1}M) - (SO_jM)$ entre deux ondes émises par deux fentes successives O_j et O_{j+1} du réseau. On étudie les interférences à l'infini.
D'après le théorème de Malus, O_j et H' sont sur la même surface d'onde relative à S : $(SO_j) = (SH')$. D'après le théorème de Malus et le principe de retour inverse de la lumière, O_{j+1} et H sont sur la même surface d'onde relative à M : $(Oj+1M) = (HM)$. Donc :

$$\delta = (SO_{j+1}) - (SO_j) + (O_{j+1}M) - (O_jM) = H'O_{j+1} - O_jH$$

(indice optique $n = 1$).
Géométriquement : $H'O_{j+1} = a\,\sin(\theta) > 0$ et $O_jH = -a\,\sin(\theta') > 0$ (**attention : les angles sont algébriques, et sur le schéma, $\theta' \in [-\pi/2, 0]$. Donc, ne pas oublier le signe $-$!**). Donc : $\delta = a\,(\sin(\theta) + \sin(\theta'))$.

Les directions des maxima principaux θ'_k est obtenue lorsque les N ondes sont en phase :

$$\frac{\delta}{\lambda_0} = \frac{a\,(\,\sin(\theta) + \,\sin(\theta'_k))}{\lambda_0} = k \Rightarrow \boxed{\sin(\theta'_k) + \,\sin(\theta') = k\frac{\lambda_0}{a}}$$

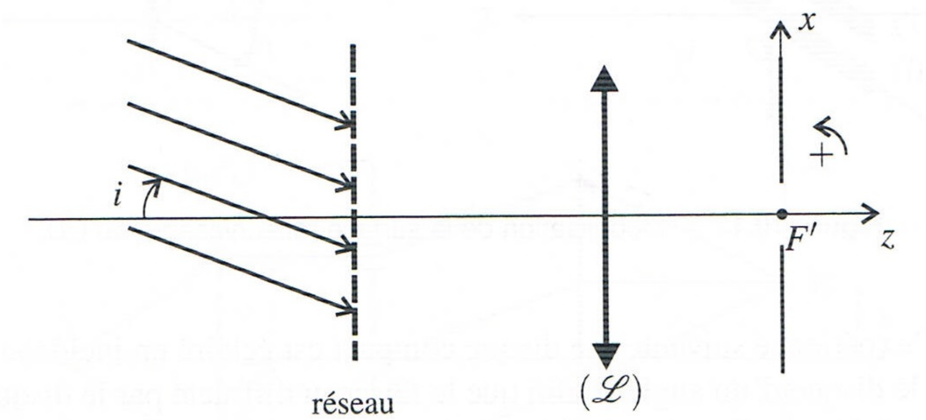
avec $k \in \mathbb{Z}$. Formule des réseaux par réflexion

Remarque : Oui, techniquement, il n'y a pas de la lumière diffractée que dans ces directions θ'_k (largeur des maxima principaux). Mais, la question sera souvent posée sous cette forme...

2. On cherche l'expression de l'intensité diffractée dans les directions des maxima principaux, c'est-à-dire lorsque les N ondes sont en phase (N est le nombre de fentes éclairées).
   En raisonnant sur la représentation de Fresnel des vibrations lumineuses complexes émises par les différentes fentes du réseau $\underline{s_n} = s_0\ e^{j(\omega t - \varphi_n)}$, on déduit immédiatement que le vecteur de Fresnel résultant $\overrightarrow{S} = N\overrightarrow{S_1}$. Donc, l'intensité lumineuse dans les directions θ'_k est $I_{\max} = N^2 I_0$ où I_0 est l'intensité lumineuse associée à l'une des ondes émises.
3. *Ne pas se mélanger dans les questions. Avant, on faisait varier l'angle de réflexion. Maintenant, on fixe l'angle de réflexion et on fait varier la longueur d'onde.*
   On souhaite que $\theta' = \theta$. Comme les ondes émises à différentes longueurs d'onde sont incohérentes entre elles, il y a additivité de l'intensité lumineuse. Donc, la formule précédente s'applique à chaque longueur d'onde λ_k. Ainsi :
   $$2\,\sin(\theta) = \frac{k\lambda_k}{a} \Rightarrow \lambda_k = \frac{2\,\sin(\theta)a}{k}$$
   De plus, λ_k doit appartenir au visible. A.N. : $a = 1\,\mu\text{m}$. On trouve que la seule longueur d'onde diffractée dans la direction incidente est : $\lambda_2 = 500\,\text{nm}$ (vert). La direction correspond alors à l'ordre 2 de diffraction.

