

Actions de contact dans un fluide

Sommaire

I	Forces volumiques et surfaciques dans un fluide	2
I.1	Les forces volumiques	2
I.2	Les forces de contact surfaciques	2
II	Forces de pression	3
II.1	Une force surfacique	3
II.2	Équivalent volumique de la force de pression	6
II.3	Statique des fluides	6
III	Forces de viscosité	9
III.1	Étude de l'écoulement de Couette plan	9
III.2	Différents types de fluides	11
III.3	Equivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible	11
IV	Conditions aux limites	12
IV.1	Conditions aux limites à une interface fluide/solide	12
IV.2	Conditions aux limites à une interface fluide/air	13
	Exercices	14

Questions de cours

- Pression : définition, expression de la force de pression, démonstration de la force volumique de pression.
- Démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides, et l'appliquer à un liquide incompressible en présentant quelques applications.
- Démontrer l'expression du champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur. Interpréter physiquement en explicitant la signification du facteur de Boltzmann.
- Présenter l'écoulement de Couette plan. Interpréter physiquement la force de viscosité élémentaire $\delta \vec{F}_v = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$. Oug de la viscosité dynamique de l'eau. Démontrer l'équivalent volumique des forces de viscosité dans le cas de l'écoulement de Couette plan, puis donner la forme générale.



Il existe de nombreuses expériences montrant l'importance des forces de pression : un verre rempli d'eau avec une feuille à son sommet ne se vide pas lorsqu'on le retourne, un plongeur décompresse lorsqu'il plonge dans l'océan, la cabine d'un avion est sous-pressurisée lors d'un vol... Cette force de pression est une action de contact s'exerçant sur la surface d'un système. Ce chapitre a pour but de décrire l'origine et de déterminer les expressions des actions de contact s'exerçant dans un fluide.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Démontrer l'équation fondamentale de la statique des fluides et l'appliquer pour déterminer la pression dans un fluide incompressible, puis dans un gaz parfait isotherme, puis l'équation d'une surface libre.
2. Comprendre que l'origine des forces de viscosité est l'adhérence entre particules de fluides.
3. Déterminer l'équivalent volumique des forces de viscosité.

I Forces volumiques et surfaciques dans un fluide

Il existe deux types de forces extérieures s'exerçant sur un volume (\mathcal{V}) de fluide.

I.1 Les forces volumiques

Une force volumique est une force qui s'exerce sur tous les points du volume (\mathcal{V}). On la caractérise par une densité volumique de force $\vec{f}_v = \frac{\delta\vec{F}}{d\tau}$ où $\delta\vec{F}$ est la force élémentaire s'exerçant sur l'élément $d\tau$. La force totale est alors l'intégrale de la densité volumique de force :

$$\vec{F} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{f}_v d\tau \quad (\text{I.1})$$

Citons par exemple :

- le poids $\delta\vec{P} = \delta m \vec{g} = \rho d\tau \vec{g}$ (ρ : masse volumique) conduisant à $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$.
- la force de Lorentz $\delta\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c d\tau(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ (ρ_c : densité volumique de charges) conduisant à $\vec{f}_v = \rho_c(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho_c \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$.

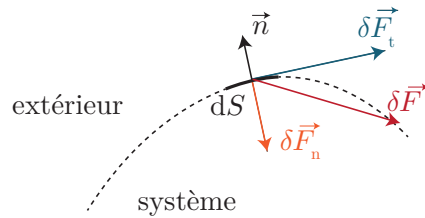
Dans un référentiel non galiléen, on doit prendre en compte des forces d'inertie, dont on peut aussi exprimer les équivalents volumiques.



- **Force d'inertie d'entraînement** : $\delta\vec{f}_{ie} = -m\vec{a}_e = -\rho d\tau \vec{a}_e$ conduisant à $\vec{f}_{v,ie} = -\rho \vec{a}_e$.
 - Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en translation par rapport à un référentiel galiléen \mathcal{R} : $\vec{f}_{v,ie} = -\rho \vec{a}_e$ avec \vec{a}_e : accélération de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .
 - Cas d'un référentiel \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen \mathcal{R} : $\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 \vec{HM}$ avec H le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation.
- **Force d'inertie de Coriolis** (dans le seul cas de \mathcal{R}' en rotation uniforme autour d'un axe fixe de \mathcal{R}) : $\vec{f}_{v,c} = -2\rho \vec{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}'}$

I.2 Les forces de contact surfaciques

Considérons un élément de surface infinitésimal $d\vec{S} = dS \vec{n}$ autour de M , avec \vec{n} la normale en M à cette surface. La force élémentaire $\delta\vec{F}$ exercée sur la surface dS peut généralement se décomposer en une composante normale $\delta\vec{F}_n$ correspondant à une force de pression, et une composante tangentielle $\delta\vec{F}_t$ appelée force de cisaillement ou force de viscosité.



On peut ainsi définir une force surfacique, encore appelée contrainte, et exprimée en N m^{-2} ou en pascal :

$$\vec{\sigma} = \frac{\delta \vec{F}}{dS} = \frac{\delta \vec{F}_n}{dS} + \frac{\delta \vec{F}_t}{dS} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_t$$

On va étudier dans les deux prochaines parties ces deux types de contraintes, jouant un rôle essentiel dans l'écoulement des fluides.

Problème des forces surfaciques lors de l'application du PFD :

Dans la suite, on appliquera le PFD à une particule de fluide, dans le référentiel du laboratoire galiléen. Or, on a :

$$m \vec{a} = (\rho d\tau) \frac{d\vec{v}}{dt} = (\rho d\tau) \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right)$$

★ On ne peut pas exprimer ce terme en faisant intervenir une surface élémentaire. Donc, le PFD s'écrira :

$$\rho d\tau \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right) = \vec{f}_v d\tau + \vec{\sigma}_n dS + \vec{\sigma}_t dS$$

qui dépend à la fois de $d\tau$ et dS ... Pour se ramener à une équation universelle (ne dépendant pas de la forme de la particule de fluide), on va donc chercher un équivalent volumique de chacune des contraintes. (On simplifiera alors par $d\tau$.)

II Forces de pression

II.1 Une force surfacique

a Définition de la pression

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives liées à l'agitation moléculaire et interactions attractives (Van der Waals par exemple). En un point M d'une surface délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par l'extérieur sur le fluide étudié s'écrit :

$$\delta \vec{F}_{\text{pression}} = -P(M) d\vec{S} = -P(M) dS \vec{n} \quad (\text{II.1})$$

avec dS la surface élémentaire autour de M et \vec{n} le vecteur normal, dirigé de l'intérieur du fluide vers l'extérieur. Ainsi on identifie la pression à la contrainte normale, $\vec{\sigma}_n = -P(M) \vec{n}$.

