MF3

Mécanique des fluides

Dynamique des fluides

Sommaire

Questions de cours

- Etablir l'équation de Navier-Stokes dans un fluide newtonien en écoulement incompressible. Expliciter les deux modes de transport de quantité de mouvement dans un fluide et construire le nombre de Reynolds. Régime laminaire/turbulent.
- Sur un exemple au choix du colleur (Couette plan, Couette cylindrique, Poiseuille plan, Poiseuille cylindrique), déterminer le champ de vitesse.
- Décrire le modèle de l'écoulement parfait et discuter de sa validité pour modéliser un écoulement réel.
- Ecoulement parfait, stationnaire et incompressible dans une conduite cylindrique horizontale : profil de vitesse, champ de pression.

.

★ *Prise de notes :* On a déterminé les forces s'exerçant sur une particule de fluide (chapitre MF2), on a déterminé l'accélération d'une particule de fluide (chapitre MF1). On est donc prêts à exprimer le PFD dans un référentiel galiléen et à en déduire le champ de vitesse et de pression dans un fluide en mouvement.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Démontrer l'équation de Navier-Stokes régissant la dynamique des fluides visqueux.
2. Définir le nombre de Reynolds et l'évaluer sur des exemples concrets.
3. Appliquer une méthode-type pour déterminer le champ de vitesses dans un écoulement visqueux, laminaire, stationnaire et incompressible.

Dans ce chapitre, on se contentera d'étudier des fluides en mouvement dans des **référentiels galiléens**.

Hypothèse : Tous les écoulements de ce chapitre sont supposés être **incompressibles**.

I Équation de Navier-Stokes et nombre de Reynolds

I.1 Établissement de l'équation de Navier-Stokes

Considérons une particule de fluide de volume élémentaire $d\tau$ soumise aux forces de pression, aux forces de viscosité (on suppose que le fluide est newtonien en écoulement incompressible) et à une résultante des autres forces de densité volumique $\vec{f}_v$. On note ρ la masse volumique de la particule de fluide et η la viscosité dynamique du fluide.

L'application du PFD dans un référentiel galiléen donne :

$$\delta m\vec{a} = \rho d\tau\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)d\tau + \eta\Delta\vec{v}d\tau + \vec{f}_v d\tau$$

★ D'où l'équation universelle suivante :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}_v$$

appelée équation de Navier-Stokes (1845).
Cette équation aux dérivées partielles est une équation locale, non linéaire (à cause du terme en $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}$).

La non-linéarité de l'équation aux dérivées partielles rend sa résolution exacte dans le cas général impossible (ou en tout cas, non déterminée à ce jour).

Vocabulaire :

$$\rho\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}_v$$

★ Entourer "terme convectif", "terme diffusif".

Autre écriture de l'équation de Navier-Stokes :

En utilisant la seconde écriture de la dérivée particulaire de la vitesse, on peut ré-écrire l'équation de Navier-Stokes sous la forme :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(\frac{||\vec{v}||^2}{2}\right) + \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v})\wedge\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v} + \vec{f}_v$$

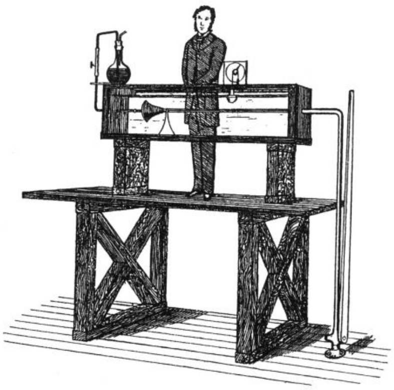
Cas fréquent du seul champ extérieur de pesanteur :

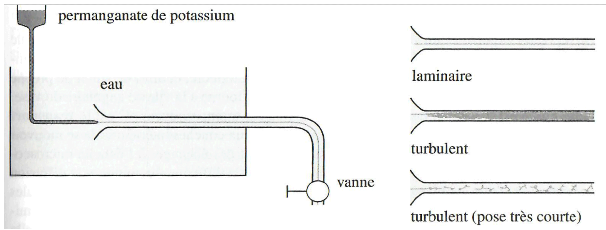
Dans le cas courant où les seules forces s'exerçant sur la particule de fluide sont les forces de pression, de viscosité et de pesanteur, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right)=-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)+\eta\Delta\vec{v}+\rho\vec{g}$$

I.2 Expérience historique de Reynolds

En 1883, Osborne Reynolds a mené une célèbre expérience illustrant les différents régimes d'écoulement, représentée ci-dessous. Un mince filet de permanganate de potassium, de couleur violette, est injecté à l'entrée d'un tube en verre dans lequel s'écoule de l'eau. Le débit volumique est réglé *via* une vanne, et le colorant permet d'observer l'écoulement dans le tube.





Reynolds constata alors deux régimes d'écoulements :

- pour de faibles débits volumiques, le filet de permanganate reste rectiligne, parallèle aux parois du tuyau horizontal, traduisant le fait que les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans se mélanger. On qualifie l'écoulement de *laminaire* ;
- pour de grands débits volumiques, le filet coloré se mélange très vite à l'eau qui l'entoure, en suivant une trajectoire désordonnée et semblant aléatoire. Les particules de fluide tourbillonnent de façon non régulière et chaotique, se coupent, voire fusionnent : on qualifie l'écoulement de *turbulent*. Il est alors impossible de prédire la vitesse du fluide en un point donné à partir de sa connaissance à un instant donné antérieur.

Bien que le débit volumique puisse être constant, l'écoulement turbulent est une réponse non stationnaire et chaotique à une excitation stationnaire et témoigne du caractère non-linéaire de l'équation de Navier-Stokes.