Ex. 2 Monochromateur à réseau

Un monochromateur à réseau est un dispositif permettant d'obtenir une onde quasi monochromatique à partir d'une source de lumière blanche. Le réseau a 500 traits par mm et $N = 10\,000$ traits au total. Il est éclairé sous l'incidence i par un faisceau parallèle de lumière blanche. Une lentille convergente mince de distance focale $f' = 20\,\text{cm}$ a son axe normal au plan du réseau et une fente fine se trouve centrée au foyer image F' de la lentille.



1. Déterminer l'angle d'incidence i sachant que le monochromateur est réglé pour que la lumière de longueur d'onde $\lambda_0 = 550\,\text{nm}$ diffractée dans l'ordre 2 parvienne en F'.
2. Pour une longueur d'onde λ un peu différente de λ_0, les rayons diffractés par le réseau dans l'ordre 2 convergent en un foyer secondaire image Φ' de la lentille à l'abscisse x. Donner une expression approchée de x en fonction de $\lambda - \lambda_0$ si l'on ne considère que des longueurs d'onde voisines de λ_0.
3. La fente placée au foyer de la lentille a une largeur $b = 0.1\,\text{mm}$ et ne laisse donc passer que les radiations dont les longueurs d'onde sont comprises entre $\lambda_0 - \Delta\lambda/2$ et $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$. Calculer l'intervalle $\Delta\lambda$.
4. En fait, chaque pic de diffraction a une certaine largeur. On se demande si l'intégralité du pic de diffraction de la radiation à λ_0 passe à travers la fente. Calculer la demi-largeur Δx dans le plan focal de la lentille du pic de diffraction d'ordre 2 pour la longueur d'onde λ_0. Conclure.

Correction de l'exercice 2

1. Les rayons lumineux parvenant en F' sont parallèles à l'axe optique avant la lentille, c'est-à-dire que leur angle de diffraction dans l'ordre 2 par le réseau est $\theta_2 = 0$. En appliquant la formule des réseaux, on a pour l'ordre $k = 2$:

$$\sin(\theta_2) - \sin(i) = -\sin(i) = \frac{2\lambda_0}{a} \Rightarrow i = -\arcsin\left(\frac{2\lambda_0}{a}\right)$$

A.N. : On a ici $a = \dfrac{1\,\text{mm}}{500}$, donc : $i = -33°$

2. L'hypothèse de considérer uniquement les longueurs d'onde voisines de λ_0 permet de supposer que θ_2' restera proche de 0 : on peut réaliser un DL de $\sin(\theta_2')$ dans la formule des réseaux.
⚠ Ceci est rare avec les réseaux : ce n'est que parce qu'on regarde dans une direction émergente proche de l'axe optique que l'on peut réaliser ce DL !
La formule des réseaux donne :

$$\sin(\theta_2') - \sin(i) = \frac{2\lambda}{a} \Rightarrow \theta_2' + \frac{2\lambda_0}{a} = \frac{2\lambda}{a}$$

Or, en repérant θ_2' sur le schéma, on en déduit que $\tan(\theta_2') \simeq \theta_2' = \dfrac{x}{f'}$. Ainsi :

$$x = f'\frac{2}{a}(\lambda - \lambda_0)$$

3. On raisonne sur les longueurs d'onde extrêmes : en $x = \dfrac{b}{2}$, le pic de diffraction est celui de $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$. Donc :

$$\frac{b}{2} = \frac{2f'}{a}\frac{\Delta\lambda}{2} \Rightarrow \Delta\lambda = \frac{ab}{2f'} = 0.5\,\text{nm}$$

Dispositif sélectionnant vraiment une plage de longueurs d'onde très restreinte.
Remarque : On perçoit l'intérêt d'utiliser l'ordre 2 dans le monochromateur : l'ordre 2 est plus dispersif que l'ordre 1, ce qui se traduit mathématiquement par la présence du facteur 1/2 dans l'expression de $\Delta\lambda$. Les différentes longueurs d'onde sont plus séparées par le réseau dans l'ordre 2 que dans l'ordre 1 : on gagne en monochromaticité.

