Mécanique des fluides

MF1

Description d'un fluide en mouvement

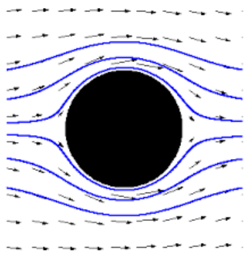
Sommaire

Questions de cours

- Définir une particule de fluide et présenter son intérêt dans le cadre de la modélisation des milieux continus.
- Présenter l'approche eulérienne. Définir les notions de ligne de courant et tube de courant.
- Etablir l'expression de la dérivée particulaire dans le cas du champ de masse volumique. Énoncer et interpréter les termes de l'expression de l'accélération d'une particule de fluide.
- Débit massique : définition du vecteur densité de courant de masse.
- Etablir l'équation locale de conservation de la masse dans le cas d'une géométrie 1D cartésienne. Citer la généralisation à 3D et présenter quelques analogies du transport de masse avec les autres types de transport.
- Ecoulement incompressible : définition, conséquence sur le champ de vitesse et le débit volumique.
- Ecoulement irrotationnel : définition, potentiel des vitesses, cas d'un écoulement irrotationnel incompressible.

★ *Prise de notes* : La mécanique des fluides est le domaine de la physique s'intéressant à la description de l'écoulement des fluides (c'est-à-dire principalement des gaz et des liquides). Pour décrire cet écoulement, on donne alors les vecteurs vitesses $\vec{v}(\vec{r},t)$, la masse volumique $\rho(\vec{r},t)$ ou encore la pression $P(\vec{r},t)$ à l'intérieur de l'écoulement. En guise d'exemple, la carte des vecteurs vitesse d'un écoulement à faible vitesse autour d'une sphère est représentée. Dans ce chapitre, on ne s'intéressera qu'à la description de la vitesse $\vec{v}$ et de la masse volumique ρ.
Faire le lien avec des écoulements autour d'obstacles usuels : fleuve contournant une île, écoulement autour d'une aile d'avion, voiture... Questions : de quelle vitesse parle-t-on ? comment évolue-t-elle dans un écoulement ? À nouveau, à l'échelle microscopique, du fait de l'agitation thermique, les molécules du fluide subissent un mouvement désordonné, similaire à celui des porteurs de charges électriques (chapitre EM1) ou des particules (T1) : la modélisation que nous allons en faire sera donc similaire.

Exemple : Carte des vecteurs vitesse d'un écoulement à faible vitesse autour d'une sphère :



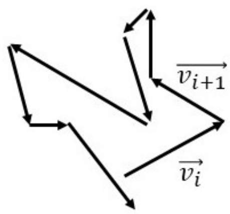
Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Présenter l'intérêt et l'expression de la dérivée particulaire, qui nous permettra d'appliquer le principe fondamental de la dynamique aux particules de fluide.
2. Exploiter les cas de conservation du débit massique et du débit volumique dans l'écoulement.
3. Identifier les fortes analogies du transport de particules de fluide avec le transport de particules (chapitre T1), la diffusion thermique (T2) et le transport de charges électriques (EM1).

I Passer d'une description microscopique de la vitesse à une description macroscopique

I.1 Vitesse microscopique

À l'échelle microscopique, une molécule subit, du fait de l'agitation thermique, des collisions avec les autres molécules du fluide. Après chaque collision, le vecteur vitesse possède une direction, un sens et une norme qui ont été modifiés.

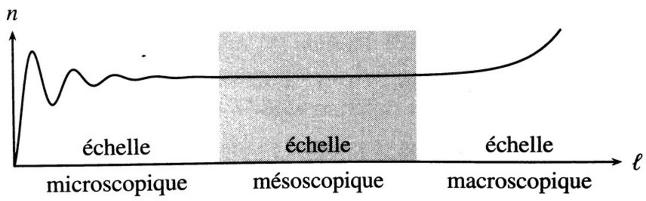


L'ordre de grandeur de la vitesse microscopique d'une molécule du fluide est la vitesse quadratique moyenne $u^* = \left\langle \sqrt{\vec{v}^2} \right\rangle$.

> **Ordre de grandeur :** Pour l'air macroscopiquement au repos, dans les conditions normales de température et de pression (CNTP), on a : $u^* \sim 500\,\mathrm{m/s}$

I.2 Trois échelles de description de la matière

La modélisation effectuée dans ce chapitre repose sur les mêmes hypothèses d'existence d'une échelle mésoscopique que pour les chapitres de transport de particules (T1), de diffusion thermique (T2) ou de transport de charges (EM1) : on fait une modélisation des milieux continus.



★
- Échelle microscopique : moyenner les grandeurs microscopiques n'a ici pas d'intérêt à cause des fluctuations spatiales et temporelles importantes.
- Échelle macroscopique : moyenner n'a pas d'intérêt vu qu'on veut décrire les variations spatiales de la vitesse

Taille caractéristique de l'échelle mésoscopique

L'échelle mésoscopique est une échelle de taille caractéristique ℓ intermédiaire entre l'échelle microscopique (d : distance inter-particulaire et $l.p.m.$: libre parcours moyen = distance moyenne parcourue entre deux collisions) et l'échelle macroscopique (L : taille d'observation) :

$$d,\, l.p.m \ll \ell \ll L$$

En guise d'ordre de grandeur pour l'air ou l'eau, on a dans les conditions normales et à température ambiante :

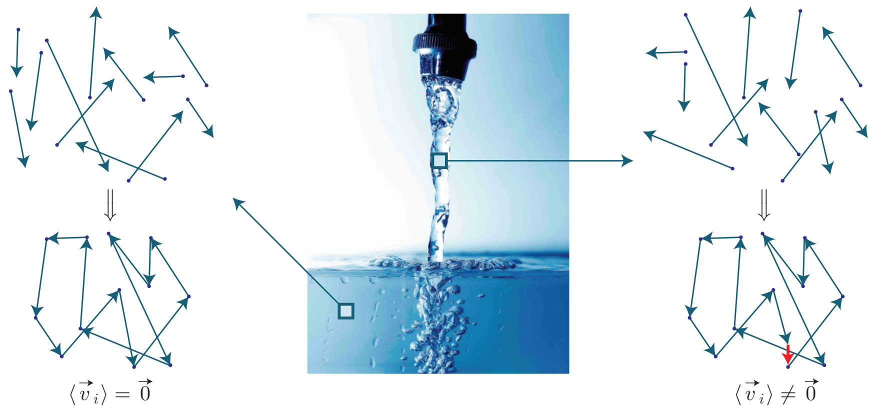
Fluide environnant	d	$l.p.m.$
Eau	1×10^{-10} m	0.1 nm=1×10^{-10} m
Air	1×10^{-9} m	0.1 µm=1×10^{-7} m

★ Donc, dans l'eau, on prend $\ell \sim 10\,\text{nm} \ll L$: RAS ; dans l'air, $\ell \sim 10\,\mu\text{m}$: pas si petit que ça !