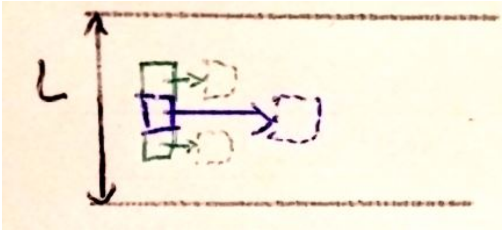
Reynolds a pu également constater que le diamètre de la conduite influençait l'écoulement et l'apparition du régime turbulent, tout comme la nature du fluide (sa viscosité). Conclusion : l'apparition de la turbulence dépend de manière couplée d'un certain nombre de paramètres. Nous allons chercher à créer une grandeur comparant ces différents paramètres, afin de prédire l'apparition du régime turbulent.

I.3 Interprétation de l'expérience de Reynolds

a Compétition entre deux modes de transport de la quantité de mouvement

Deux phénomènes physiques distincts permettent de transférer de la quantité de mouvement dans un fluide. Pour les distinguer, considérons un fluide dans une conduite cylindrique de diamètre L. On suppose qu'une seule particule de fluide possède une quantité de mouvement non nulle à un instant t. Comment est-ce que cette quantité de mouvement est transférée aux autres particules de fluide ?

.



★

- Transport de quantité de mouvement par convection : la particule de fluide met en mouvement les particules de fluide devant elle, vu que sa masse volumique ne peut pas changer (écoulement incompressible et homogène). Ce transport de quantité de mouvement se fait dans la direction de l'écoulement : on parle de transport longitudinal.
- Transport de quantité de mouvement par diffusion : la particule de fluide met en mouvement les particules de fluide situées au-dessus et en-dessous d'elle, du fait de la viscosité du fluide. Ce transport de quantité de mouvement se fait dans la direction transverse à l'écoulement : on parle de transport transversal.

⚠ Bien que la quantité de mouvement, grandeur vectorielle, soit orientée selon $\overrightarrow{e_x}$, le phénomène de diffusion se produit selon la direction transverse $\overrightarrow{e_z}$.

Ces deux modes d'écoulement qui viennent d'être mis en évidence ont des effets contraires :

- la diffusion, c'est-à-dire la viscosité, tend à homogénéiser le champ de vitesse dans un écoulement et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement laminaire. Elle est caractérisée par le terme diffusif $\eta\Delta\overrightarrow{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes ;

★

- la convection, c'est-à-dire l'inertie, tend à rendre au contraire l'écoulement plus agité (les particules se "poussent") et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement turbulent. Elle est caractérisée par le terme convectif $\rho(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}$ dans l'équation de Navier-Stokes.

b Nombre de Reynolds

Pour savoir si l'écoulement est laminaire ou turbulent, nous allons donc comparer le terme diffusif et le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes, en ordre de grandeur.

Notons L l'échelle caractéristique spatiale du problème et U l'ordre de grandeur de la vitesse dans le fluide.

En ordre de grandeur :

★

$$\frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\rho\left|\left|(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\overrightarrow{v}\right|\right|}{\eta\,||\Delta\overrightarrow{v}||} \sim \frac{\rho U^2/L}{\eta U/L^2} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

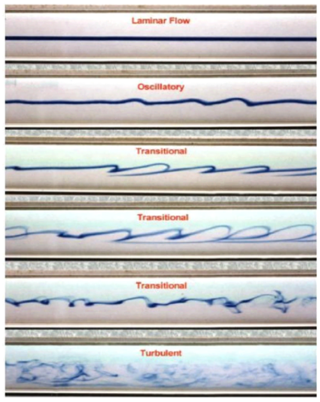
On appelle ce rapport le nombre de Reynolds.

Nombre de Reynolds

$$Re = \frac{\text{terme convectif}}{\text{terme diffusif}} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

★ Ce nombre sans dimension caractérise le régime d'écoulement :
- si $Re \ll 1$, l'écoulement est *laminaire* le transport de quantité de mouvement par diffusion domine ;
- si $Re \gg 1$, l'écoulement est *turbulent*, le transport de quantité de mouvement par convection domine.

La définition du nombre de Reynolds est générale, et ne s'applique pas qu'aux écoulements dans une conduite. Citons notamment pour des écoulements laminaires : la lubrification de pièces en mouvement, la circulation sanguines dans les capillaires, l'écoulement de roche, magma ou glacier, etc. Et pour les écoulements turbulents : l'écoulement atmosphérique, l'écoulement autour d'une aile d'avion ou d'une voiture, le jet d'eau d'un robinet, etc.



c Exemples de détermination du nombre de Reynolds

Le point délicat dans le nombre de Reynolds est bien souvent de savoir quelle longueur caractéristique L on doit prendre en compte pour calculer Re. Citons quelques exemples :

- écoulement dans une conduite cylindrique :
  ★ $L = D = 2R$
- écoulement autour d'une voiture :
  ★ $L = L_{\text{totale}}$

Exercice : À partir de quelle vitesse U l'écoulement de l'eau dans un tube de rayon $R = 5\,\text{cm}$ devient-il turbulent ? Qu'en est-il pour l'air dans les CNTP ? On donne $\eta(\text{air}) = 1.8 \times 10^{-5}\,\text{P}\ell$.

★ $U_{\text{lim}} = \dfrac{Re\eta}{\rho L} = \frac{Re\eta}{\rho(2R)} \simeq 0.02\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ pour l'eau, et $0.3\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$ pour l'air. Ainsi l'écoulement d'eau dans une conduite est rarement laminaire. On remarque aussi que plus la viscosité augmente, plus U_{lim} augmente.

