Exercice 49. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. Montrer que $X^3 - X - 1$ admet une racine réelle α strictement positive et deux racines complexes non réelles conjuguées β, $\bar{\beta}$.
2. En déduire que le spectre complexe de A est inclus dans $\{\alpha, \beta, \bar{\beta}\}$.
3. Montrer que le déterminant de A est strictement positif.

Exercice 50. Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(-x) = \cos x$.

Exercice 51. Déterminer $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X+1) - P(X) = P'(X)$.

Exercice 52. *Les questions sont indépendantes.*

1. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}\right)$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{|\cos n| + |\sin n|}{n}$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite croissante de réels strictement positifs telle que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{u_{n+1} - u_n}{u_n}$.

Indication : Comparer le terme général de cette série avec une intégrale de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Exercice 53. Soit $p \in]0,1[$. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telles que X_n suit la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ si n est pair et la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1-p)$ si n est impair.

Soit $\omega \in \Omega$. On admet que l'on définit une variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$, en posant :

$$Y(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* / X_n(\omega) = 1\} \text{ s'il existe } n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } X_n(\omega) = 1\text{; et } Y(\omega) = 0 \text{ sinon.}$$

1. Justifier que $P(Y = 0) = 0$.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Montrer que Y est d'espérance finie égale à $\dfrac{1+p}{1-p+p^2}$.

Exercice 54. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que pour tout $(A, B, C, D, A', B', C', D') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^8$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

0. *Préliminaire.* Soit $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$. Calculer et simplifier le produit de matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'I_n & c'I_n \\ b'I_n & d'I_n \end{pmatrix}.$$

En déduire que $Q = \begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ et préciser Q^{-1}.

1. Soient $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

Démontrer que V est diagonalisable et déterminer $D \in D_2(\mathbb{R})$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}VP$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de la question 1. Montrer, en considérant la matrice $Q = \begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix}$ de la question préliminaire 0. que B est semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}$ où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: soient $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\Delta = R^{-1}AR$.

3. a. Calculer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}$.

3. b. En déduire que B est diagonalisable en déterminant une matrice $\mathcal{D} \in D_{2n}(\mathbb{R})$ semblable à B.

Exercice 55. Soient $C > 0$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = n \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\, dt.$$

Prouver que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 56. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que le spectre de $AA^T - A^TA$ est inclus dans $\mathbb{R}^+$, A^T étant la transposée de A.

Montrer que $AA^T = A^TA$.

Exercice 57. Soient A, B, C, D des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec D inversible et $CD = DC$.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$. Calculer $\det(M)$.
2. En déduire que $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$.

Exercice 58. 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que le déterminant d'une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{Z}$ appartient à $\mathbb{Z}$.

2. Soit $n \geq 2$ et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Montrer que $|\det(A)|$ est un entier naturel multiple de 2^{n-1}.

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ (c'est-à-dire à coefficients entiers relatifs). Déterminer une CNS pour que M soit inversible et que son inverse M^{-1} appartienne aussi à $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. *Indication : considérer* $\det(M)$.

Exercice 59. On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$, $f_0(x) = 1$ et

$$\forall x \in [0,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt.$$

0. Vérifier que chaque fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

2. En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f qu'on ne cherchera pas à déterminer.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

En déduire que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

4. Justifier que f est continue sur $[0,1]$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1 + \displaystyle\int_0^x f(t-t^2)\,dt$.

En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et que, pour tout $x \in [0,1]$, $f'(x) = f(x-x^2)$.

Exercice 60. Déterminer tous les triplets $(u,v,w) \in \mathbb{C}^3$ tels que : $u+v+w = 1$, $uvw = 1$, et $|u| = |v| = |w| = 1$.
Indication. Considérer le polynôme $(X-u)(X-v)(X-w)$.

Exercice 61. On note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ l'application identique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M) = M$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $f_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.

1. Vérifier que $f_A \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.

2. a. On suppose que la matrice A est inversible. Vérifier que l'application f_A est bijective et que $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.

2. b. *Réciproque.* On suppose que l'application f_A est bijective. Prouver que A est inversible.

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Vérifier que $f_{A-\lambda I_n} = f_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$. En déduire que :

$$\lambda \text{ est une valeur propre de } f_A \text{ si et seulement si } \lambda \text{ est une valeur propre de } A.$$

3. b. *Exemple.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_A.