En mécanique des fluides, on travaille donc sur un système de taille mésoscopique :

Particule de fluide

★ Une particule de fluide est un système fermé de N molécules du fluide et qui a pour taille caractéristique l'échelle mésoscopique ℓ.



La vitesse associée à la particule de fluide est la vitesse mésoscopique : il s'agît de la vitesse moyenne des N molécules contenues dans la particule de fluide. Cette vitesse mésoscopique de la particule de fluide est bien plus faible que la vitesse microscopique des molécules.

I.3 Deux approches pour la description de la vitesse dans un écoulement

a Champ lagrangien des vitesses - Approche de la mécanique classique

L'approche la plus naturelle pour décrire un écoulement de fluide est de découper le fluide en particules de fluide à $t = 0$, puis de suivre chacune des particules de fluide au cours de son mouvement : c'est l'approche classique de mécanique, on parle d'approche *lagrangienne*.

Dans cette approche, la position du centre P d'une particule de fluide et sa vitesse sont exprimées explicitement en fonction du temps :

$$\overrightarrow{OP}(t) = x_P(t)\overrightarrow{e_x} + y_P(t)\overrightarrow{e_y} + z_P(t)\overrightarrow{e_z} \quad \text{et} \quad \vec{v}_P(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OP}}{\mathrm{d}t}$$

Remarque : Les particules de fluide peuvent se déformer au cours du mouvement.

★ Schéma pour la déformation.

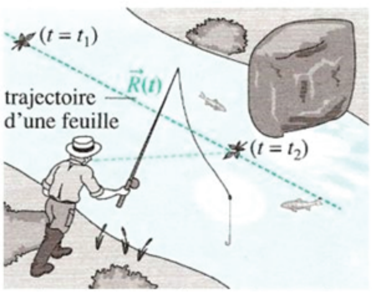
<u>**Concept naturel associé : Trajectoire d'une particule de fluide**</u> L'ensemble des points M atteints par la particule fluide P au cours du temps constitue la trajectoire de la particule fluide. C'est la description naturelle dans l'approche lagrangienne.
En pratique, on utilise des traceurs (gouttes de colorants, fumées, petites particules de densité proche de celle du fluide), et on filme ou photographie avec un *long temps de pose*.

Vidéo d'expérience en tunnel à vent : https://www.youtube.com/watch?v=wWNjRYOHZts.

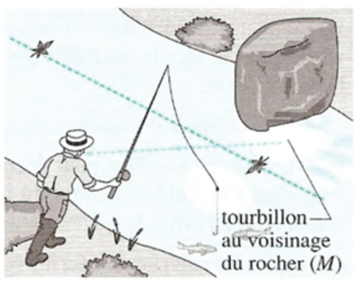
Défauts de l'approche lagrangienne Du point de vue expérimental, il est complexe de suivre et de mesurer explicitement différentes grandeurs physiques sur une particule de fluide qui se déplace. De plus, il est compliqué de traduire des conditions sur le champ de vitesse $\vec{v}$ imposées par la présence d'un obstacle fixe dans un écoulement, vu que la particule de fluide au niveau de cet obstacle change à chaque instant.

b Champ eulérien des vitesses - Approche de la mécanique des fluides

★ En mécanique des fluides, on utilise une approche *eulérienne*, consistant à caractériser *à tout instant ET en un point fixe M de l'espace* l'évolution des champs en ce point. En un point M, à l'instant t, le champ eulérien des vitesses est alors la vitesse de la particule de fluide de centre P passant en M à t. À un instant t' ultérieur, la vitesse est celle d'une autre particule de fluide P' passant en M à t'.



Description lagrangienne



Description eulérienne

Cette approche *locale* est celle que l'on a déjà utilisé en thermodynamique et en électromagnétisme. On définit alors différents champs comme le champ des vitesses $\vec{v}(M,t) = \vec{v}(x,y,z,t)$ pour lequel x, y et z sont les coordonnées du point M fixe de l'espace, indépendantes du temps.

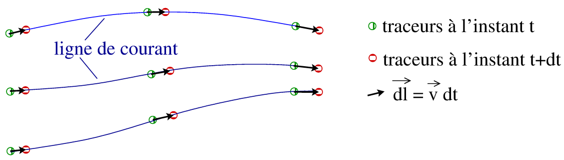
Concepts naturels associés : Ligne de courant et tube de courant

Ligne de courant

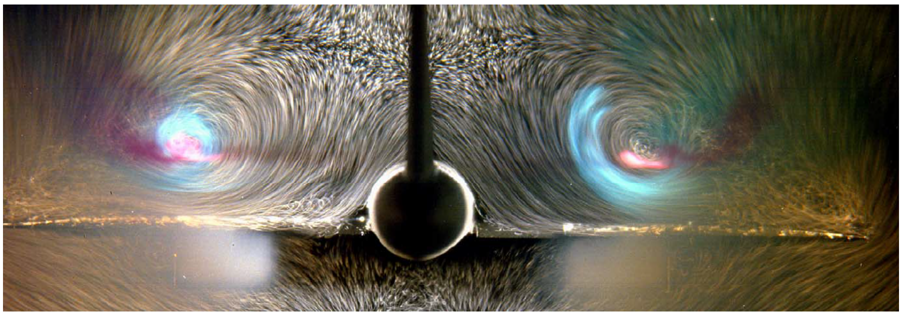
Une ligne de courant d'un écoulement à un instant t donné est une ligne de champ du champ eulérien des vitesses, c'est-à-dire

★ une courbe qui, à un instant t donné, est tangente en tous ses points au champ des vitesses.

En pratique, on visualise ces lignes de courant en dispersant des traceurs dans tout le fluide, puis en photographiant avec un temps de pose court dt.



Visualisation des lignes de courant autour d'un avion (le Concorde) :



Tube de courant

Un tube de courant à un instant donné t est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient, à cet instant t, sur un contour fermé.