Exercice : Une voiture sur l'autoroute avance à 130 km/h. L'écoulement de l'air autour de la voiture est-il laminaire ou turbulent ?

★ $U = 130\,\text{km/h} = 36\,\text{m/s}$ Donc $Re = 9.6 \times 10^{6} > 1 \times 10^{3}$: écoulement turbulent

II Exemples d'écoulements laminaires, stationnaires et incompressibles de fluides visqueux

Fiche-méthode : Déterminer le champ de vitesse $\vec{v}$ et le champ de pression P

1. Réaliser un schéma et préciser le système de coordonnées et le référentiel d'étude.
2. **Hypothèse : Ecoulement laminaire** (les lignes de courant sont bien définies). Déterminer la direction du champ de vitesse par symétries.
3. **Hypothèse : Ecoulement stationnaire**. Déterminer par invariances les variables dont dépendent $\vec{v}$ et P.

4. **Hypothèse : Ecoulement incompressible**. Si possible, simplifier davantage les variables dont dépend la vitesse $\vec{v}$ en utilisant $\text{div}(\vec{v}) = 0$.
5. Ecrire l'équation de Navier-Stokes en simplifiant les termes nuls (ce sera quasi toujours le cas de l'accélération locale et convective). Résoudre l'équation en faisant intervenir des constantes d'intégration.
6. Déterminer les conditions aux limites. Les appliquer pour déterminer les constantes d'intégration.

II.1 Écoulement de Couette plan

Définition (rappel) : Écoulement de Couette
Écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois.

Nous étudions ici un écoulement de Couette **plan**, donc on considère un fluide s'écoulant entre deux **plans** infinis parallèles, celui en $z = 0$ étant maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire, et celui en $z = h$ se translatant horizontalement à la vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0\vec{e_x}$.

Schéma.

1. Coordonnées cartésiennes. Référentiel du laboratoire galiléen.
2. On suppose l'écoulement laminaire. Par symétrie, $\vec{v} = v(x,y,z,t)\vec{e_x}$.
3. On suppose l'écoulement stationnaire et il y a invariance par translations selon $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$: $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$ et $P(z)$.
   Remarque : On parle d'écoulement parallèle (ou de cisaillement) car $\vec{v}$ est dirigé selon $\vec{e_x}$ mais ne dépend pas de x.

★

4. On suppose l'écoulement incompressible, donc $\text{div}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$: n'apporte rien de plus ici.
5. Equation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v} + \rho\vec{g}$$

<u>Annulation du terme convectif</u> :

L'écoulement étant laminaire, on a en ordre de grandeur : $Re = \dfrac{\left|\left|\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}\right|\right|}{||\eta\Delta\vec{v}||} \ll 1$, et on peut donc négliger le terme convectif devant le terme diffusif. Mais ici, vu le champ de vitesse, on a même exactement : $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = (v(z)\dfrac{\partial}{\partial x})v(z)\vec{e_x} = \vec{0}$. Donc :

$$\vec{0} = -\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z}\vec{e_z} + \eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x} - \rho g\vec{e_z}$$

En projetant sur $\vec{e_x}$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = 0 \Rightarrow v(z) = A + Bz$$

★

En projetant sur $\vec{e_z}$:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g \Rightarrow P(z) = C - \rho g z$$

(même évolution qu'en statique des fluides)

6. On détermine les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites. Par adhérence du fluide aux parois solides, en $z = 0$, $\vec{v}(z = 0) = \vec{0}$, donc $A = 0$; en $z = h$, $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$, donc $B = \dfrac{v_0}{h}$. Ainsi :

$$\vec{v} = \frac{v_0}{h}z\vec{e_x}$$

(Représenter le profil de vitesse sur le schéma.)

Remarque : On sera souvent amené à négliger la pesanteur pour les écoulements dans une direction horizontale, car la pesanteur n'influe alors que sur la pression et pas sur le champ de vitesse. Dans le cas où on néglige la pesanteur, on trouve alors que le champ de pression est uniforme.

Remarque : Le taux de cisaillement $\tau = \dfrac{\partial v_x}{\partial z} = \dfrac{v_0}{h}$ est constant dans l'écoulement de Couette plan.

Application : Force exercée par le fluide sur les plaques

On rappelle que la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface dS est : $\mathrm{d}F = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}S$ si $\vec{v} = v_x(z)\vec{e_x}$.

Déterminer la force (vectorielle) que le fluide exerce sur chacune des deux plaques de section identique S.

★

Sur la plaque du bas :

$$\vec{F}_{bas} = + \iint_{(S)} \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=0} \mathrm{d}S\vec{e_x} = \eta\frac{v_0}{h}S\vec{e_x}$$

Sur la plaque du haut :

$$\vec{F}_{haut} = - \iint_{(S)} \eta \left.\frac{\partial v_x}{\partial z}\right|_{z=h} \mathrm{d}S\vec{e_x} = -\eta\frac{v_0}{h}S\vec{e_x}$$

Exercice : On considère un fluide newtonien en écoulement laminaire, stationnaire et incompressible. Ce fluide a une hauteur h et se trouve sur une plaque infinie située en $z = 0$. Le fluide est mis en mouvement par la plaque, à laquelle on donne la vitesse $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ dans le référentiel du laboratoire. La surface en $z = h$ est au contact avec l'air à la pression atmosphérique P_0.

Déterminer le champ de vitesse et de pression dans le fluide, par analogie avec l'écoulement de Couette plan.