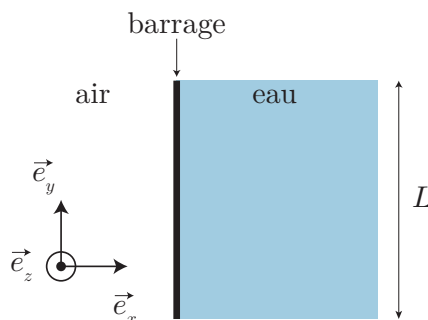
L'unité de la pression est le pascal (Pa), ou celle d'une force surfacique en N m^{-2} . On rencontre d'autres unités, dont une est à connaître : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$.

La force totale s'exerçant sur une surface S finie correspond alors à la somme des forces élémentaires :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \iint_{(S)} \delta \vec{F}_{\text{pression}} = - \iint_{(S)} P(M) dS \vec{n} \quad (\text{II.2})$$

b Calcul de la résultante des forces de pression sur une surface

i) Force de pression sur une surface plane



★ Ajouter un schéma avec vue de coupe du barrage et indiquer h , puis + tard \vec{n} .

Considérons un barrage plan de hauteur h et largeur L , soumis d'un côté aux forces de pression de l'air, et de l'autre à celles de l'eau. On précise qu'il règne dans l'eau une pression $P(z) = P_0 - \rho g z$, avec ρ la masse volumique de l'eau et $P_0 = 1$ bar la pression atmosphérique, et on supposera la pression de l'air uniforme, de valeur P_0 . Calculons la résultante des forces de pression sur le barrage :

- du côté de l'air, $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} = P_0 S \vec{e}_x = P_0 h L \vec{e}_x$;
- du côté de l'eau, on effectue explicitement le calcul de l'intégrale. On a $d\vec{S} = -dy dz \vec{e}_x$, d'où :

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = + \iint_{(S)} P(M) d\vec{S} = - \iint_{(S)} P(z) dy dz \vec{e}_x$$

$$\star \quad \vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = - \int_{y=0}^L dy \int_{z=-h}^0 (P_0 - \rho g z) dz \vec{e}_x = -L \left[P_0 z - \frac{1}{2} \rho g z^2 \right]_{-h}^0 \vec{e}_x$$

d'où finalement :

$$\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = -P_0 L h \vec{e}_x - \frac{1}{2} \rho g h^2 L \vec{e}_x$$

La résultante des forces de pressions vaut :

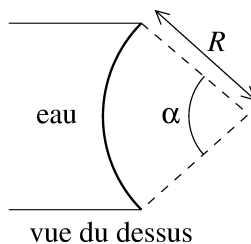
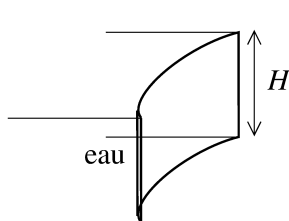
$$\vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}} = -\frac{1}{2} \rho g h^2 L \vec{e}_x$$

On constate, et c'est souvent le cas, que seule la surpression dans l'eau $P(z) - P_0$ joue un rôle dans le calcul des forces de pression.

Remarque : Le point d'application de la résultante des forces de pression, appelé centre de poussée P , est tel que la somme des moments en P de toutes les forces élémentaires de pression est nul

$\iint_{(S)} \vec{PM} \wedge P(M) d\vec{S} = \vec{0}$. Pour le barrage plan précédent, on sait par symétrie que P se trouve en $y = L/2$; le calcul montre alors que P est à une hauteur $z = h/3$.

ii) Force de pression sur une surface non plane



On considère un barrage constitué par une portion de cylindre, de rayon R , d'angle α et de hauteur H . Il est soumis d'un côté aux forces de pression de l'air et de l'autre à celles de l'eau. On cherche à déterminer la résultante des forces de pression.

Méthode pour calculer une force de pression sur une surface non plane :

Introduire un axe (Ox) dirigé vers la gauche sur le schéma du milieu.

★

1. On détermine la direction de la force par symétrie (ici : selon $-\vec{e}_x$).
2. On ne calcule que la projection de la force sur la direction déterminée (ici : on calcule F_x).

Exercice (à faire chez vous) : On introduit des coordonnées cylindriques, avec un axe (Oz) ascendant (O est sur la surface de l'eau). La pression de l'eau s'écrit alors toujours $P(z) = P_0 - \rho gh$. Déterminer l'expression de la résultante des forces de pression sur le barrage.

Vous devez trouver

$$\vec{F} = -\rho g R H^2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_x$$

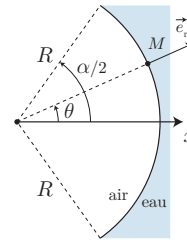
Considérons des coordonnées cylindriques, avec un axe vertical ascendant. En isolant une surface infinitésimale $d\vec{S} = -R d\theta dz \vec{e}_r$ on a :

- Du côté de l'air : $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{barrage}} = - \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$

- Du côté de l'eau : $\vec{F}_{\text{eau} \rightarrow \text{barrage}} = + \iint_{(S)} (P_0 - \rho g z) d\vec{S}$

Donc :

$$\vec{F} = \iint_{(S)} -\rho g z d\vec{S}$$



★

Pendant du fait des symétries par rapport au plan vertical découpant le cylindre en deux portions égales, la composante de la force de pression est selon \vec{e}_x . D'où :

Faire le schéma en miroir par rapport à celui-ci.

$$F_x = \iint_{(S)} \rho g z \cos \theta d\theta dz = R \rho g \int_{-\alpha/2}^{\alpha/2} \cos \theta d\theta \int_{-H}^0 z dz$$

$$F_x = -\rho g R \frac{H^2}{2} [\sin \theta]_{-\alpha/2}^{+\alpha/2} = -\rho g R H^2 \sin \frac{\alpha}{2}$$

Donc :

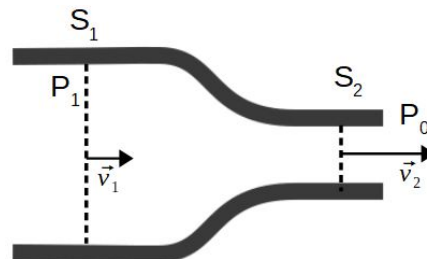
$$\vec{F} = -\rho g R H^2 \sin \frac{\alpha}{2} \vec{e}_x$$

iii) Cas d'un champ de pression uniforme

Lorsque le champ de pression est uniforme (ce sera fréquemment le cas dans les gaz), $P(M) = P_0 = \text{cste}$, on peut assez simplement calculer la résultante des forces de pression sur une surface fermée. Si on considère par exemple un cube de côté a , les forces de pression vont s'opposer deux à deux pour chaque face, et la résultante des forces de pression sur le cube est nulle. Le résultat peut se généraliser :

$$\oiint_{(S)} P_0 dS \vec{n} = \vec{0} \quad (\text{II.3})$$

Exemple : On considère une lance à incendie de pompier, placée dans l'air de pression uniforme P_0 . L'eau présente dans la lance passe par un rétrécissement du tuyau, passant de la surface S_1 à la surface S_2 . On cherche la résultante des forces de pression exercées par l'air sur le tuyau.