4. On note θ l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^n$. Si $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on note $F_a = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) / a \circ g = \theta\}$.

4. a. Vérifier que F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et que $g \in F_a$ si et seulement si $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} a$.

4. b. On suppose que a n'est pas injectif. Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base de $\operatorname{Ker} a$, et $e_{p+1},\dots,e_n \in \mathbb{R}^n$ tel(s) que $B = (e_1,\dots,e_n)$ soit une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $g \in F_a$ si et seulement si $Mat_B(g)$ est une matrice d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on décrira et dont on déterminera la dimension.

4. c. Déduire de 4. b. que $\dim F_a = n \dim \operatorname{Ker} a$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. On sait (cf. 3. a.) que λ est une valeur propre de f_A.
Démontrer à l'aide de 4. c. que $\dim\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = \lambda M\} = n \dim\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}$.

5. b. Démontrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si f_A est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 62. Déterminer toutes les applications $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $2\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + 3\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy$ en effectuant le changement de variables : $u = x$, $v = 3x - 2y$.

Exercice 63. 1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Justifier la convergence, pour tout $x \in [0,1]$, de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

On cherche maintenant les applications $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0,1]$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$ $(*)$.

2. Montrer que les fonctions constantes sur $[0,1]$ vérifient $(*)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ vérifiant $(*)$.
Soit $x \in [0,1[$. Soient $c(x) \in [0,x]$ tel que $f(c(x)) = \displaystyle\min_{t\in[0,x]} f(t)$ et $d(x) \in [0,x]$ tel que $f(d(x)) = \displaystyle\max_{t\in[0,x]} f(t)$.

3. a. Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(c(x)^n) - f(c(x))}{2^n} = 0$. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(c(x)^n) = f(c(x))$, puis que $f(c(x)) = f(0)$.
Montrer de même que $f(d(x)) = f(0)$.

3. b. En déduire que f est constante sur $[0,1]$.

Exercice 64. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

Exercice 65. Soient $x_0,\dots,x_n$ $n+1$ réels distincts et $(y_0,\dots,y_n,y'_0,\dots,y'_n) \in \mathbb{R}^{2n+2}$.
Justifier l'existence d'un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{2n+1}[X]$ tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P(x_k) = y_k$ et $P'(x_k) = y'_k$.

Exercice 66. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right) - n$.

Indications et/ou solutions.

Exercice 54. 0. *Préliminaire.* Comme $PP' = \begin{pmatrix} aa'+cb' & ac'+cd' \\ ba'+db' & bc'+dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a : $aa'+cb' = bc'+dd' = 1$ et $ac'+cd' = ba'+db' = 0$.
D'où :

$$\begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'I_n & c'I_n \\ b'I_n & d'I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (aa'+cb')I_n & (ac'+cd')I_n \\ (ba'+db')I_n & (bc'+dd')I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}.$$

Donc $Q = \begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} a'I_n & c'I_n \\ b'I_n & d'I_n \end{pmatrix}$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, canoniquement associé à V, c'est-à-dire ayant pour matrice V dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Son polynôme caractéristique $\chi_f(X) = \chi_V(X) = \det(XI_2 - V)$ est le polynôme unitaire de degré 2 :

$$(X-4)(X+1)+6 = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$$

dont les deux racines simples 1 et 2 sont les valeurs propres de f (de V). Comme f admet deux valeurs propres (simples), les deux sous-espace propres de f sont de dimension 1 et f est diagonalisable car

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2 = \dim E_1(f) + \dim E_2(f)$$

ou matriciellement de manière équivalente car $\underline{\dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})} = 2 = \dim E_1(V) + \dim E_2(V)$. On obtient après calculs :

$E_1(f) = \mathrm{Ker}(f - Id_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}((2,-3))$ (ou $E_1(V) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix})$ et $E_2(f) = \mathrm{Ker}(f - 2Id_{\mathbb{R}^2}) = \mathrm{Vect}((1,-1))$ (ou $E_2(V) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$).

Posons $\varepsilon_1 = (2,-3)$ et $\varepsilon_2 = (1,-1)$. D'après ce qui précède, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ formée de deux vecteurs propres de f dans laquelle la matrice de f est la matrice diagonale : $D = \mathrm{diag}(1,2)$ car $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_1$ et $f(\varepsilon_2) = 2\varepsilon_2$. Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ à la base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. On sait alors que P est inversible et que : $D = P^{-1}VP$.