★

Les étapes 1, 2, 3, 4 et 5 sont identiques. Seules les conditions aux limites sont modifiées :

- en $z = 0$, par adhérence à la paroi : $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$. Donc : $A = v_0$.
- en $z = h$, la surface est libre, donc $P(z = h) = P_0$ et $\eta\dfrac{\partial v}{\partial z}(z = h) = 0 = B$

Donc : $\vec{v} = v_0\vec{e_x}$ (écoulement uniforme) et $P(z) = P_0 - \rho g(z - h)$.

II.2 Ecoulement de Poiseuille cylindrique

Définition (rappel) : Ecoulement de Poiseuille
Ecoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite.

Nous étudions ici un écoulement de Poiseuille **cylindrique**, donc on considère un fluide s'écoulant dans une conduite cylindrique d'axe (Ox), de longueur L et de rayon R. La conduite est fixe dans le référentiel du laboratoire. Pour simplifier, comme la conduite est horizontale, on néglige la pesanteur.

Schéma (indiquer : P_e, P_s et $\Delta P = P_e - P_s > 0$)

1. Coordonnées cylindriques d'axe (Ox). Référentiel du labo galiléen.
2. On suppose l'écoulement laminaire. Par symétrie, $\vec{v} = v(r,\theta,x,t)\vec{e_x}$.
3. Ecoulement stationnaire + invariance par rotation d'angle θ : $\vec{v} = v(r,x)\vec{e_x}$ et $P(r,x)$.
4. Ecoulement incompressible : $\mathrm{div}(\vec{v}) = 0 = \dfrac{\partial v}{\partial x}$. Donc, $\vec{v} = v(r)\vec{e_x}$.
5. Equation de Navier-Stokes :

$$\rho\left(\cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P) + \eta\Delta\vec{v}$$

Terme convectif : $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = (v(r)\dfrac{\partial}{\partial x})v(r)\vec{e_x} = \vec{0}$

Le formulaire d'analyse vectorielle donne l'expression du laplacien en cylindrique (début du raisonnement à savoir avec $\Delta v_x\vec{e_x}$, car même principe qu'en cartésien (vecteur $\vec{e_x}$ fixe)) :

★

$$\Delta\vec{v} = \Delta v_x\vec{e_x} \qquad \text{avec} \quad \Delta v_x = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_x}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}$$

En projection :

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= 0 \\ \frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial\theta} &= 0 \\ -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\eta}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \quad \forall r, \forall x$$

Avant de résoudre cette équation, on se propose de retrouver l'expression de l'équivalent volumique des forces de viscosité $\vec{f}_{\mathrm{v,viscosite}} = \eta\Delta\vec{v} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{e_x}$ sans utiliser de formulaire.

On considère une particule de fluide (donc infinitésimale) en coordonnées cylindriques, de volume $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}r r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x$.

Schéma de la PF avec indication des surfaces où s'appliquent les forces de viscosité

Du fait que $\vec{v}$ ne dépend que de r, seules les particules de fluide repérées en $(r+\mathrm{d}r,\theta,x)$ et (r,θ,x) influent sur le système :

★

$$\overrightarrow{\delta F} = \overrightarrow{\delta F_+} + \overrightarrow{\delta F_-} = +\eta\underbrace{(r+\mathrm{d}r)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}S(r+\mathrm{d}r)}\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r+\mathrm{d}r}\vec{e_x} - \eta\underbrace{r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x}_{=\mathrm{d}S(r)}\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r}\vec{e_x}$$

D'où :

$$\overrightarrow{\delta F} = \eta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}x\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right)\mathrm{d}r\vec{e_x} = \vec{f}_{\text{v, viscosite}}\mathrm{d}\tau$$

On identifie : $\vec{f}_{\text{v, viscosite}} = \dfrac{\eta}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial v}{\partial r}\right)\vec{e_x}$.

Nous devons désormais résoudre l'équation

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) \quad \forall r, \forall x$$

On rencontre une équation de la forme $f(x) = g(r)$, valable pour tout x et tout r. Cela signifie que les deux membres sont indépendants de r et de x et constituent une constante K.

On a alors :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = K \Longrightarrow P(x) = Kx + \text{cste}$$

Avec les conditions aux limites sur la pression :

$$P(x) = \frac{P_s - P_e}{L}x + P_e = P_e \underbrace{-\frac{\Delta P}{L}}_{=K} x$$

★

Donc :

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = K = -\frac{\Delta P}{L} \Longrightarrow r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta P r^2}{2\eta L} + A \Longrightarrow v(r) = -\frac{\Delta P}{4\eta L}r^2 + A\ln(r) + B$$

6. Conditions aux limites :
   - $v(r)$ ne diverge pas en $r = 0$: $A = 0$
   - Adhérence à la paroi solide : $v(R) = 0$: $v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L}\left(R^2 - r^2\right)$

Application : expression du débit volumique

À partir de l'expression du champ de vitesse, on peut en déduire l'expression du débit volumique :

★

$$D_\mathrm{v} = \iint_{(S)} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^R\int_0^{2\pi} v(r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L}2\pi\int_0^R (R^2 r - r^3)\mathrm{d}r = \boxed{\frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P = D_\mathrm{v}}$$

Cette formule constitue la loi de Hagen-Poiseuille, donnant le débit volumique d'un fluide visqueux en régime laminaire.