Pour déterminer l'équation des lignes de courant, on exprime la tangence entre $\overrightarrow{d\ell}$ et $\vec{v}$:

$$\overrightarrow{d\ell} \wedge \vec{v}$$

Exemple : On considère le champ de vitesse défini, en coordonnées cartésiennes, par :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v_0 \\ v_y = \alpha t \\ v_z = 0 \end{pmatrix}$$

avec v_0 et α des constantes positives.

★ Faire trois cartes avec les ldc à $t = 0$, $t_1 > 0$ et $t_2 > t_1$ + 1 carte avec la trajectoire d'une PF.

En régime stationnaire, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires des particules de fluide.

Défaut de l'approche eulérienne Dans la suite des chapitres de mécanique des fluides, nous appliquerons le principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire. Il nous faudra donc exprimer l'accélération d'une particule de fluide. Avec le champ eulérien des vitesses, la vitesse (lagrangienne) de la particule passant en M à t sera $\vec{v}(M,t)$; mais, pour cette même particule, sa vitesse (lagrangienne) à $t+\mathrm{d}t$ ne sera pas $\vec{v}(M,t+\mathrm{d}t)$, car la particule s'est déplacée. L'expression de l'accélération de la particule de fluide n'est donc pas simple a priori...

c Comment écrire la dérivée particulaire d'un champ dans l'approche eulérienne ?

Quittons un instant la mécanique des fluides pour étudier l'évolution de la température ressentie au cours du temps lors d'un vol en montgolfière. La montgolfière s'approche d'un lac au-dessus duquel la température de l'air est plus froide et varie avec le temps.

⚠ Ici, il y a deux champs de température différents !
- Température ressentie par un passager dans la montgolfière : champ lagrangien. Cette température ne dépend que du temps : $T^L(t)$
- Température mesurée de l'air à différents endroits et au cours du temps : champ eulérien. Cette température dépend à la fois de l'espace et du temps : $T^E(x,y,z,t)$

Écrivons la différentielle de la température ressentie T^L au cours du mouvement de la montgolfière dans le champ eulérien :

★
$$\mathrm{d}T^L = \mathrm{d}T^E = \frac{\partial T^E}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial T^E}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial T^E}{\partial z}\mathrm{d}z + \frac{\partial T^E}{\partial t}\mathrm{d}t$$

Donc, la dérivée temporelle de la température ressentie donne :

$$\frac{\mathrm{d}T^L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T^E}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T^E}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T^E}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial T^E}{\partial t} = v_x\frac{\partial T^E}{\partial x} + v_y\frac{\partial T^E}{\partial y} + v_z\frac{\partial T^E}{\partial z} + \frac{\partial T^E}{\partial t}$$

On ré-écrit ceci sous forme compacte :

$$\frac{\mathrm{d}T^L}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T^E}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})T^E$$

Afin de simplifier les notations, on ne précisera désormais plus les exposants L et E. Pour ne pas confondre néanmoins les deux notions, les notations des dérivées temporelles des champs lagrangiens et eulériens sont différentes :

- $\dfrac{\mathrm{d}...}{\mathrm{d}t}$: dérivée temporelle pour un champ lagrangien. Elle donne l'évolution temporelle d'une grandeur, du point de vue de la particule de fluide. On appelle cette dérivée la **dérivée particulaire**, et elle est aussi parfois notée $\frac{D...}{Dt}$.
- $\dfrac{\partial...}{\partial t}$: dérivée temporelle pour un champ eulérien. Elle donne l'évolution temporelle locale d'une grandeur, du point de vue d'un observateur extérieur ne se déplaçant pas dans le référentiel du laboratoire.

Exercice : On cherche la température ressentie par un homme faisant de la montgolfière au cours de son vol $T(t)$. Pour cela, on sait que, dans la troposphère, la température décroît linéairement avec l'altitude. De plus, la montgolfière s'approche d'un lac où la température est plus basse : $T(x,z) = T_0 + \alpha x + \beta z$ avec $\alpha = -50\,°\mathrm{C/km}$ et $\beta = -6.5\,°\mathrm{C/km}$. On donne également la vitesse de la montgolfière : $\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_z\vec{e_z}$ avec $v_x = 10\,\mathrm{km/h}$ (vitesse du vent) et $v_z = 2\,\mathrm{km/h}$. On suppose enfin qu'à $t=0$, la montgolfière est en $(x=0,z=0)$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= \underbrace{\frac{\partial T}{\partial t}}_{=0} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})T \\ &= \alpha v_x + \beta v_z\end{aligned}$$

★ On intègre sur t :

$$\int_0^t \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t')\mathrm{d}t' = T(t) - T(0) = (\alpha v_x + \beta v_z)t$$

Donc :

$$T(t) = T_0 + (\alpha v_x + \beta v_z)t$$

Cohérent : du fait du mouvement selon $\vec{e_x}$, la température décroit d'autant plus vite que α est grand et que la montgolfière va vite vers $\vec{e_x}$ (le v_x).

On peut généraliser la dérivée particulaire au cas d'un champ vectoriel $\vec{A}$: $\frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}$
On en déduit la différentielle d'un champ vectoriel :

Différentielle d'un champ vectoriel

$$\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\mathrm{d}t + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}\mathrm{d}t$$

Dans le cas particulier du champ de vitesse de mécanique des fluides, cela donne :

Dérivée particulaire du champ de vitesse

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$$

★ avec

- accélération de la particule de fluide qui passe en M à t : appproche lagrangienne
- terme local de l'accélération, lié à la variation temporelle de la vitesse mesurée en un point : approche eulérienne
- terme convectif de l'accélération, lié au fait que la particule de fluide se déplace dans le fluide : approche eulérienne

⚠ Il est donc, en général, faux d'écrire :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

Expression équivalente de la dérivée particulaire du champ de vitesse :

Le formulaire d'analyse vectorielle donne la formule suivante (elle sera redonnée si besoin) :

$$(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{||\vec{v}||^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}$$

On peut donc reformuler la dérivée particulaire du champ de vitesse en :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{||\vec{v}||^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}$$

II Bilan de conservation de la masse

II.1 Distribution volumique de masse

On peut définir une densité volumique de masse ou *masse volumique*, notée ρ, en considérant la masse δm des particules contenues dans le volume mésoscopique de la particule de fluide située au point M à l'instant t :

$$\rho(M,t) = \frac{\delta m(M,t)}{\mathrm{d}\tau} \tag{II.1}$$

L'unité est le $\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

> **Valeurs à connaître, dans les conditions normales de température et de pression (CNTP) :**
>
> - Masse volumique de l'eau liquide : $\rho(\text{eau}) = 1.0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
> - Masse volumique de l'air sec : $\rho(\text{air}) = 1.2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$