2. Vérifions que l'égalité : $P^{-1}VP = D$ conduit à l'égalité : $Q^{-1}BQ = C$. En effet, $Q = \begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix}$ est inversible d'après **0**, d'inverse $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}$, $Q^{-1}B = \begin{pmatrix} -I_n & -I_n \\ 3I_n & 2I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix}$, et finalement

$$Q^{-1}BQ = \begin{pmatrix} -A & -A \\ 6A & 4A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2I_n & I_n \\ -3I_n & -I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix} = C.$$

3. a. et 3. b. On a : $\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}A & O_n \\ O_n & 2R^{-1}A \end{pmatrix}$ puis :

$$\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}A & O_n \\ O_n & 2R^{-1}A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1}AR & O_n \\ O_n & 2R^{-1}AR \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta & O_n \\ O_n & 2\Delta \end{pmatrix} = \mathcal{D} \in D_{2n}(\mathbb{R})\ (*)$$

Or $\begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix}$, car $\begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & O_n \\ O_n & I_n \end{pmatrix} = I_{2n}$, donc la matrice C est semblable à la matrice diagonale $\mathcal{D}$ par $(*)$, et comme B est semblable à C (cf. **2.**), B est aussi semblable à la matrice diagonale $\mathcal{D}$ et est donc diagonalisable.

Exercice 61. 1. Soient $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. D'après les propriétés du calcul matriciel (distributivité de la multiplication par rapport à l'addition), on a :

$$f_A(aM+bN) = A(aM+bN) = aAM + bAN = af_A(M) + bf_A(N).$$

Donc f_A est linéaire.

2. a. Supposons A inversible. Soit $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'équation : $f_A(U) = V$, d'inconnue $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, admet une seule solution $U = A^{-1}V$, car $AU = V \Leftrightarrow A^{-1}AU = A^{-1}V \Leftrightarrow U = A^{-1}V$. Donc f_A est bijective et comme f_A^{-1} est, par définition, l'application qui associe à chaque matrice V son unique antécédent par f_A, c'est-à-dire la matrice $A^{-1}V$, on a bien $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$.

2. b. Supposons f_A bijective. La matrice I_n est alors l'image d'une (unique) matrice B par f_A. On a donc : $f_A(B) = AB = I_n$. La matrice A est donc inversible (d'inverse B).

Remarque : on a donc montré le résultat suivant : f_A bijective $\Leftrightarrow$ A inversible.

3. a. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a effectivement $f_{A-\lambda I_n} = f_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$ car

$$\underline{\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})},\ f_{A-\lambda I_n}(M) = (A - \lambda I_n)M = AM - \lambda M = f_A(M) - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}(M) = (f_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})})(M).$$

Et, d'après la remarque précédente, on a :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est une valeur propre de } f_A \quad &\Leftrightarrow \quad f_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ n'est pas injectif} \\ &\Leftrightarrow \quad f_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})} \text{ n'est pas bijectif (car } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension finie)} \\ &\Leftrightarrow \quad f_{A-\lambda I_n} \text{ n'est pas bijectif} \\ &\Leftrightarrow \quad A - \lambda I_n \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \text{ est une valeur propre de } A. \end{aligned}$$

3. b. On vérifie sans difficultés (par exemple en calculant le polynôme caractéristique de A) que -1 et 3 sont les deux valeurs propres de A, donc de f_A d'après **3. a.** Déterminons maintenant les deux sous-espaces propres $E_{-1}(f_A)$ et $E_3(f_A)$ de f_A (qui sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$!).

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$M \in E_{-1}(f_A) \Leftrightarrow AM = -M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+2b & c+2d \\ 2a+b & 2c+d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = -a \text{ et } d = -c.$$

Donc $M \in E_{-1}(f_A) \Leftrightarrow M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ainsi $E_{-1}(f_A) = \mathrm{Vect}((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix})$ (plan vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$). De même $E_3(f_A) = \mathrm{Vect}((\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$.

Remarque : il ne faut pas confondre f_A, endomorphisme de $\underline{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$, avec l'endomorphisme de $\underline{\mathbb{R}^n}$ canoniquement associé à A.