On étudie momentanément une situation fictive : on ferme le tuyau de part et d'autre et on le suppose entouré entièrement d'air. Schéma.

La surface étant fermée, on a (orienter \vec{e}_x vers la droite) :

$$\star \quad \oint_{(S)} P_0 \vec{dS} = \vec{0} = \iint_{(S_{lat})} P_0 \vec{dS} + P_0 S_1 \vec{e}_x - P_0 S_2 \vec{e}_x \Rightarrow \iint_{(S_{lat})} P_0 \vec{dS} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$$

Dans la véritable situation, la résultante des forces de pression de l'air sur le tuyau est donc : $\vec{F}_{p,air \rightarrow tuyau} = -P_0 (S_1 - S_2) \vec{e}_x$.

II.2 Équivalent volumique de la force de pression

Les forces de pression peuvent s'exprimer avec une force volumique équivalente. Pour la déterminer, considérons une particule de fluide $d\tau$, cubique de côtés dx , dy et dz en coordonnées cartésiennes.

Calcul de la résultante des forces de pression sur cette particule de fluide (schéma) :

$$\begin{aligned} \delta \vec{F} &= (P(x,y,z) - P(x+dx,y,z)) dy dz \vec{e}_x \\ &+ (P(x,y,z) - P(x,y+dy,z)) dx dz \vec{e}_y \\ &+ (P(x,y,z) - P(x,y,z+dz)) dx dy \vec{e}_z \\ \star \quad &= - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right)_{x,y} \vec{e}_z \right) dx dy dz = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau \end{aligned}$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de pression :

$$\boxed{\vec{f}_{v, \text{pression}} = - \overrightarrow{\text{grad}} P}$$

Cela s'interprète aisément : la résultante des forces de pression sur un petit élément est dirigée dans le sens opposé du gradient de pression, c'est-à-dire des zones de fortes pressions vers celles de faibles pressions.

II.3 Statique des fluides

a Relation fondamentale de la statique des fluides

On se place dans un référentiel galiléen dans lequel le fluide est à l'équilibre (c'est-à-dire que toutes les particules de fluide sont à l'équilibre : $\vec{v} = \vec{0}$). On suppose qu'en plus des forces de pression, le fluide est soumis à des forces dont la résultante est décrite par une densité volumique de force \vec{f}_v .

En appliquant le PFD à une particule de fluide à l'équilibre :

$$\vec{f}_{v, \text{pression}} d\tau + \vec{f}_v(M) d\tau = \vec{0} \iff \boxed{- \overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{f}_v(M) = \vec{0}}$$

qui constitue la *relation fondamentale de la statique des fluides*.

La résolution de cette équation peut nous permettre de déterminer le champ de pression au sein d'un fluide en statique, ce qu'on illustre par les deux exemples qui suivent.

b Champ de pression dans un liquide incompressible soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Considérons le cas d'un liquide incompressible, de masse volumique constante et uniforme ρ , placé dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. La relation de la statique des fluides s'écrit :

$$-\text{grad}P - \rho g\vec{e}_z = \vec{0}$$

soit projetée selon les trois axes :

$$\begin{aligned} \star \quad \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right)_{y,z} &= 0 \implies P(y,z) \\ \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right)_{x,z} &= 0 \implies P(z) \\ \left. \frac{\partial P}{\partial z} \right)_{x,y} &= -\rho g \implies \boxed{P(z) = P_0 - \rho g z} \end{aligned}$$

avec $P_0 = P(z = 0)$.

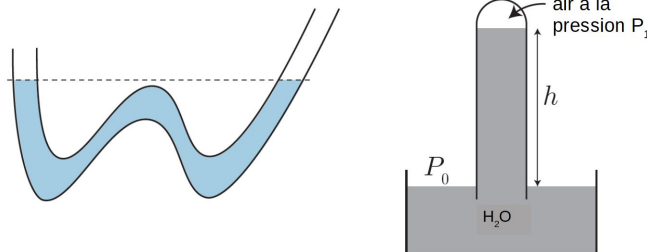


L'expression du champ de pression n'est valable que si l'axe vertical est orienté vers le haut, à l'opposé de \vec{g} . Si on inverse le sens de l'axe, on trouve $P(z) = P_0 + \rho g z$. De plus, il faut que l'origine de l'axe vertical soit placé de sorte que $P(z = 0) = P_0$.

On peut en conclure que la pression augmente avec la profondeur. On constate également que les surfaces de niveau isobares sont des plans horizontaux.

Ordre de grandeur à retenir : $\rho g \simeq 0.1 \text{ bar m}^{-1}$ pour l'eau liquide (soit encore une augmentation de pression de 1 bar tous les 10 m).

Quelques applications :



- deux points du même fluide situés à la même altitude ont la même pression. Les surfaces libres, soumises à la même pression atmosphérique P_0 ont donc la même altitude (principe des vases communicants), et sont horizontales ;
- Au niveau de la surface libre en contact avec l'atmosphère, la pression dans le fluide est P_0 . Donc, au sein du tube, la pression décroît avec l'altitude, jusqu'à une pression $P_1 = P_0 - \rho g h$ au sommet du tube.

c Champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur uniforme

Contrairement au cas des liquides, la masse volumique d'un gaz dépend de la pression. Donc, la relation : $P = P_0 - \rho g z$ est fausse !!! Supposons que l'on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait dont la température T_0 est constante (modèle de l'atmosphère isotherme).