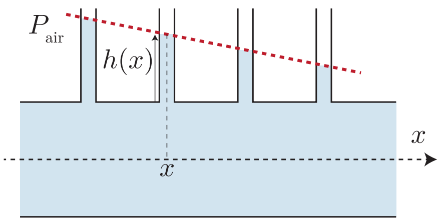
En prise de notes : **Interprétation :**

★

- Si $\frac{\Delta P}{L}$ augmente, D_v augmente : c'est le gradient de pression qui compte
- Si R augmente, D_v augemente fortement : ok
- Si η augmente, D_v diminue : la dissipation d'énergie et donc la chute de pression est due aux effets visqueux

Application : Profil de la pression

On a déjà calculé le profil de pressions : $P(x) = P(0) - \frac{\Delta P}{L}x$. On peut le visualiser simplement en connectant à la conduite cylindrique des tuyaux verticaux dans lesquels aucun écoulement n'a lieu et qui servent à visualiser la pression dans la conduite.



> **Exercice :** Justifier l'observation expérimentale, en reliant $h(x)$ à la pression dans la conduite cylindrique.
>
> ★
>
> Au sein de chaque tube vertical, le fluide est à l'équilibre mécanique et doit vérifier l'équation fondamentale de la statique des fluides. On a ainsi $P_t(z) = P_t(h) - \rho g(z-h)$. Or, au niveau de la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique P_{air}, donc $P_t(h) = P_{\text{air}}$. Donc : $P_t(z) = P_{\text{air}} - \rho g(z - h(x))$. Or en $z = 0$, la continuité de la pression implique $P_t(0) = P(x)$, avec $P(x)$ la pression au sein d'une section droite de la conduite. D'où $\rho g h = P(x) - P_{\text{air}} = P(x=0) - \frac{\Delta P}{L}x - P_{\text{air}}$, c'est-à-dire que $h(x)$ se met sous la forme $h(x) = \frac{P(x=0) - P_{\text{air}}}{\rho g} - \frac{\Delta P}{\rho g L}x$, conforme à l'observation expérimentale.

Ainsi, la pression décroit de manière affine avec la position : on parle de perte de charge régulière.

III Modèle simplifié d'écoulement parfait

Le modèle du fluide visqueux newtonien est un modèle assez complet pour décrire les écoulements de fluides réels, mais il est long de déterminer le champ de vitesse. Nous allons étudier dans cette partie un second modèle largement simplifié, mais qui s'appliquera de manière satisfaisante dans de nombreux écoulements.

III.1 Présentation du modèle

Modèle de l'écoulement parfait

Un écoulement parfait est un écoulement pour lequel on néglige tous les phénomènes de diffusion (diffusion de la quantité de mouvement par la viscosité ; diffusion thermique par conduction) devant les phénomènes de convection.

★ Donc, un écoulement parfait :
- est non visqueux : $\eta = 0$
- évolue de façon adiabatique et réversible, c'est-à-dire isentropique.

Du point de vue de la mécanique des fluides, le fait d'étudier un écoulement sans viscosité implique plusieurs conséquences :

- Les actions de contact se réduisent aux seules forces de pression.
- Les conditions aux limites sont changées, car il n'y a plus adhérence du fluide aux parois. On utilise uniquement la non pénétration du fluide dans la paroi ou la non traversée de la surface libre. Dans le cas où la paroi solide/surface libre est fixe : $\vec{v}|_{\text{paroi}} \cdot \vec{n} = 0$ avec $\vec{n}$ la normale à la paroi/surface libre.

Remarque : Dans le cas où la paroi solide ou la surface libre est mobile à la vitesse $\vec{u}$, la condition aux limites de non traversée devient : $\vec{v}|_{\text{paroi}} \cdot \vec{n} = \vec{u} \cdot \vec{n}$ avec $\vec{n}$ la normale.

L'application du PFD à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen conduit alors à l'équation :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \vec{f}_v$$

où $\vec{f}_v$ est la résultante des forces volumiques extérieures hors forces de pression s'appliquant à la particule de fluide. Cette équation porte le nom d'**équation d'Euler** (1757).

Les forces extérieures se réduisent bien souvent uniquement à la force de pesanteur. Ainsi, l'équation d'Euler se ré-écrit sous la forme :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho \vec{g}$$

III.2 Champ de vitesse dans une conduite horizontale pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible

Considérons une conduite cylindrique horizontale dans lequel s'écoule un fluide en écoulement parfait et stationnaire. Vu qu'il n'y a aucune force de viscosité (contrainte tangentielle), les particules de fluide glissent sur les parois solides. Ainsi, la vitesse est uniforme sur une section droite de l'écoulement :

★ Schéma (indiquer $\vec{v} = v\vec{e_x}$). On appelle cela un "écoulement bouchon" ou "écoulement piston" (lien avec les réacteurs pistons en chimie).
Si l'écoulement est de plus incompressible, alors le débit volumique se conserve le long de la conduite :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = vS = \text{cste} \Rightarrow v = \text{cste}$$

III.3 Champ de pression dans un écoulement parfait avec un champ de vitesse uniforme

Considérons un écoulement où la vitesse $\vec{v}(M,t) = \vec{v}_0$ est uniforme dans le référentiel terrestre. Plaçons-nous dans le référentiel en translation par rapport à celui de la Terre, à la vitesse constante $\vec{v}_0$: le fluide est immobile dans ce référentiel, galiléen. On peut alors appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans ce référentiel. Cela conduit à un champ de pression $P(z) = P_0 - \rho g z$ ((Oz) vers le haut), si la seule force volumique est celle de pesanteur.

Remarque : Cela arrivera qu'on fasse l'approximation que P = cste : cela signifie qu'on néglige la pesanteur sur la hauteur de fluide considérée (rayon conduite faible).

IV Quel modèle choisir pour décrire un écoulement réel ?