De plus, comme on peut appliquer la formule de la dérivée particulaire pour n'importe quel champ porté par le fluide :

Dérivée particulaire de la masse volumique

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}})\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho)$$

avec :

- la variation de la masse volumique de la particule de fluide au cours de son mouvement : approche lagrangienne
- terme local de la variation de la masse volumique, lié à la variation de masse volumique mesurée en un point : approche eulérienne
- terme convectif de la variation de la masse volumique, lié au fait que la particule de fluide se déplace dans le fluide : approche eulérienne

II.2 Débit massique

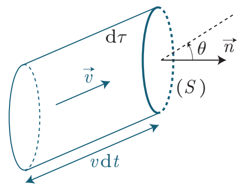
On définit le débit massique à travers une surface (S) orientée comme le rapport entre la masse algébrique δm traversant (S) pendant $\mathrm{d}t$ et le temps $\mathrm{d}t$:

$$D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t} \tag{II.2}$$

s'exprimant en $\mathrm{kg\,s^{-1}}$.

> **Exercice :** Montrer que l'on peut écrire le débit massique à travers une surface (S) orientée comme le flux d'un vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{j_m}$, que l'on définira.

Prenons le cas général de particules se déplaçant à la vitesse moyenne $\overrightarrow{v}$ et traversant une surface élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}S\overrightarrow{n}$. On note δm la masse des particules traversant $\mathrm{d}S$ pendant $\mathrm{d}t$.



$$\mathrm{d}\tau = h\mathrm{d}S = \mathrm{d}Sv\mathrm{d}t\ \cos\theta = \mathrm{d}\overrightarrow{S}\cdot\overrightarrow{v}\mathrm{d}t$$

$$\text{donc} \quad \delta m = \rho\mathrm{d}\tau = \rho\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}\mathrm{d}t$$

Donc, le débit massique à travers $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ pendant $\mathrm{d}t$ est :

★

$$\delta D_m = \frac{\delta m}{\mathrm{d}t} = \rho\overrightarrow{v}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

avec $\overrightarrow{j_m} = \rho\overrightarrow{v}$ le *vecteur densité de courant de masse*. Pour obtenir le flux total à travers une surface quelconque, on découpe en surfaces élémentaires (on trouve δD_m), puis on somme :

$$D_m = \iint_{(S)} \delta D_m = \iint_{(S)} \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

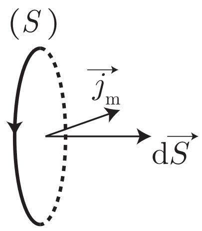
D_m est donc le flux de $\overrightarrow{j_m} = \rho\overrightarrow{v}$.

Expression du débit massique comme un flux

Le débit massique à travers la surface (S) orientée peut s'écrire comme le flux d'un vecteur densité de courant de masse $\overrightarrow{j_m}$:

$$D_m = \iint_{(S)} \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} \qquad \text{(II.3)}$$

avec $\overrightarrow{j_m} = \rho\overrightarrow{v}$, dont la norme s'exprime en $\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$



Remarque : On retrouve à nouveau la relation générale entre le débit à travers une surface orientée d'une grandeur transportée X et un vecteur densité de courant de X :

$$\frac{\delta X}{\mathrm{d}t} = \iint_{(S)} \overrightarrow{j_X}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S} \qquad \text{avec} \quad \overrightarrow{j_X} = \rho_X\overrightarrow{v}$$

avec ρ_X la densité volumique de X.

II.3 Équation locale de conservation de la masse

On considère un écoulement sans réaction chimique ou nucléaire. Ainsi, dans un volume fixe dans le référentiel du laboratoire (que l'on appelle volume de contrôle), la variation temporelle de la masse est forcément liée à des échanges spatiaux de masse avec l'extérieur du volume (pas de terme source). Ce principe de conservation de la masse conduit, par analogie avec les autres phénomènes de transport, à une équation locale :

Équation locale de conservation de la masse

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\overrightarrow{j_m}) = 0$$

★ Interprétation des termes :

- lié à la variation temporelle de la masse dans le volume de contrôle
- lié aux échanges spatiaux de masse avec l'extérieur

Exercice : Démontrer l'équation locale de conservation de la masse dans le cas d'un problème unidimensionnel cartésien.

Schéma. $\vec{j}_m = j_m(x,t)\vec{e_x}$. On réalise un bilan de masse entre t et $t+\mathrm{d}t$ sur le volume compris entre x et $x+\mathrm{d}x$.

Variation temporelle :

$$\mathrm{d}^2m = m(t+\mathrm{d}t) - m(t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}t$$

★ **Echanges spatiaux :**

$$\delta^2 m = m_{\text{entrant}}(x) - m_{\text{sortant}}(x+\mathrm{d}x) = D_m(x)\mathrm{d}t - D_m(x+\mathrm{d}x)\mathrm{d}t = -\frac{\partial j_m}{\partial x}\mathrm{d}xS\mathrm{d}t$$

Bilan :

$$\mathrm{d}^2m = \delta^2 m \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_m}{\partial x} = 0$$

II.4 Conséquences dans un écoulement stationnaire

a Définition d'un écoulement stationnaire

Écoulement stationnaire

★ Un écoulement est stationnaire si les différents champs eulériens sont indépendants du temps : $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$, $\dfrac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, etc.

Etant donné que la définition d'un écoulement stationnaire s'appuie sur l'approche eulérienne, qui consiste à étudier des champs en un point M fixe (sous-entendu, fixe dans un certain référentiel d'étude), le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel choisi.

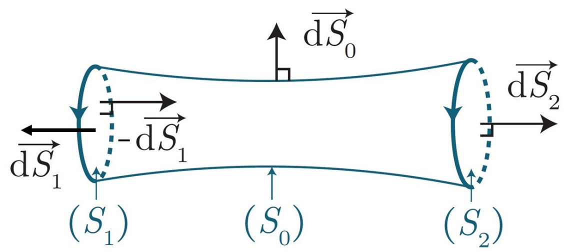
b Conservation du débit massique le long d'un tube de courant

En régime stationnaire, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{j_m}) = 0$$

c'est-à-dire que $\overrightarrow{j_m}$ est à flux conservatif.