4. Pour trouver la largeur du pic de diffraction, il faut utiliser la largeur connue en termes de déphasage dans le cas de l'interférence à N ondes et le lien entre le déphasage et x.
A la limite du pic de diffraction d'ordre $k = 2$, on connait le déphasage entre deux ondes émergeant du réseau par deux fentes successives : $\varphi = 4\pi + \dfrac{2\pi}{N}$.
Relions φ à θ, puis à x :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}a\left(\sin(\theta) - \sin(i)\right) = \frac{2\pi}{\lambda_0}a\left(\frac{x}{f'} + \frac{2\lambda_0}{a}\right)$$

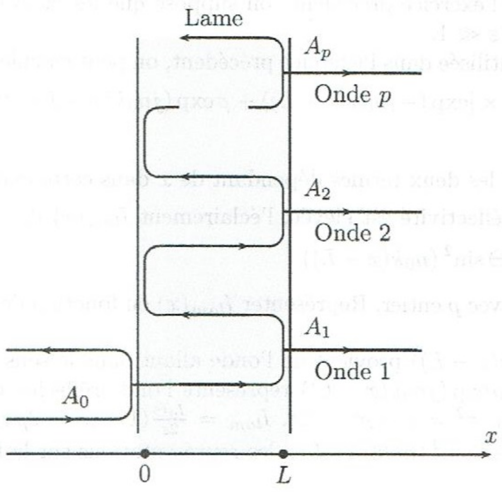
Donc, à la limite du pic de diffraction d'ordre 2 ($x = \Delta x$) :

$$4\pi + \frac{2\pi}{N} = 4\pi + \frac{2\pi a \Delta x}{\lambda_0 f'} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda_0 f'}{Na} = 5.5\,\mu\text{m} < \frac{b}{2}$$

L'intégralité du pic de diffraction d'ordre 2 passe bien à travers la fente du monochromateur.

Ex. 3 Interféromètre de Fabry-Pérot

L'interféromètre est constitué d'une lame à faces parallèles taillée dans un matériau transparent d'indice n_0 occupant l'espace compris entre $x = 0$ et $x = L$. On envoie depuis l'infini une onde lumineuse monochromatique plane de pulsation ω, se propageant dans la direction $\vec{e_x}$, d'amplitude A_0 et d'éclairement $I_0 = A_0^2$. L'onde incidente engendre une succession infinie d'ondes transmises et réfléchies aux interfaces vide-lame.



Lorsque une onde lumineuse de signal $\underline{s_i}(x,t)$ rencontre une interface lame/vide en $x = x_0$ ($x_0 = 0$ ou L), elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise de signaux respectifs $\underline{s_r}(x,t)$ et $\underline{s_t}(x,t)$ vérifiant $\underline{s_r}(x_0,t) = \rho\underline{s_i}(x_0,t)$ et $\underline{s_t}(x_0,t) = \tau\underline{s_i}(x_0,t)$. Les coefficients ρ et τ sont réels et vérifient $\rho^2 + \tau^2 = 1$; nous considérerons qu'ils sont les mêmes pour une onde venant de la lame ou pour une onde venant du vide.