Exercice : Déterminer l'expression de la pression dans l'atmosphère, dans le cadre du modèle isotherme. On introduira une distance caractéristique H dont on donnera l'expression et dont on réalisera une application numérique.

$$\rho = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{n_{qm}M}{V} = \frac{MP}{RT_0}$$

En suivant le même calcul que précédemment, le système de trois équations devient (axe (Oz) orienté vers le haut) :

$$\frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{MP}{RT_0}g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{1}{H}P(z) = 0$$

★ en posant $H = \frac{RT_0}{Mg}$ une hauteur caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 1. La condition à la limite $P(z=0) = P_0$ conduit alors à

$$P(z) = P_0 e^{-z/H}$$

- la pression diminue exponentiellement avec l'altitude, avec une distance caractéristique H valant pour l'air ambiant ($M = 29.0 \text{ g mol}^{-1}$) à la température $T_0 = 288 \text{ K}$, $H \simeq 8.4 \text{ km}$;
- on pourra considérer la pression constante à l'échelle de la centaine de mètres

Interprétation avec le facteur de Boltzmann :

Le terme exponentiel se met sous la forme $e^{-\frac{Mgz}{RT_0}} = e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$ avec $m = \frac{M}{N_A}$. La densité

volumique de particules $n = \frac{\delta N}{d\tau} = \frac{P}{k_B T_0} \propto e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}$. Ce terme correspond à un *facteur de Boltzmann* qui traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle de pesanteur mgz , et l'agitation thermique, d'énergie $k_B T$, qui conduit les molécules de gaz à occuper tout l'espace.

d Poussée d'Archimède

Définition de la poussée d'Archimède

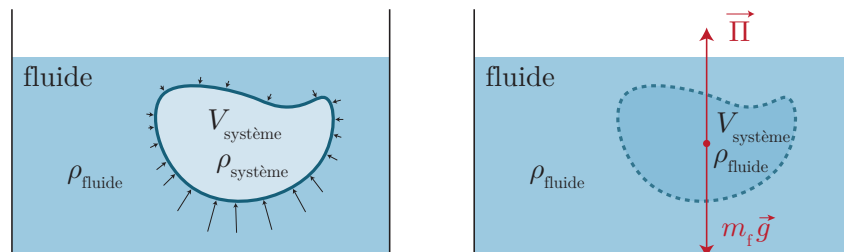
Dans un référentiel \mathcal{R} , la *poussée d'Archimède* est la *résultante des forces de pression* qui s'exerce sur un objet immobile dans \mathcal{R} , par le fluide au repos qui l'entoure.

★



Dans un exercice, ne pas prendre en compte la poussée d'Archimède ET la résultante des forces de pression : c'est la même force qui a deux noms différents !!!

Considérons le cas d'un objet plongé dans un fluide, et entièrement entouré par du fluide. Seuls les champs de pression et de pesanteur sont considérés ici.



En STATIQUE, le champ de pression dans le fluide entourant l'objet est identique que l'objet soit présent ou non. En effet, dans le fluide, on vérifie toujours : $\vec{0} = -\text{grad}(P) + \rho \vec{g}$ et on peut bien intégrer ceci entre la surface et tout le reste du fluide.

Donc, on peut considérer la situation fictive dans lequel l'objet est remplacé par le même volume

de fluide $V_{\text{système}}$. En statique, on applique le PFD à ce volume de fluide :

$$\vec{\Pi} + \vec{P} = \vec{0} \iff \vec{\Pi} = -m_f \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g}$$

Expression de la poussée d'Archimède

Un corps entièrement plongé dans un fluide au repos subit une force verticale ascendante opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g} \quad (\text{II.4})$$

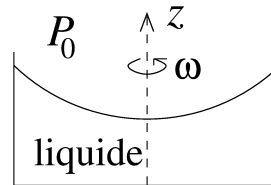
avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide (pas du système), et $V_{\text{système}}$ le volume occupé par le système.



Pour appliquer la poussée d'Archimède, il faut que la surface de l'objet soit fermée et entièrement entourée de fluides.

e Surface libre dans le cas d'un référentiel non galiléen

Considérons la situation concrète suivante. Un récipient cylindrique contenant un liquide de masse volumique ρ est en rotation autour de son axe de révolution (Oz) à la vitesse constante Ω . On note la pression atmosphérique P_0 .



Deux référentiels doivent être distingués :

- le référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen. Dans ce référentiel, le fluide n'est pas statique.
- le référentiel \mathcal{R}' en rotation à la vitesse ω autour de l'axe fixe (Oz) de \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le fluide est statique, ce qui rend l'étude plus simple.



On se place en coordonnées cylindriques d'axe (Oz).

Dans \mathcal{R}' , la relation fondamentale de la statique des fluides donne :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \Omega^2 \overrightarrow{HM} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z + \rho \Omega^2 r \vec{e}_r = \vec{0}$$

On cherche alors l'équation de la surface libre.

Définition : Surface libre

Interface entre un fluide et l'air.

Dans le cas d'un fluide statique sans tension superficielle, il y a continuité de la pression à l'interface fluide/air. Donc, la pression dans le fluide vaut $P = P_0 = \text{cste}$ au niveau de la surface libre.

Ainsi, si on se déplace de \vec{dr} sur la surface libre, on a $dP = 0$: $\overrightarrow{\text{grad}}(P) \cdot \vec{dr} = 0$. Donc :



$$\rho g dz = \rho \Omega^2 r dr \Rightarrow z(r) = \frac{\Omega^2 r^2}{2g} + \text{cste}$$

La surface libre forme une parabole.

III Forces de viscosité

III.1 Étude de l'écoulement de Couette plan

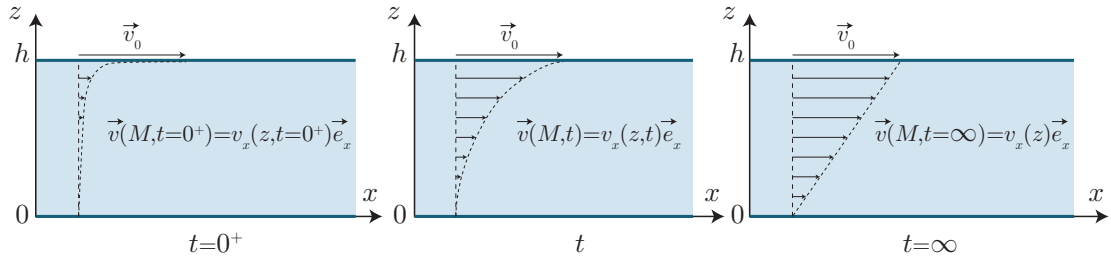
En mécanique des fluides, on étudie principalement trois types d'écoulement de fluides :

- l'*écoulement de Couette* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois ;
- l'*écoulement de Poiseuille* est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre

- l'entrée et la sortie de la conduite ;
- l'écoulement gravitaire est un écoulement de fluide provoqué par la pesanteur.