4. a. Notons $0_{\mathbb{R}^n} = (0, \ldots, 0)$ le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$. F_a est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(R^n)$. En effet :

i) F_a est non vide car $\theta \in F_a$: $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $a \circ \theta(x) = a(\theta(x)) = a(0_{\mathbb{R}^n}) = 0_{\mathbb{R}^n}$ car $a \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Donc $a \circ \theta = \theta$.

ii) F_a est stable par combinaison linéaire d'après les propriétés de $+$ et $\circ$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$:

$$\forall (g,h) \in F_a^2,\ \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ a \circ (\alpha g + \beta h) = \alpha\, a \circ g + \beta\, a \circ h = \alpha\theta + \beta\theta = \theta.$$

Pour prouver enfin l'équivalence demandée il est souvent plus convaincant de prouver les deux implications :

Supposons $g \in F_a$. Soit $v \in \operatorname{Im} g$. Il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que $v = g(u)$ et $a(v) = a(g(u)) = a \circ g(u) = \theta(u) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $v \in \operatorname{Ker} a$. Ainsi $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} a$. Réciproquement, supposons $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} a$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ (quelconque). Comme $g(x) \in \operatorname{Im} g$, $g(x) \in \operatorname{Ker} a$, et donc $a \circ g\,(x) = a(g(x)) = 0_{\mathbb{R}^n}$. Donc $a \circ g = \theta$, autrement dit $g \in F_a$.

4. b. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Comme tout vecteur de $\operatorname{Im} g$ est une combinaison linéaire des vecteurs $g(e_1), \ldots, g(e_n)$, on vérifie facilement avec **4. a.** que $g \in F_a$ si et seulement si les vecteurs $g(e_1), \ldots, g(e_n)$ sont des vecteurs de $\operatorname{Ker} a$, donc ssi $g(e_1), \ldots, g(e_n)$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $e_1, \ldots, e_p$. Par conséquent, $g \in F_a$ ssi $G = Mat_B(g)$ est du type $\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \ldots & a_{pn} \\ 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Notons $\mathcal{F}_a$ l'ensemble de ces matrices (qui est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Comme la matrice G précédente est la matrice $\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$, la famille $(E_{11}, \ldots, E_{pn})$ est par définition une famille génératrice de $\mathcal{F}_a$. Et comme cette famille, formée de vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, est libre, $(E_{11}, \ldots, E_{pn})$ est une base de $\mathcal{F}_a$. D'où $\dim \mathcal{F}_a = pn$.

4. c. L'application MAT_B associant à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sa matrice dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de **4. b.** est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et l'application MAT_B^{-1} est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
Comme un isomorphisme transforme un sev en un sev *de même dimension*, on en déduit que

$$\dim F_a = \dim MAT_B^{-1}(\mathcal{F}_a) = \dim \mathcal{F}_a = np = n \dim \operatorname{Ker} a.$$

5. a. Soient Id l'application identique de $\mathbb{R}^n$ et a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M. On a alors :

$$AM = \lambda M \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)M = 0 \Leftrightarrow (a - \lambda Id) \circ m = \theta \Leftrightarrow m \in F_{a - \lambda Id}.$$

Comme l'application, associant à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$, est un isomorphisme de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et qu'un isomorphisme transforme un sev en un sev *de même dimension*, on obtient d'abord :

$$\dim F_{a-\lambda Id} = \dim\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = \lambda M\}$$

Or, par **4. c**, $\dim F_{a-\lambda Id} = n \dim \operatorname{Ker}(a - \lambda Id)$ et aussi $\dim \operatorname{Ker}(a - \lambda Id) = \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n)$ puisque le sous-espace propre de a associé à λ est évidemment de même dimension que le sous-espace propre de A associé à λ, ce dernier étant l'image du précédent par l'isomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ transformant le n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ en la colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. D'où

$$\dim\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / AM = \lambda M\} = n \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n).$$

5. b. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les valeurs propres réelles de A, donc de f_A. D'après **5. a.** on a :

$$\begin{aligned} \text{A est diagonalisable dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad &\Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n) + \cdots + \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_p I_n) = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = n \\ &\Leftrightarrow \quad n \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_1 I_n) + \cdots + n \dim \operatorname{Ker}(A - \lambda_p I_n) = n^2 \\ &\Leftrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker}(f_A - \lambda_1 Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) + \cdots + \dim \operatorname{Ker}(f_A - \lambda_p Id_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ &\Leftrightarrow \quad f_A \text{ est un endomorphisme diagonalisable de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}). \end{aligned}$$