1. **Etude des ondes transmises** On se place du côté $x > L$ et on repère les ondes émergeant successivement de la lame à l'aide d'un entier p variant de 1 à l'infini. L'onde p a une amplitude A_p. Sa phase en un point d'abscisse $x > L$ est notée $\Phi_p(x)$.
   (a) Exprimer A_1, A_2, puis A_p en fonction de A_0, ρ, τ et p.
   (b) Calculer le déphasage $\Phi = \Phi_{p+1}(x) - \Phi_p(x)$ en $x > L$ entre deux ondes successives p et $p+1$ issues de la lame, en fonction de $k = \dfrac{\omega}{c}$, L et n_0.
2. **Etude de l'éclairement transmis dans des cas particuliers**
   (a) A quelle condition sur Φ l'éclairement de l'onde transmise est-il maximal ? Montrer alors que l'éclairement total transmis est $I_{\text{t, max}} = I_0$.
   (b) On dit que les interférences entre les ondes p et $p+1$ sont destructives lorsque Φ est congru à π modulo 2π. On admet que dans ces conditions l'éclairement transmis $I_{\text{t, min}}$ est minimal. Déterminer $I_{\text{t, min}}$ en fonction de I_0 et ρ.
   (c) Exprimer le contraste $\mathcal{C} = \dfrac{I_{\text{t, max}} - I_{\text{t, min}}}{I_{\text{t, max}} + I_{\text{t, min}}}$ en fonction de ρ. Quel intérêt y a-t-il à travailler avec une valeur de ρ^2 la plus élevée possible ?
3. **Etude de l'éclairement transmis dans le cas général**
   (a) Montrer que, dans le cas général, le signal en $x > L$ s'écrit :

$$\underline{s}(x,t) = TA_0\ \mathrm{e}^{j(\omega t - \Phi_1(x))} \sum_{p=0}^{+\infty} R^p\ \mathrm{e}^{-jp\Phi}$$

   et exprimer R et T en fonction de ρ et τ.
   (b) Soit I_t l'éclairement transmis. Déterminer l'expression du facteur de transmission $\dfrac{I_t}{I_0}(\Phi)$. Retrouver les résultats de la question 2.

Correction de l'exercice 3

1. (a) **Onde 1** : L'onde 1 est issue de l'onde 0 après deux transmissions aux interfaces vide/lame. On a donc : $A_1 = \tau^2 A_0$, car la propagation dans la lame se fait sans atténuation (milieu transparent).
   Onde 2 : L'onde 2 subit une transmission, deux réflexions et une transmission : $A_2 = \tau^2\rho^2 A_0$.
   Onde p : L'onde p subit deux transmissions et $2(p-1)$ réflexions : $A_p = \tau^2\rho^{2(p-1)}A_0$.
   (b) L'onde incidente étant plane, progressive et harmonique, on sait que toutes les ondes créées aux interfaces seront également planes, progressives et harmoniques (OPPH). Ecrivons la forme complexe d'une vibration lumineuse allant dans le sens des x croissants à l'intérieur de la lame : $\underline{s}_{\text{croissant}} = A\ \mathrm{e}^{j(\omega t - k_\ell x + \varphi_0)}$ avec A l'amplitude (dépendant du nombre de réflexions et de transmissions subies), $k_\ell = \dfrac{n_0\omega}{c} = n_0 k$ avec $k = \omega/c$ et φ_0 une constante (dépendant du nombre de réflexions et de transmissions subies). Ainsi, lors de la traversée de la lame, une vibration allant dans le sens des x croissants accumule un déphasage

n_0kL. On obtient le même déphasage accumulé pour une onde allant dans le sens des x décroissants.

Or, l'onde $p+1$ a parcouru la distance supplémentaire de $2L$ dans la lame par rapport à l'onde p. Les réflexions, se faisant avec un coefficient de réflexion réel, n'ont aucun effet sur le déphasage de l'onde. Donc,

$$\Phi = \Phi_{p+1}(x) - \Phi(x) = 2n_0kL$$

Remarque : On obtient aussi ce résultat en raisonnant comme d'ordinaire en optique : le chemin optique supplémentaire parcouru par l'onde $p+1$ par rapport à l'onde p est de $2n_0L$. Donc, le déphasage supplémentaire accumulé est de $\frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}}2n_0L = k2n_0L$. Mais attention, il pourrait y avoir des déphasages supplémentaires dans le cas où ρ et τ ne seraient pas réels. Je trouvais cela plus simple de formuler la réponse en utilisant la forme usuelle des OPPH.

2. (a) Le plus simple est de raisonner dans la représentation de Fresnel. La vibration complexe de l'onde $p+1$ est reliée à celle de l'onde p par :

$$\underline{s_{p+1}} = \underline{s_p}\rho^2 \ \mathrm{e}^{-\Phi}$$

Toutes ces ondes sont cohérentes entre elles (onde supposée strictement monochromatique), donc il y a additivité des amplitudes complexes. L'amplitude complexe résultante aura le module le plus grand si toutes les ondes sont en phase (vecteurs colinéaires dans la représentation de Fresnel) : $\Phi = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ (on pourrait écrire $n \in \mathbb{Z}$, mais $\Phi > 0$).