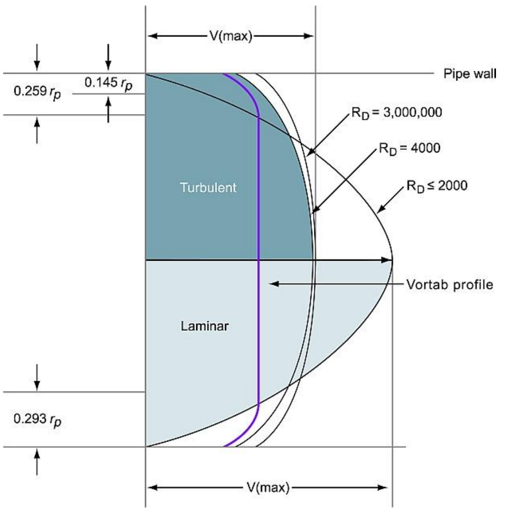
Dans ce chapitre, nous avons étudié le champ de vitesse et de pression dans un fluide en mouvement avec deux modèles différents : le modèle du fluide newtonien visqueux et le modèle du fluide parfait. Comment choisir en pratique le modèle le plus pertinent pour décrire l'écoulement d'un fluide réel ?

IV.1 Profil de vitesse issu d'une expérience

Considérons à nouveau le cas d'un écoulement dans une conduite cylindrique horizontale. Il paraît compliqué de caractériser le profil de vitesse pour n'importe quel écoulement, car celui-ci dépend a priori de :

- la vitesse moyenne U (ou du débit volumique D_v)
- des caractéristiques du fluide : ρ, η
- du diamètre de la conduite D

Pourtant, quand on fait l'expérience, on se rend compte que le profil de vitesse a une allure similaire si le nombre de Reynolds Re est identique.



Dans le cas d'un écoulement turbulent, on ne peut définir le profil des vitesses dans une section, du fait de la composante aléatoire à la fois dans le temps et l'espace de la vitesse locale. On peut cependant effectuer une moyenne temporelle, ce qui permet d'obtenir un profil régulier à symétrie de révolution, tel qu'illustré ci-contre. On n'a cependant que des lois empiriques pour exprimer $\langle v(M,t) \rangle$. Ce qui est à retenir est que globalement la vitesse est quasi-constante dans un écoulement turbulent : l'essentiel des variations se concentre sur les parois.

Schémas du profil de vitesse dans la conduite pour $Re < 2000$ et $Re > 2000$. Indiquer : "écoulement visqueux laminaire" / "proche d'un écoulement parfait, sauf près des bords".

★ Dans le cas où $Re > 2000$, le transport de la quantité de mouvement par convection domine sur la diffusion (liée à la viscosité). Pourtant, la viscosité impose d'avoir une vitesse nulle du fluide au niveau des parois de la conduite : la viscosité entraîne une variation de vitesse uniquement à proximité des parois.

Définition : couche limite

★ Zone de l'espace située proche d'un obstacle où la vitesse du fluide a des variations spatiales rapides

Cette zone de l'espace est celle où il faut prendre en compte les effets visqueux. Au-delà de cette couche limite, le fluide s'écoule de manière quasi-parfaite, c'est-à-dire que les effets de viscosité sont négligeables.

Validité du modèle de l'écoulement parfait

★ Le modèle de l'écoulement parfait décrit bien un écoulement à grande valeur de Re, hors de la couche limite.

Dans le cas où on n'a pas $Re \gg 1$ ou que l'on souhaite décrire l'écoulement dans la couche limite, alors le modèle pertinent est celui du fluide visqueux.

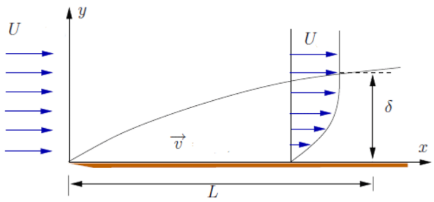
IV.2 Taille caractéristique δ de la couche limite

Dans la couche limite, le transport de quantité de mouvement se fait par diffusion depuis la paroi solide. Donc, en odg, pendant la durée L/U, la couche limite croît d'une taille :

★
$$\delta \sim \sqrt{\nu \frac{L}{U}}$$

Sachant que $Re = \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$, on en déduit :

$$\delta \sim \sqrt{\frac{\nu L^2}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}$$



Ainsi on distingue deux cas :

- soit $Re \ll 1$, dans ce cas l'épaisseur de la couche limite devient importante, et peut même dépasser L : la couche limite s'étant alors à l'intégralité du fluide ;
- soit $Re \gg 1$, dans ce cas la couche limite correspond à une petite région de l'écoulement où les effets de la viscosité sont importants. En dehors de la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables.

Exemple : Calculer l'épaisseur caractéristique de la couche limite associée à l'écoulement de l'air autour d'une voiture. On donne, pour l'air : $\eta = 1.8 \times 10^{-5}\,\mathrm{P}\ell$.

★ Prenons : $U = 130\,\mathrm{km/h}$, $L = 4\,\mathrm{m}$. On trouve : $Re = 1 \times 10^7$ et donc : $\delta \sim 1\,\mathrm{mm}$

★ Les dissipations d'énergie ont lieu à l'intérieur de cette couche limite.

Exercices

Ex. 1 Oscillation d'une plaque dans un fluide visqueux

Une plaque horizontale est animée d'un mouvement sinusoïdal de vitesse $\vec{v} = v_0 \cos(\omega t)\,\vec{e_x}$. Elle est surmontée d'un fluide visqueux (viscosité η) supposé incompressible (masse volumique ρ).

En négligeant les effets de bord, le champ des vitesses dans le fluide peut s'écrire $\vec{v}(M,t) = v_x(z,t)\,\vec{e_x}$ et le champ de pression $P(M,t) = P(z,t)$.