Pour comprendre (à nouveau !) cette notion, considérons un tube de courant fermé $(S) = (S_0) \cup (S_1) \cup (S_2)$ délimitant un volume (V).



En régime stationnaire, le théorème de Green-Ostrogradski donne :

$$\iiint_{(V)} \mathrm{div}(\vec{j}_m)\mathrm{d}\tau = \oiint_{(S)} \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = 0 = \iint_{(S_1)} \overrightarrow{j_m}\cdot\left(\mathrm{d}\vec{S}_1\right) + \iint_{(S_0)} \underbrace{\overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_0}_{=0} + \iint_{(S_2)} \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_2$$

donc le flux de $\overrightarrow{j_m}$ est conservé le long du tube :

$$\iint_{(S_1)} \overrightarrow{j_m}\cdot(-\mathrm{d}\vec{S}_1) = \iint_{(S_2)} \overrightarrow{j_m}\cdot\mathrm{d}\vec{S}_2 \iff D_{m,\text{entrant}} = D_{m,\text{sortant}}$$

Le débit massique est conservé le long d'un tube de courant.

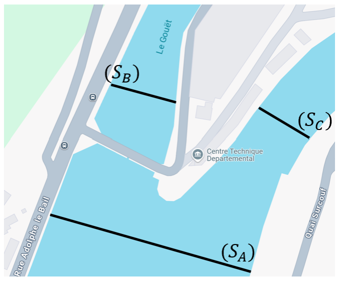
Exercice : En utilisant la conservation du débit massique, exprimer une relation reliant les débits massiques de la Loire traversant les surfaces (S_A), (S_B) et (S_C).

⚠ De même qu'on ne travaille JAMAIS avec un courant non orienté en électrocinétique, il faut commencer par orienter les surfaces (S_A), (S_B) et (S_C) !

★ L'écoulement de la Loire est stationnaire (vitesse mesurée en un point du fleuve indépendante du temps). Avec des surfaces orientées dans le sens amont vers aval (par exemple), on obtient :

$$D_{m,entrant} = D_{m,A} = D_{m,sortant} = D_{m,B} + D_{m_C}$$

(en découpant la surface de sortie en deux surfaces (S_B) et (S_C)).
La loi obtenue est similaire à la loi des nœuds en électronique.



III Analogies et différences avec les autres phénomènes de transport

.	Diffusion de particules	Diffusion thermique	Conduction électrique
Débit de ...	particules $\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	énergie $P_{th} = \iint_{(S)} \vec{j}_q \cdot \mathrm{d}\vec{S}$	charges $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_N = 0$	$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \mathrm{div}(\vec{j}_Q) = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j} = 0$
Cause du transport : gradient de ...	densité particulaire n	température T	potentiel électrique V
Loi phénoménologique locale	$\vec{j}_N = -D\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, n$	$\vec{j}_Q = -\lambda\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}(T)$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma\, \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, V$

.	Fluide en écoulement
Débit de ...	masse $D_m = \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot \mathrm{d}\vec{S}$
Équation de conservation locale	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\, \vec{j}_m = 0$
Cause du transport :	Force normale de pression ou force tangentielle de viscosité (cf. MF2)

Pour pouvoir décrire le champ des vitesses dans le fluide, on procédera, cette fois, par application du principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire.

IV Évolution du débit volumique

IV.1 Débit volumique

On introduit également le débit volumique à travers une surface (S) orientée comme le rapport du volume algébrique δV traversant (S) pendant dt et le temps dt :

$$D_v = \frac{\delta V}{\mathrm{d}t}$$

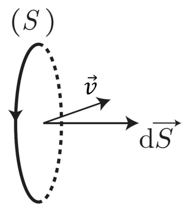
s'exprimant en $\mathrm{m}^3\,\mathrm{s}^{-1}$.

Avec un raisonnement similaire à celui conduit en partie II.2, on obtient :

Expression du débit volumique comme un flux

Le débit volumique à travers la surface (S) orientée peut s'écrire comme le flux du vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \qquad \text{(IV.1)}$$



★ Si la masse volumique ρ est uniforme (on dit alors que l'écoulement est homogène), il existe un lien simple entre D_m et D_v :

$$D_m = \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \rho D_v$$

IV.2 Fluide incompressible et homogène

Définition : Un fluide est incompressible et homogène si et seulement si sa masse volumique ρ est une constante dans le temps et l'espace :

$$\rho(M,t) = \text{constante}$$

D'après l'équation de conservation de la masse, il vient donc :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \\ \Rightarrow &\rho\, \mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \\ \Rightarrow &\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Un fluide incompressible et homogène possède un champ de vitesse $\vec{v}$ à flux conservatif.

Validité de ce modèle Ce modèle de fluide incompressible et homogène est relativement adapté pour décrire les écoulements de phases liquides, qui sont assez bien décrites par des phases condensées incompressibles et indilatable. Mais il présente deux défauts majeurs :

- il ne permet pas de donner une description satisfaisante des phases gazeuses.
- il ne permet pas de décrire la propagation d'une onde sonore, vu qu'on suppose que le fluide ne peut pas être comprimée.

Pour résoudre ces problèmes, on fait un second modèle moins restrictif.

IV.3 Écoulement incompressible

Définition d'un écoulement incompressible

★ Un fluide est dit en écoulement incompressible si les particules de fluide conservent leur masse volumique au cours de leur mouvement.
Comme une particule de fluide est un système fermé constitué de δN molécules, sa masse est constante. Donc, dans un écoulement incompressible, le volume des particules de fluide se conserve, même si leur forme change.

Remarque : Cette définition revient à dire que le champ lagrangien de masse volumique est constant pour chaque particule de fluide.