On va s'appuyer dans ce chapitre sur un premier type d'écoulement, appelé écoulement de Couette plan. Un fluide s'écoule entre deux plans parallèles, celui en $z = 0$ est maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire, et celui en $z = h$ se translate horizontalement (à partir de $t = 0$) à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

a Observation du champ de vitesse

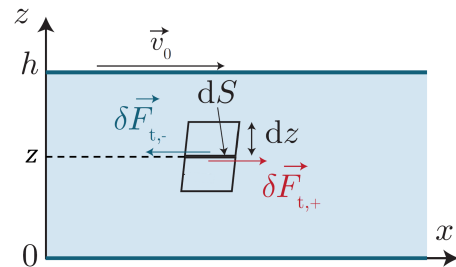


- ★ Lors de la mise en mouvement de la plaque, on observe un régime transitoire durant lequel les couches de fluide à son voisinage se mettent en mouvement, et transmettent de proche en proche de la quantité de mouvement à des couches de fluide plus éloignées. Au bout d'un certain temps, le profil de vitesse est linéaire.

L'écoulement de Couette plan est un exemple d'une famille d'écoulement appelée les **écoulements de cisaillement** : la vitesse dépend d'une coordonnée d'une direction transverse à la direction de l'écoulement.

b Expression de la force de viscosité

Considérons deux particules de fluide de surface dS horizontale et de hauteur dz l'une au-dessus de l'autre, l'interface étant à une altitude z . On exprime la force élémentaire exercée par la particule de fluide du dessus sur celle du dessous :



$$\delta \vec{F}_{t,+} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x$$

où η est appelé *viscosité dynamique* du fluide.

- ★ Unité de η : $\text{kg m}^{-1} \text{s}^{-1}$, mais on utilise plus couramment une unité secondaire, le poiseuille (symbole $P\ell$), correspondant à des Pas.

Commentaires sur la force de viscosité :

- **Attention aux variables/vecteurs :**
L'origine de la force de viscosité est la différence de vitesse entre deux particules de fluide. Ici, la vitesse des particules de fluide ne varie que selon z : il est donc
 - ★ logique de faire apparaître $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ et non pas $\frac{\partial v_x}{\partial x}$ ou $\frac{\partial v_x}{\partial y}$. Par contre, la force est bien dirigée selon $\pm \vec{e}_x$ (sens du mouvement).
- plus la différence de vitesse entre les deux particules est importante, plus la force est importante ;
- la particule de fluide va être freinée ou accélérée par la couche du dessus, selon la
 - ★ vitesse relative des deux : si $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$, celle du dessus est plus rapide et la force est bien dirigée selon $+\vec{e}_x$ de sorte à l'accélérer, et *vice versa*

- plus la surface de contact est grande, plus la norme de la force est importante ;
- la force dépend du fluide choisi, caractérisé par le coefficient η .

La force exercée par la particule de fluide du dessous sur celle du dessus s'exprime par :

★

$$\delta \vec{F}_{t,-} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \quad (\text{III.1})$$

Quelques ordres de grandeur de la viscosité dynamique :

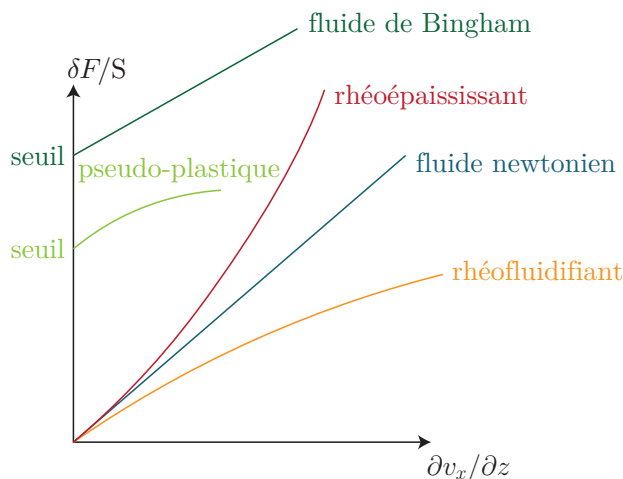
- l'hélium liquide à très basse température : $\eta = 0$ (état superfluide, sans viscosité) ;
- air à $T = 298 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $\eta = 1.8 \times 10^{-5} \text{ Pl}$;
- eau à $T = 298 \text{ K}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $\eta = 1.0 \times 10^{-3} \text{ Pl}$ (à connaître) ;
- glycérine pure : $\eta = 0.80 \text{ Pl}$;

III.2 Différents types de fluides

Pour une grande majorité de fluides, qualifiés de *fluides newtoniens*, l'expression précédente est valable et la viscosité ne dépend que de la température et de la pression.

Cependant, certains fluides qualifiés alors de *non newtoniens* ont un comportement plus complexe. Citons notamment :

- les fluides rhéofluidifiants dont la viscosité décroît si la vitesse de cisaillement augmente (ketchup, moutarde, sables mouvants) ;
- les fluides rhéoépaississants dont la viscosité croît si la vitesse de cisaillement augmente (ciment liquide, suspension de maïzéna) ;
- les fluides pseudo-plastiques (et les fluides de Bingham) présentent un seuil de contrainte en deçà duquel le fluide ne s'écoule pas (utile pour les peintures qui doivent pouvoir s'étaler et ensuite ne plus couler spontanément). Par exemple : le dentifrice, la mayonnaise, les fluides électro- ou magnétorhéologiques.



III.3 Equivalent volumique de la force de viscosité dans un écoulement incompressible

De même que pour les forces de pression, malgré la nature fondamentalement surfacique de la force de viscosité, on peut en donner un équivalent volumique.

a Cas particulier : écoulement de cisaillement à une dimension

On s'intéresse à un écoulement de cisaillement à une dimension d'un fluide newtonien, comme l'écoulement de Couette plan : $\vec{v} = v_x(z) \vec{e}_x$.

Considérons à nouveau le système : particule de fluide cubique, de volume $d\tau$. Schéma.
 La particule de fluide en $z + dz$ exerce une force $\delta\vec{F}_{t,+} = +\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_{z+dz} dS\vec{e}_x$ avec $dS = dxdy$.