1. On commence par déterminer et analyser l'équation vérifiée par le champ de vitesse.
   (a) Montrer que l'accélération d'une particule de fluide s'écrit ici $\vec{a} = \dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}$.
   (b) Montrer alors que $v_x(z,t)$ doit vérifier l'équation $\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$ où $\nu = \eta/\rho$.
   (c) Quel est le mode de transfert de quantité de mouvement étudié ici ? Déterminer alors la distance caractéristique de transport de la quantité de mouvement pendant une période d'oscillation de la plaque.
2. On cherche en régime sinusoïdal forcé une solution complexe de la forme $v_x(z,t) = f(z)\ \mathrm{e}^{j\omega t}$. On posera $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\rho}}$
   (a) Montrer que la fonction $f(z)$ s'écrit :
   $$f(z) = A\ \mathrm{e}^{\frac{1+j}{\delta}z} + B\ \mathrm{e}^{-\frac{1+j}{\delta}z}$$
   avec A et B des constantes d'intégration.
   (b) Cette solution est valide dans la zone où se trouve le fluide, c'est-à-dire pour z compris entre 0 et $+\infty$. Montrer que, pour que la solution ne diverge pas, il est nécessaire que l'une des constantes d'intégration soit nulle.
   (c) Déterminer complètement la fonction $f(z)$ et donner l'expression du champ des vitesses en notation réelle. Commenter.
3. A.N. : calculer δ pour une fréquence de 500 Hz pour l'eau (viscosité à connaître) et pour la glycérine ($\eta = 2.33\,\mathrm{Pl}$ et $\rho = 1.26 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$).
4. On rappelle l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface dS : $\mathrm{d}F = \eta \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\mathrm{d}S$ si $\vec{v} = v_x(z)\vec{e_x}$. En déduire la puissance moyenne par unité de surface que doit fournir un opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

Correction de l'exercice 1

1. (a) Avec le champ de vitesse proposé :
   $$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (v_x(z,t)\frac{\partial}{\partial x})v_x(z,t)\vec{e_x} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$
   car v_x ne dépend pas de x.
   (b) Nous allons appliquer le PFD à une particule de fluide dans le référentiel du laboratoire galiléen. Pour cela, faisons un bilan des forces sur cette particule de fluide :
   - résultante des forces de pression : $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}(P)\mathrm{d}\tau = -\dfrac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}\tau\vec{e_z}$
   - poids : $-\rho g \mathrm{d}\tau\vec{e_z}$
   - résultante des forces de viscosité appliquées par la particule située au-dessus en $z+\mathrm{d}z$ et celle située en-dessous en z : $\eta\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e_x} - \eta\dfrac{\partial v_x}{\partial z}\Big|_{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\vec{e_x} = \eta\dfrac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\mathrm{d}\tau\vec{e_x}$

   Donc, on applique le PFD et on le projette directement sur l'axe $\vec{e_x}$:
   $$\rho\mathrm{d}\tau\frac{\partial v_x}{\partial t} = \eta\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\mathrm{d}\tau \Rightarrow \frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$$
   (c) On reconnaît une équation de diffusion : le mode de transfert de quantité de mouvement étudié ici est un transfert par diffusion. (On pouvait s'en douter dès la question a, car on a montré que le terme convectif de l'accélération était nul !)
   De même que dans le chapitre T3 sur la diffusion, on peut conduire une résolution en odg de cette équation. La longueur caractéristique sur laquelle s'effectue la diffusion de quantité de mouvement pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vaut : $L_c = \sqrt{\nu T} = \sqrt{\frac{\eta 2\pi}{\rho\omega}} = \sqrt{\pi}\delta$.

2. (a) Injectons cette forme de solution dans l'équation précédente :

$$f(z)j\omega\ \mathrm{e}^{j\omega t} = \nu\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2}\ \mathrm{e}^{j\omega t} \iff \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}z^2} = j\frac{\omega}{\nu}f(z) = j\frac{2}{\delta^2}f(z) \qquad \text{(Ex.1)}$$

On résout en résolvant le polynôme caractéristique associé $r^2 = \frac{2j}{\delta^2} = \frac{2}{\delta^2}\ \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$ c'est-à-dire $r = \pm\frac{\sqrt{2}}{\delta}\left(\ \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{\delta}\ \mathrm{e}^{j\frac{\pi}{4}} = \pm\frac{1+j}{\delta}$ Donc :

$$f(z) = A\ \mathrm{e}^{\frac{1+j}{\delta}z} + B\ \mathrm{e}^{-\frac{1+j}{\delta}z} \qquad \text{(Ex.2)}$$

(b) Comme f ne peut diverger, $A = 0$ nécessairement.

(c) On peut alors réécrire le champ des vitesses :

$$v_x(z,t) = B\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}}\ \mathrm{e}^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \underbrace{\Longrightarrow}_{\mathbb{R}} v_x(z,t) = v_0\ \mathrm{e}^{-\frac{z}{\delta}}\ \cos\omega t - \frac{z}{\delta} \qquad \text{(Ex.3)}$$

en se servant de la CAL en $z = 0$. On a donc une onde progressive dirigée dans le sens des z croissants, mais dont l'amplitude décroît avec une distance caractéristique δ.

3. AN : $\delta_{eau} = 2.6 \times 10^{-5}$ m et $\delta_{gly} = 1.1$ mm. La propagation est d'autant plus atténuée que la viscosité est faible.