Mathématiquement, on exprime donc un écoulement incompressible par la propriété :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$$

Réécrivons l'équation locale de conservation de la masse, grâce à la formule d'analyse vectorielle (à ne pas connaître) : $\mathrm{div}(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}(\vec{A}) + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f)$:

★

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\vec{v}) = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v}) + \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\rho) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\rho\right) + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v})$$

$$= \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho\,\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

Ainsi, pour un écoulement homogène et incompressible, on a :

$$\mathrm{div}(\vec{v}) = 0$$

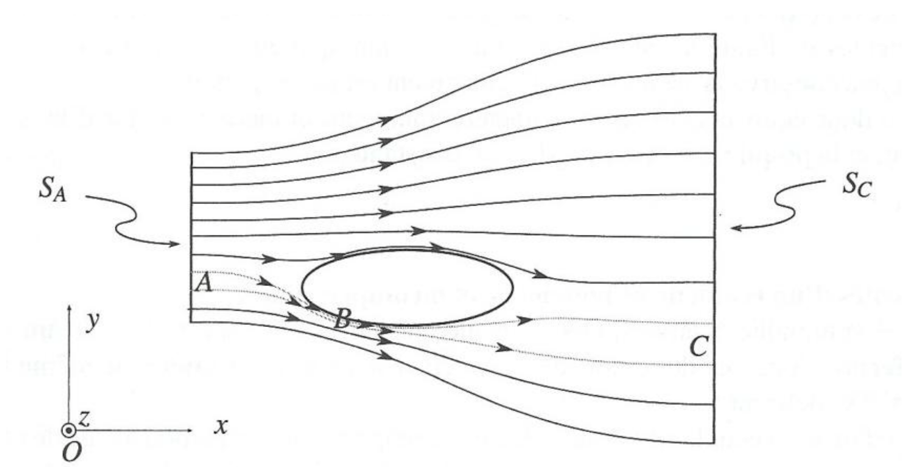
c'est-à-dire que $\vec{v}$ est à flux conservatif.

Validité de ce modèle Ce modèle est bien moins restrictif. Un fluide compressible (comme un gaz) peut être en écoulement incompressible, à la condition que la structure du champ de vitesse fasse en sorte que le volume des particules de fluide ne varie pas. Ce modèle sera souvent valable pour des écoulements à des vitesses bien inférieures à la célérité du son dans le fluide considéré.

IV.4 Conséquences d'un écoulement incompressible

Pour un écoulement incompressible, $\vec{v}$ est donc à flux conservatif. Le débit volumique se conserve le long d'un tube de courant.

On peut alors interpréter assez aisément une carte de ligne de champs pour ce type d'écoulement :



Pour un tube de courant entre A et C, on a conservation du débit volumique :

$$D_v = cste = \langle v(A)\rangle\, S_A = \langle v(B)\rangle\, S_B = \langle v(C)\rangle\, S_C$$

★

Du fait de la variation de la surface du tube de champ, on en déduit donc que :

$$\langle v(C)\rangle < \langle v(A)\rangle \ll \langle v(B)\rangle \tag{IV.2}$$

Remarquons également que si la vitesse est uniforme dans les sections droites d'un tube de courant, on peut très simplement exprimer des relations entre sections et vitesses via l'égalité des débits volumiques :

$$v_A S_A = v_B S_B = v_C S_C \tag{IV.3}$$

Remarque : L'écoulement représenté sur la carte de champ est un écoulement stationnaire, même si, entre A et B, les particules de fluide accélèrent.

IV.5 Synthèse sur le débit massique et le débit volumique

Hypothèse	Conséquence locale	Conséquence intégrale
Ecoulement stationnaire	$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{j}_m) = 0$	Conservation de D_m le long d'un tube de courant
Ecoulement incompressible	$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \mathrm{div}(\vec{v}) = 0$	Conservation de D_v le long d'un tube de courant

V Ecoulement irrotationnel

V.1 Définition et conséquences

Remarque : La vorticité est le vecteur $\vec{\omega} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})$. La vorticité caractérise donc la tendance du champ des vitesses à tourner autour d'un point. On définit aussi parfois le vecteur tourbillon $\vec{\Omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{\omega}$.

Définition d'un écoulement irrotationnel

Un écoulement irrotationnel est défini par

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$$

en tout point.

★ On en déduit qu'il existe une fonction Φ, appelée potentiel des vitesses ou potentiel hydrodynamique, telle que $\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$.

On appelle alors parfois ces écoulements des écoulements potentiels.

Remarque : La définition d'un écoulement irrotationnel revient à dire que la vorticité de l'écoulement est nulle en tout point.

Conséquences de cette définition sur le potentiel des vitesses :

- Le potentiel des vitesses est toujours défini à une constante près.
- Les surfaces/lignes équipotentielles sont normales en tout point aux lignes de courant.

★ On note la forte analogie entre l'électrostatique et les écoulements irrotationnels. En effet, les équations locales sont analogues :

$$\begin{array}{c|c} \mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} & \mathrm{div}(\vec{v}) \text{ qq} \\ \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} & \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0} \end{array}$$

Remarque : On a $\vec{j}_m = \rho\vec{v} = -\rho\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$: loi analogue à la loi de Fick/Fourier/Ohm !

Exemples :

1. **Ecoulement uniforme** : $\vec{v} = U\vec{e_x}$:
   L'écoulement uniforme est un écoulement irrotationnel car $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$.
   Le potentiel des vitesses s'écrit $\Phi = Ux + \text{cste}$.
   ★ Carte de champ.
2. **Vortex axial** : on se place en coordonnées cylindriques. Hors de l'axe (Oz), on définit le champ de vitesses par $\vec{v} = \frac{A}{r}\vec{e_\theta}$.
   Cherchons s'il existe un potentiel des vitesses Φ. On aurait alors :
   $$\mathrm{d}\Phi = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = -\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = -\frac{A}{r}r\mathrm{d}\theta = -A\mathrm{d}\theta$$
   ★ Donc, le potentiel $\Phi = -A\theta + \text{cste}$ convient.
   Ainsi, le potentiel des vitesses est bien défini et l'écoulement est irrotationnel hors de l'axe (Oz).
   Carte de champ.

V.2 Ecoulement irrotationnel et incompressible

Un écoulement irrotationnel et incompressible vérifie donc à la fois

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0} \qquad \text{et} \qquad \text{div}(\vec{v}) = 0$$

Du point de vue du potentiel des vitesses, on en déduit que :

$$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}(\Phi) = -\Delta\Phi = 0$$

★ Φ est solution de l'équation de Laplace dans un écoulement irrotationnel et incompressible.

Exercices

Ex. 1 Masse volumique de l'air sec

On cherche à retrouver la valeur de la masse volumique de l'air sec, dans les conditions normales de température et de pression (CNTP).

1. Rappeler la proportion en masse de dioxygène et de diazote dans l'air. En déduire que la masse molaire de l'air est de $M(\text{air}) = 29\,\text{g/mol}$.
2. En déduire la valeur de la masse volumique de l'air.