La particule de fluide en z exerce une force $\delta\vec{F}_{t,-} = -\eta \left. \frac{\partial v_x}{\partial z} \right|_z dxdy\vec{e}_x$

★ Ainsi, la résultante des forces de viscosité sur la particule de fluide est :

$$\delta\vec{F} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} dzdxdy\vec{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} d\tau\vec{e}_x$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de viscosité :

$$\vec{f}_{v,viscosite} = \eta \frac{\partial^2 \vec{v}(z)}{\partial z^2}$$

b Cas général : écoulement incompressible d'un fluide newtonien

On admet alors la généralisation à trois dimensions de l'équivalent volumique de la force de viscosité :

Densité volumique de force de viscosité

Pour un fluide newtonien en écoulement incompressible, la densité volumique de force de viscosité est :

$$\vec{f}_{v,viscosite} = \eta \Delta \vec{v}$$

où le laplacien est ici l'opérateur vectoriel.

c Interprétation physique : un phénomène de diffusion

Dans le cadre de l'écoulement de Couette plan, nous montrerons (cf. chapitre MF3) que l'application du principe fondamental de la dynamique à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen conduit à :

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \Delta v_x \iff \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \Delta v_x = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$

Cela correspond à une équation de diffusion, de coefficient de diffusion $D = \frac{\eta}{\rho} = \nu$, appelé *viscosité cinématique*. Ainsi le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion, correspondant physiquement à la diffusion de quantité de mouvement de proche en proche au sein des différentes couches de fluide en mouvement.

IV Conditions aux limites

IV.1 Conditions aux limites à une interface fluide/solide

a Cas d'un fluide visqueux

Reprenons l'équation différentielle précédente, mais plaçons-nous en régime permanent. On doit donc résoudre $\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0$, ce qui s'intègre simplement en $v_x(z) = Az + B$. Pour déterminer les constantes A et B , il faut alors connaître des valeurs particulières du champ de vitesse. On va se servir ici du fait qu'il y a une interface entre le fluide et des solides.

Condition d'adhérence

★ À l'interface entre un fluide et un solide, dans le référentiel d'étude, le fluide ne peut pas avoir une vitesse différente de celle du solide du fait de la viscosité (le fluide adhère à la paroi à son contact) :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t)$$

en notant M un point de l'interface, M_f un point appartenant au fluide infiniment proche de M , et M_s un point appartenant au solide infiniment proche de M également.

Ainsi, pour l'écoulement de Couette plan, on a $v_x(0) = 0$ et $v_x(h) = v_0$ d'où $v_x(z) = v_0 \frac{z}{h}$, conforme aux observations expérimentales du champ de vitesse.

b Cas d'un fluide non visqueux

On étudiera également une modélisation simplifiée des fluides appelée la modélisation des fluides parfaits. Ces fluides parfaits s'écoulent sans aucune viscosité : il n'y a donc aucune adhérence du fluide aux parois solides. On dit que le fluide glisse sur la paroi.

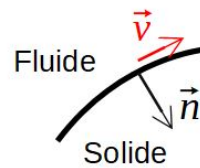
Il existe alors une autre condition aux limites, moins restrictive :

Condition d'imperméabilité

Le fluide ne peut pas traverser la paroi solide :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) \cdot \vec{n} = 0$$

avec \vec{n} la normale à l'interface.



IV.2 Conditions aux limites à une interface fluide/air

Dans le cas d'une interface fluide/air, l'interface s'appelle une surface libre. Nous allons ici prendre le cas simplifié d'une interface plane située en $z = 0$, mais les résultats se généralisent aisément au cas d'une interface non plane.

- Si la surface libre est immobile au cours du temps, on retrouve la condition de non-traversée de l'interface par le fluide : $\vec{v}(z = 0) \cdot \vec{e}_z = v_z(z = 0) = 0$
- S'il n'y a pas de tension superficielle, alors il y a continuité des forces surfaciques à l'interface. Mais, comme on peut négliger la force tangentielle exercée par l'air sur le fluide, on aboutit à :
 - continuité de la pression à l'interface (force surfacique normale) : $P(z = 0) = P_0$ avec P_0 la pression atmosphérique
 - continuité de la force surfacique tangentielle à l'interface : $\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$ et $\eta \frac{\partial v_y}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$

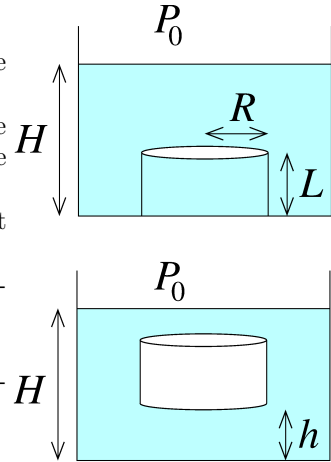


Exercices

Ex. 1 Force de pression et poussée d'Archimède

Un récipient repose sur une surface horizontale. Le récipient est rempli d'eau, de masse volumique ρ , sur une hauteur H . La pression atmosphérique est P_0 .

1. Le fond du récipient présente en son milieu une excroissance cylindrique de hauteur $L < H$ et de rayon R . Déterminer la résultante des forces de pression exercée sur ce cylindre.
2. Considérons un cylindre de hauteur L et de rayon R immergé dans l'eau et dont le fond est à une distance h du fond du récipient.
 - (a) Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le cylindre.
 - (b) Vérifier le principe d'Archimède avec ce système.
3. Enfin, déterminer la résultante des forces de pression sur le cylindre si celui-ci était partiellement émergé.



Correction de l'exercice 1

1. De par les symétries, les forces de pression sur la surface latérale se compensent. Ainsi, la seule force s'exerçant sur le cylindre est verticale vers le bas et est liée à la surface plane. La surface étant plane et d'altitude constante, on a donc simplement $\vec{F} = -P(z = -(H - L))\pi R^2 \vec{e}_z$ en considérant un axe vertical orienté vers le haut et d'origine au niveau de la surface. Avec $P(z) = P_0 - \rho g z$, on a donc

$$\vec{F} = -(P_0 + \rho g(H - L))\pi R^2 \vec{e}_z \quad (\text{Ex.1})$$

Ce calcul montre également que le principe d'Archimède n'est pas applicable ici. Si on l'appliquait, on trouverait : $\vec{\Pi} = +\rho V g \vec{e}_z = \rho g L \pi R^2 \vec{e}_z$ ce qui est faux ! C'est logique : le cylindre n'est pas entièrement entouré de fluide (la réaction du support rend la démonstration de la poussée d'Archimède fautive).