Dans la représentation de Fresnel, on a alors (toutes les ondes étant en phase, on dirige tous les vecteurs de Fresnel selon $+\overrightarrow{e_x}$) :

$$\vec{S} = \sum_{p=1}^{+\infty} A_p\overrightarrow{e_x} = \tau^2 A_0 \sum_{p=1}^{+\infty} \rho^{2(p-1)}\overrightarrow{e_x} = A_0\tau^2\frac{1}{1-\rho^2}\overrightarrow{e_x}$$

en reconnaissant une série géométrique de raison $\rho^2 < 1$. Or, $\tau^2 = 1-\rho^2$. Donc : $\vec{S} = A_0\overrightarrow{e_x}$. On en déduit l'éclairement transmis :

$$I_{\text{t, transmis}} = \left\|\vec{S}\right\|^2 = A_0^2 = I_0$$

(facteur de proportionnalité entre I et $\left\|\vec{S}\right\|$ est $K = 1$ ici, car on nous définit $I_0 = A_0^2$).

(b) En raisonnant toujours dans le représentation de Fresnel, on a :

$$\left\|\vec{S}\right\| = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \cdots = A_0\tau^2\left(1-\rho^2+\rho^4-\rho^6+\ldots\right) = A_0\tau^2\frac{1}{1+\rho^2}$$

en reconnaissant une série géométrique de raison $-\rho^2$. Donc :

$$I_{\text{t, min}} = I_0\left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)^2$$

(c) On obtient après calculs : $\mathcal{C} = \dfrac{2\rho^2}{1+\rho^4}$ Plus ρ^2 sera proche de 1, plus le contraste tendra vers 1 (à la limite où $\rho^2 = 1$, on obtient le contraste maximal $\mathcal{C} = 1$).

3. (a) Les ondes étant cohérentes entre elles, la vibration complexe résultante est :

$$\underline{s}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty}\underline{s_p}(x,t) = \sum_{p=1}^{+\infty} A_p \ \mathrm{e}^{j(\omega t-\Phi_1(x)-(p-1)\Phi)} = A_0\tau^2 \ \mathrm{e}^{j(\omega t-\Phi_1(x))}\sum_{p=1}^{+\infty}\rho^{2(p-1)} \ \mathrm{e}^{-j(p-1)\Phi}$$

On retrouve donc le résultat de l'énoncé avec $T = \tau^2$ et $R = \rho^2 < 1$.

(b) On reconnait à nouveau une somme de série géométrique de raison $R\,\mathrm{e}^{-j\Phi}$ de module strictement inférieur à 1. Ainsi : $\underline{s}(x,t) = TA_0 \ \mathrm{e}^{j(\omega t-\Phi_1(x))}\dfrac{1}{1-R\,\mathrm{e}^{-j\Phi}}$. On en déduit donc l'intensité lumineuse :

$$I_t = |\underline{s}(x,t)|^2 = I_0T^2\left|\frac{1}{1-R\,\mathrm{e}^{-j\Phi}}\right|^2$$

Ainsi :

$$\frac{I_t}{I_0} = T^2\left|\frac{1}{1-R\,\mathrm{e}^{-j\Phi}}\right|^2 = \frac{T^2}{1+R^2-2R\cos(\Phi)}$$

- Raisonnons sur Φ. L'intensité transmise sera maximale si le dénominateur est minimal, i.e. si $\cos(\Phi) = 1$, i.e. si $\Phi = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$. L'intensité sera minimale si $\cos(\Phi) = -1$, i.e. Φ congru à π modulo 2π.
- Intensité max : $I_t/I_0 = \dfrac{T^2}{(1-R)^2} = 1$ car $T = 1 - R$.
- Intensité min : $I_t/I_0 = \dfrac{T^2}{(1+R)^2} = \dfrac{(1-R)^2}{(1+R)^2}$

On retrouve bien tous les résultats de la Q.2.