Correction de l'exercice 1

1. On peut retrouver la masse molaire de l'air. L'air est composé, majoritairement, de 80% de N_2 (principalement avec de l'azote d'isotope 14) de masse molaire $M(N_2) = 2 \times 14 = 28\,\text{g/mol}$; et de 20% de O_2 (principalement avec de l'oxygène d'isotope 16) de masse molaire $M(O_2) = 2 \times 16 = 32\,\text{g/mol}$. Donc, $M(\text{air}) = 0.8 \times M(N_2) + 0.2 \times M(O_2) = 29\,\text{g/mol}$.

   ⚠ Il faut savoir que la masse molaire des nucléons est de l'ordre de $1\,\text{g/mol}$.
2. On suppose que l'air est modélisable par un GP. Pour un volume infinitésimal :

$$P\text{d}\tau = \delta n RT = \frac{\delta m}{M} RT \Rightarrow \mu = \frac{\delta m}{\text{d}\tau} = \frac{PM}{RT}$$

   On retrouve alors : $\mu = 1.2\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}$.

Ex. 2 Accélération des particules de fluide (1)

On étudie un fluide ayant une masse volumique variant avec le temps selon une fonction affine. On appelle μ_0 sa masse volumique à $t = 0$. Pour $t \geq 0$, ce fluide est le siège d'un écoulement dont le champ de vitesses est donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{v}(x,y,z,t) = \frac{\beta x}{\mu_0 - \beta t}\vec{e_x}$$

avec β une constante réelle positive. La durée d'étude de l'écoulement est telle que βt est toujours inférieur à μ_0.

1. Quelle est l'équation des lignes de courants à un instant t fixé ?
2. L'écoulement est-il stationnaire ?
3. Calculer l'accélération des particules de fluide dans cet écoulement.

Correction de l'exercice 2

1. Le vecteur vitesse est selon $\vec{e_x}$, donc nécessairement, les lignes de courant, tangentes aux vecteurs vitesse, sont selon $\vec{e_x}$. Leur équation est donc $y = \text{cste}$ et $z = \text{cste}$.
2. On a $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\beta^2 x}{(\mu_0 - \beta t)^2}\vec{e_x} \neq \vec{0}$: l'écoulement n'est pas stationnaire.
3. Accélération :

$$\frac{\text{d}\vec{v}}{\text{dt}} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = \frac{\beta^2 x}{(\mu_0 - \beta t)^2}\vec{e_x} + \left(\frac{\beta x}{\mu_0 - \beta t}\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\beta x}{\mu_0 - \beta t}\vec{e_x}\right) = 2\frac{\beta^2 x}{(\mu_0 - \beta t)^2}\vec{e_x}$$

Ex. 3 Accélération des particules de fluide (2)

On mesure l'écoulement d'un fluide compris entre deux cylindres coaxiaux de rayons R_1 et R_2. Un moteur permet de faire tourner le cylindre intérieur de rayon R_1.

Par symétrie et par invariances, on suppose que le champ de vitesse est de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta}$, en coordonnées cylindriques.

1. Quelle est l'équation des lignes de courants ?

2. L'écoulement est-il stationnaire ?
3. Calculer l'accélération des particules de fluide dans cet écoulement en fonction de $v(r)$ et de r.

Formulaire : Gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}$$

Correction de l'exercice 3

1. Le champ de vitesse est selon $\vec{e_\theta}$. Comme les lignes de courant sont tangentes aux vecteurs vitesses, elles sont dirigées selon $\vec{e_\theta}$: leur équation est donc $r = $ cste et $z = $ cste.
2. On a $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$: l'écoulement est stationnaire.
3. Accélération :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \frac{v(r)}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(v(r)\vec{e_\theta}\right)\frac{v(r)^2}{r}\frac{\mathrm{d}\vec{e_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\frac{v(r)^2}{r}\vec{e_r}$$

⚠ Ne pas oublier qu'en coordonnées cylindriques et sphériques, la base est locale : l'orientation des vecteurs de la base dépend du point choisi, et en l'occurence, de l'angle θ.

Ex. 4 Débit de la Loire

Au niveau d'Orléans, le débit moyen de la Loire est $D_\mathrm{v} = 350\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$, avec une vitesse typique de $v = 1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

1. Estimer la largeur du fleuve si la profondeur moyenne est de 2 m.
2. Après avoir fait une hypothèse sur la nature de l'écoulement, calculer la vitesse du fleuve s'il s'élargit de 20 m.

Correction de l'exercice 4

1. $D_\mathrm{v} = Sv = h \times L \times v$, en notant h la profondeur, L la largeur. Ainsi $L = \dfrac{D_\mathrm{v}}{hv} = 175\,\mathrm{m}$
2. On fait l'hypothèse que l'écoulement est homogène et incompressible (ce qui semble valider par le fait que la phase étudiée ici est liquide). Donc, le débit volumique sur la section totale du fleuve se conserve. Ainsi, si le fleuve s'élargit, la vitesse moyenne du fluide diminue : $hLv = hL'v'$ d'où $v' = \frac{L}{L'}v = 0.9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Ex. 5 Diffuseur de fluide

Un fluide circule dans un tuyau avec un débit volumique D_v fixé. À l'extrémité O du tuyau, un diffuseur envoie le fluide de manière isotrope (on néglige la présence du tuyau) : $\vec{v}(M,t) = v(r,t)\vec{e_r}$ en coordonnées sphériques. On suppose l'écoulement incompressible.

1. Déterminer l'expression du champ de vitesse. On exprimera les constantes d'intégration en fonction du débit volumique D_v.
2. En déduire l'accélération des particules de fluide.
3. Vérifier le caractère irrotationnel du champ de vitesses.
4. Maintenant qu'on a montré que l'écoulement est irrotationnel, nous allons redéterminer l'accélération d'une particule de fluide, par un calcul différent de la Q.2. En utilisant la relation d'analyse vectorielle $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\dfrac{||\vec{v}||^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$, déterminer à nouveau l'accélération des particules de fluide.
5. Définir le potentiel des vitesses Φ. Déterminer une expression du potentiel des vitesses. Représenter les lignes de courant et les surfaces équipotentielles.