2. (a) Par les mêmes arguments de symétrie, les forces de pression s'exercent uniquement sur les deux faces horizontales du cylindre :

$$\vec{F}' = -P(z = -(H - L - h))\pi R^2 \vec{e}_z + P(z = -(H - h))\pi R^2 \vec{e}_z = +\rho g L \pi R^2 \vec{e}_z \quad (\text{Ex.2})$$

- (b) On retrouve bien ce résultat à l'aide du principe d'Archimède, le volume immergé étant $\pi R^2 L$: $\vec{\Pi} = +\rho V g \vec{e}_z$ orienté vers le haut.
3. Soit h_{imm} la hauteur immergée du cylindre. On peut raisonner des deux manières suivantes.
 - On calcule la résultante des forces de pression en intégrant la force sur les deux surfaces planes. Les P_0 se compensent, si bien que :

$$\vec{F}'' = +\rho g h_{imm} \pi R^2 \vec{e}_z$$

- On peut aussi appliquer le principe d'Archimède, à condition de considérer un volume fictif rempli à la fois d'eau et d'air dans la démonstration. Comme la hauteur émergée du cylindre vaut : $h_{em} = L - h_{imm}$, on obtient :

$$\vec{F}'' = g \pi R^2 (\rho h_{imm} + \rho_{air} h_{em}) \vec{e}_z$$

Or, $\rho_{air} \ll \rho$, on simplifie en :

$$\vec{F}'' = +\rho g h_{imm} \pi R^2 \vec{e}_z = \rho g V_{immergé} \vec{e}_z$$

Seul le volume immergé joue un rôle dans la force de pression.

Ex. 5 Aplatissement de la Terre

Newton fut le premier à évaluer l'aplatissement de la Terre par rapport à une boule parfaite. Il a modélisé cet aplatissement en supposant que la Terre se comporte comme un fluide incompressible de masse volumique ρ en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω autour de l'axe (Oz) des pôles (modèle valable pour des déformations de la Terre sur le temps long).

Cet exercice a pour but d'estimer l'aplatissement relatif de la Terre. Des données sont regroupées en fin d'énoncé.

1. Par un raisonnement qualitatif, déterminer si la Terre est aplatie au niveau des pôles ou au niveau de l'Equateur.

Pour déterminer quantitativement cet aplatissement, il nous faut commencer par exprimer les forces volumiques auxquelles sont soumises les particules de fluide.

2. Cette question porte sur le champ gravitationnel uniquement. En supposant, pour cette question seulement, que l'on peut approximer le champ gravitationnel créé par la Terre comme celui d'une boule moyenne de rayon R et de masse uniformément répartie en volume, exprimer le champ gravitationnel à l'intérieur de la Terre en fonction de la masse M de la Terre, de R , de \mathcal{G} et de la distance r au centre de la Terre.

Dans toute la suite, nous poserons la notation $\omega_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R^3}}$. On définit un système de coordonnées sphériques de centre O , le centre de la Terre, associé à un référentiel \mathcal{R}_T en rotation uniforme autour de l'axe (Oz) des pôles à la vitesse Ω par rapport au référentiel géocentrique. On suppose le référentiel géocentrique galiléen.

3. Justifier que le référentiel \mathcal{R}_T n'est pas galiléen.
4. Montrer que le champ de pression à l'intérieur de la Terre s'exprime par :

$$P(r, \theta) = \frac{\rho r^2}{2} (\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) + K$$

où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

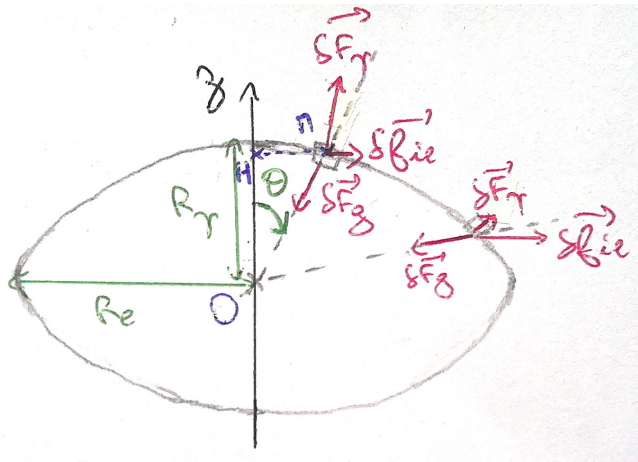
5. On s'intéresse désormais à la surface libre du fluide modélisant la Terre. On note R_p le rayon de la Terre aux pôles et R_e le rayon de la Terre à l'Equateur. Déterminer une relation reliant R_p , R_e , Ω et ω_0 .
6. On suppose que l'aplatissement relatif de la Terre est petit devant 1, ce qui permet de supposer que $R_e \simeq R$ et que $|R_e - R_p| \ll R$. Définir et déterminer l'expression de l'aplatissement relatif de la Terre. Réaliser l'application numérique.
7. La valeur de l'aplatissement relatif régulièrement utilisé en physique est de 0.3%. Commenter le résultat déterminé à la question précédente.

Données :

- Masse de la Terre : $M = 6.0 \times 10^{24}$ kg
- Rayon moyen de la Terre : $R = 6.4 \times 10^6$ m
- Vitesse angulaire de rotation de la Terre autour des pôles : $\Omega = 7.3 \times 10^{-5}$ rad s⁻¹
- Constante de gravitation universelle : $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻²

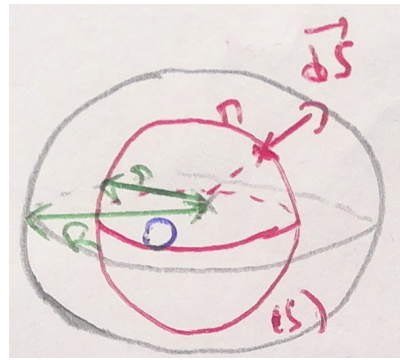
Correction de l'exercice 5

1. On suppose que le fluide modélisant la Terre est en équilibre dans le référentiel terrestre. Raisonnons sur une particule de fluide au niveau de la surface libre. Bilan des forces : force gravitationnelle $\delta \vec{F}_g$, force d'inertie d'entraînement $\delta \vec{f}_{ie}$ et résultante des forces de pression $\delta \vec{F}_p$.



Comme $\vec{\delta f}_{ie}$ augmente en norme des pôles vers l'Equateur, on en déduit que la Terre est aplatie au niveau des pôles : $R_p < R_e$.

2. .



- Coordonnées sphériques de centre O , le centre de la Terre.
- Les plans $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de masse. Donc, $\vec{g} = g(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r$
- Invariance de la distribution de masse par rotations d'angles θ et φ : $\vec{g} = g(r) \vec{e}_r$.
- Surface (S) de Gauss fermée et orientée : cf. schéma.
- Théorème de Gauss gravitationnel ($r \leq R$) :

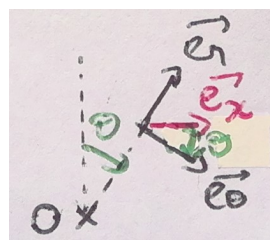
$$\oiint_{(S)} \vec{g} \cdot d\vec{S} = g(r) 4\pi r^2 = -4\pi G M_{\text{int}} = -4\pi G \times \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

pour $r \leq R$ et avec $\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$. Donc :

$$g(r) = -G \frac{M}{R^3} r \Rightarrow \vec{g}(r \leq R) = -\frac{GM}{R^3} r \vec{e}_r = -\omega_0^2 r \vec{e}_r$$

3. Le référentiel \mathcal{R}_T n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique galiléen : le référentiel \mathcal{R}_T n'est donc pas galiléen.
4. • Référentiel \mathcal{R}_T en rotation uniforme autour d'un axe fixe d'un référentiel galiléen
La densité volumique de force gravitationnelle est donc $\vec{f}_{v,g} = -\rho \omega_0^2 r \vec{e}_r$ et celle de force d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_{v,ie} = \rho \Omega^2 H M \vec{e}_x = \rho \Omega^2 (r \sin(\theta)) (\sin(\theta) \vec{e}_r + \cos(\theta) \vec{e}_\theta)$$



Relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_{v,g} + \vec{f}_{v,ie} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial r} = -\rho\omega_0^2 r + \rho\Omega^2 \sin^2(\theta)r \\ \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} = \rho\Omega^2 \cos(\theta) \sin(\theta)r \\ \frac{\partial P}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

On tire de la 3ème équation que $P(r,\theta)$ (logique au vu de la symétrie du problème). En intégrant la première équation par rapport à r , on trouve : $P(r,\theta) = \rho(\Omega^2 \sin^2(\theta) - \omega_0^2) \frac{r^2}{2} + f(\theta)$ où $f(\theta)$ est une fonction ne dépendant que de θ . On détermine cette fonction f à l'aide de la 2ème équation : $\frac{df}{d\theta} = 0$. Donc, $f(\theta) = K$ avec K une constante. On trouve donc le résultat donné dans l'énoncé.

5. Au niveau de la surface libre, la pression vaut P_0 la pression atmosphérique. En exprimant les deux relations pour $r = R_p$ ($\theta = 0$) et $r = R_e$ ($\theta = \pi/2$) et en les soustrayant, on aboutit à :

$$R_e^2\Omega^2 + \omega_0^2(R_p^2 - R_e^2) = 0$$

6. On définit l'aplatissement relatif de la Terre par $A = \frac{R_e - R_p}{R}$. Avec les approximations proposées, on arrive à :

$$R^2\Omega^2 + \omega_0^2(R_p + R_e)(R_p - R_e) \simeq R^2\Omega^2 + 2\omega_0^2R(R_p - R_e) = 0 \Rightarrow A = \frac{\Omega^2}{2\omega_0^2}$$

A.N. : $A = 0.17\%$. Ce résultat valide l'approximation effectuée ci-avant en considérant que $R_e - R_p \ll R$ (et donc également celle $R_e \simeq R$).

7. On a donc déterminé un résultat très proche du résultat utilisé couramment (0.2% au lieu de 0.3%). L'erreur effectuée peut provenir de la modélisation du champ gravitationnel, qui suppose que la Terre est sphérique, alors qu'on démontre dans la suite qu'elle ne l'est pas... Il faudrait procéder par itérations successives en corrigeant la détermination du champ gravitationnel à l'aide de la forme non sphérique de la surface libre déterminée, et déterminer une forme plus précise de la surface libre, et ainsi de suite.

Ex. 6 Force exercée par un écoulement visqueux

On considère deux plaques planes fixes en $z = -\frac{a}{2}$ et $z = +\frac{a}{2}$, de largeur $L_y \gg a$ suivant \vec{e}_y , et $L_x \gg a$ suivant \vec{e}_x .

Entre ces deux plaques s'écoule un fluide de viscosité η , avec un débit volumique Q . On cherche un champ de vitesse de la forme $\vec{v} = (bz^2 + cz + d)\vec{e}_x$.

1. Déterminer complètement le champ de vitesse.
2. Déterminer la force visqueuse que le fluide exerce sur chaque plaque.

Donnée : On fournit l'expression de la force de viscosité s'appliquant entre deux particules de fluide : $dF = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS$ avec η la viscosité dynamique du fluide et dS la surface élémentaire de contact entre les particules de fluide.

Correction de l'exercice 6

On étudie ici l'écoulement dit de Poiseuille plan.

1. Utilisons d'abord les conditions aux limites au niveau des plaques fixes : $\vec{v}(z = \pm a/2) = \vec{0}$. Cela permet d'écrire que

$$b \frac{a^2}{4} \pm c \frac{a}{2} + d = 0 \implies c = 0 \quad \text{et} \quad d = -\frac{ba^2}{4} \quad (\text{Ex.8})$$

Puis la connaissance du débit volumique permet de déterminer b :

$$Q = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{L_y} dy \int_{-a/2}^{a/2} v(z) dz = L_y b \left[\frac{z^3}{3} - \frac{a^2 z}{4} \right]_{-a/2}^{a/2} = -\frac{L_y b a^3}{6} \quad (\text{Ex.9})$$

d'où le champ de vitesse :

$$\vec{v} = -\frac{6Q}{L_y a^3} \left(z^2 - \frac{a^2}{4} \right) \vec{e}_x \quad (\text{Ex.10})$$

2. En $+a/2$, la force qu'exerce le fluide sur la plaque du haut vaut $\vec{F}_+ = -\eta \frac{dv_x}{dz} \Big|_{a/2} S \vec{e}_x$ et en $-a/2$, $\vec{F}_- = \eta \frac{dv_x}{dz} \Big|_{-a/2} S \vec{e}_x$. Or $\frac{dv_x}{dz} = 2bz$, donc

$$\vec{F}_+ = \vec{F}_- = +\frac{\eta L_x L_y 12Q}{L_y a^3} \frac{a}{2} \vec{e}_x = \frac{6\eta L_x Q}{a^2} \vec{e}_x \quad (\text{Ex.11})$$