Formulaire : en coordonnnées sphériques

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}.\ \text{(pas à savoir)}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi.$$

Correction de l'exercice 5

1. Étant donné que l'écoulement est incompressible et homogène, on a $\operatorname{div} \vec{v} = 0 = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial(r^2 v(r,t))}{\partial r}$. Ainsi en intégrant, $v(r,t) = \dfrac{A}{r^2}$. Pour déterminer les constantes, utilisons la conservation du débit volumique, comme l'écoulement est incompressible :

$$D_{\mathrm{v}} = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = v(r,t) \iint_{(S)} r^2 \mathrm{d}t \, \sin\theta \mathrm{d}\varphi = v(r,t) \times 4\pi r^2 = 4\pi A \tag{Ex.1}$$

Or, le débit volumique étant constant, cela impose $A = \dfrac{D_{\mathrm{v}}}{4\pi}$. D'où un champ de vitesse :

$$\vec{v} = \frac{D_{\mathrm{v}}}{4\pi r^2}\vec{e_r} \tag{Ex.2}$$

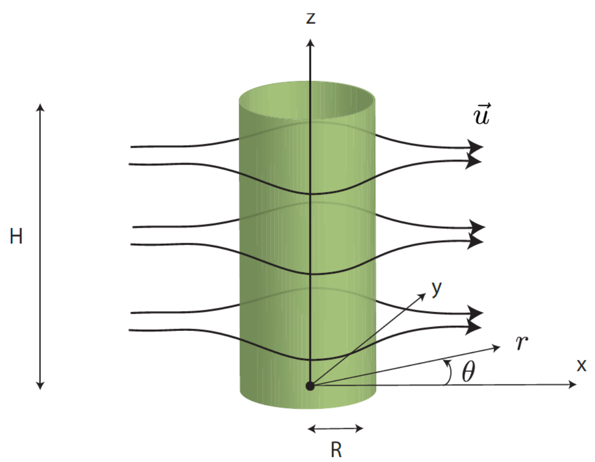
2. On vérifie que $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$ à l'aide d'un formulaire pour le rotationnel en sphérique. On en déduit alors directement que $\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi)$ avec φ le potentiel des vitesses.
3. Enfin il faut déterminer le potentiel φ associé :

$$\vec{v} = \frac{D_{\mathrm{v}}}{4\pi r^2}\vec{e_r} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} \tag{Ex.3}$$

soit après projection, φ ne dépend que de r et vérifie $\dfrac{\partial \varphi}{\partial r} = -\dfrac{D_{\mathrm{v}}}{4\pi r^2}$ soit $\varphi(r) = \dfrac{D_{\mathrm{v}}}{4\pi r}$.
Les équipotentielles sont alors des cercles concentriques de centre O, et les lignes de courant sont telles que $\vec{e_r} \wedge \mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\mathrm{d}\theta = 0$ (soit encore des droites perpendiculaires aux équipotentielles passant par O).

Ex. 6 Ecoulement irrotationnel autour d'un cylindre

On considère un cylindre de rayon R et de hauteur infinie ($H \to +\infty$), qui se trouve comme obstacle dans un écoulement de vitesse $\vec{u} = u_r(r,\theta)\vec{e_r} + u_\theta(r,\theta)\vec{e_\theta}$, en coordonnées cylindriques. Le cylindre étant imperméable, le fluide le contournera, comme schématisé sur la figure ci-dessous. Loin en amont et en aval du cylindre, l'écoulement tend vers un écoulement uniforme $U\vec{e_x}$.



Formulaire :
- Laplacien scalaire en coordonnées cylindriques :

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$$

- Gradient en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi) = \frac{\partial \Phi}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\vec{e_\theta} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\vec{e_z}$$

On suppose l'écoulement irrotationnel et incompressible. L'objectif est de calculer, sous ces hypothèses, l'expression du vecteur vitesse $\vec{u}$ en tout point du fluide.

1. Justifier que $\vec{u}$ dérive d'un potentiel des vitesses Φ. Quelle équation vérifie Φ ?

Avant de résoudre cette équation, on cherche les conditions aux limites que Φ doit respecter.

2. Loin du cylindre, l'écoulement tend vers un écoulement uniforme et en conséquence, le potentiel Φ tend vers une fonction Φ_∞ à l'infini. Déterminer l'expression de Φ_∞ en coordonnées cartésiennes, puis la traduire en coordonnées cylindriques.

3. Le cylindre étant imperméable, on a $\forall\theta, u_r(r = R,\theta) = 0$. Déterminer la condition aux limites du potentiel en $r = R$.

Au vu de la symétrie du problème, on cherche un potentiel Φ qui possède la même dépendance en θ que la fonction Φ_∞. Ainsi, on cherchera un potentiel Φ sous la forme $\Phi(r,\theta) = f(r)\cos(\theta)$ où $f(r)$ est une fonction à déterminer.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. La résoudre (comme ce que vous faites en maths).
5. En déduire le champ de vitesse $\vec{u}$ dans tout le fluide.

Correction de l'exercice 6

1. Ecoulement irrotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}) = \vec{0}$. Donc, il existe Φ tel que $\vec{u} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$.
   Ecoulement incompressible : $\mathrm{div}(\vec{u}) = 0 = -\Delta\Phi$. Equation de Laplace.
2. Pour $r \to +\infty$, on a $\vec{u} = U\vec{e_x}$. Donc, $\Phi_\infty = -Ux + \mathrm{cste} = -Ux$ (choix arbitraire de la constante comme étant nulle). En cylindrique : $\Phi_\infty = -Ur\cos(\theta)$.
3. On en déduit que $\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)\cdot\vec{e_r} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}(r = R,\theta) = 0$.
4. En utilisant l'équation de Laplace et la forme fournie de Φ, on obtient :

$$\frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\cos(\theta)f(r)}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} - \frac{f(r)}{r^2} = 0$$

   On teste une solution polynomiale : $f(r) = r^n$. On aboutit à $\forall r, \quad (n(n-1) + n - 1)\, r^{n-2} = 0 \Rightarrow n = \pm 1$.
   Ainsi, on a obtenu une base des solutions : $f(r) = Ar + \dfrac{B}{r}$.
   On détermine A et B avec les CL.
   - En $r \to +\infty$, on a $A = -U$.
   - En $r = R$, on a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}(R) = 0 = -U - \dfrac{B}{R^2}$, soit $B = -UR^2$.

   Donc :

$$f(r) = -U\left(r + \frac{R^2}{r}\right) \Rightarrow \Phi = -U\cos(\theta)\left(r + \frac{R^2}{r}\right)$$

5. Avec $\vec{u} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\Phi)$, on en déduit :

$$u_r = U\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad u_\theta = -U\left(1 + \frac{R^2}{r^2}\right)\sin(\theta)$$