4. La plaque subit la force de frottements visqueux $\vec{F} = \eta\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} S\vec{e_x}$. Donc la puissance associée est :

$$\mathcal{P} = \vec{F}\cdot\vec{v}(z=0) = \eta v_0\left(-\frac{1}{\delta}\ \cos\omega t + \frac{1}{\delta}\ \sin\omega t\right) S v_0\ \cos\omega t \qquad \text{(Ex.4)}$$

soit pris en moyenne, avec $\left\langle\ \cos\omega t\ \sin\omega t\right\rangle = 0$ et $\left\langle\ \cos^2\omega t\right\rangle = 1/2$:

$$\langle\mathcal{P}\rangle = -\eta v_0^2\frac{1}{2\delta}S \iff \frac{\langle\mathcal{P}_{\mathrm{op}}\rangle}{S} = +\frac{\eta v_0^2}{2\delta} \qquad \text{(Ex.5)}$$

car la puissance de l'opérateur doit compenser exactement la puissance dissipée par frottements.

Ex. 2 Ecoulement de Poiseuille plan

Un fluide homogène et incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η s'écoule entre deux portions de plans matériels, immobiles et horizontaux en $z = \pm a$. L'axe (Oz) est vertical ascendant. Les plans ont une surface S identique, avec une dimension selon y bien plus grande que a. L'écoulement est supposé stationnaire et laminaire, ce qui permet de dire que la vitesse $\vec{v}$ est selon $+\vec{e_x}$. On néglige la pesanteur.

1. Justifier que $\vec{v}$ est indépendant de x, de y et du temps t. On écrit donc : $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$.
2. (a) Déterminer l'accélération des particules de fluide en la calculant explicitement.
   (b) On souhaite justifier cette valeur de l'accélération d'une autre manière. En raisonnant sur une particule de fluide, montrer que sa vitesse reste constante au cours de son mouvement. Conclure.
3. Montrer que la pression ne dépend que de x et déterminer l'équation reliant $P(x)$ et $v(z)$.
4. En déduire que $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = -A$ avec A une constante. Déterminer alors l'expression de la puissance des forces de pression sur une particule de fluide de volume $\mathrm{d}\tau$. En déduire le signe de A.
5. On pose $v(z=0) = v_0$. Déterminer les expressions de $\vec{v}$ et de P en fonction de a, v_0, η, $P_0 = P(x=0)$, x et z.
6. Justifier l'expression de "profil parabolique" des vitesses. Représenter le profil des vitesses.
7. L'écoulement est-il irrotationnel ?
8. On donne l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface $\mathrm{d}S$: $\mathrm{d}F = \eta\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}S$ si $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$. Déterminer la force exercée par le fluide sur chacune des plaques.

Correction de l'exercice 2

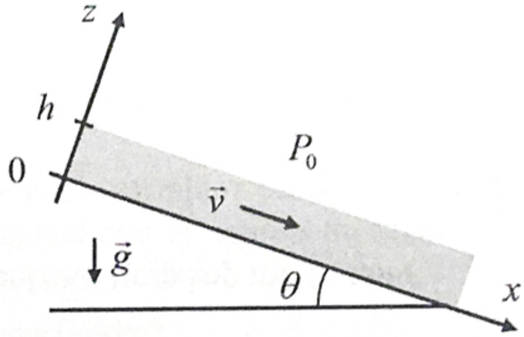
Coordonnées cartésiennes, référentiel du laboratoire galiléen.

1. Ecoulement stationnaire : $\vec{v} = v(x,y,z)\vec{e_x}$.
   Comme $y \gg a$, on considère une invariance du problème par translation selon $\vec{e_y}$ (i.e. on néglige les effets de bords selon y) : $\vec{v} = v(x,z)\vec{e_x}$.
   Ecoulement incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$. Donc, $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$.
2. (a) Accélération : $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \cancelto{\vec{0}}{\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t}} + (\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = v(z)\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial x} = \vec{0}$
   (b) On étudie un champ de vitesse $\vec{v} = v(z)\vec{e_x}$. Donc, les lignes de courant sont des droites d'équation $(y,z) = (\text{cste,cste})$. En régime stationnaire, ces lignes de courant sont confondues avec les trajectoires des particules de fluide. Ainsi, les particules de fluide ont une trajectoire rectiligne vérifiant $z = \text{cste}$: leur vitesse reste constante au cours de leur mouvement.
   Cette vitesse est bien la vitesse lagrangienne de la particule de fluide : l'accélération des particules de fluide est nulle.
3. Par invariance, on a, comme à la Q.1, $P(x,z)$.
   Navier-Stokes :
   $$\rho\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \underbrace{\eta\Delta\vec{v}}_{=\eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\vec{e_x}}$$
   En projection sur $\vec{e_z}$: $\dfrac{\partial P}{\partial z} = 0$. Donc, P ne dépend bien que de x.
   En projection sur $\vec{e_x}$: $\eta\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}$
4. Cette dernière équation étant vraie quelque que soit x et quelque soit z, on en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x} = \text{cste} = -A$.
   Puissance des forces de pression sur une particule de fluide : $\mathcal{P} = \vec{F}_p \cdot \vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P)\mathrm{d}\tau \cdot \vec{v} = Av(z)\mathrm{d}\tau$. Or, $v(z) \geqslant 0$ (écoulement selon $+\vec{e_x}$). Physiquement, les forces de viscosité tendent, du fait des parois solides, à ralentir l'écoulement de fluide : le fluide avance alors selon $+\vec{e_x}$ grâce aux forces de pressions (forces motrices) : $\mathcal{P} > 0$. Donc, $A > 0$: la pression diminue le long de l'écoulement (perte de charges régulière).
5. Donc : $\dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = -\dfrac{A}{\eta} \Rightarrow v(z) = -\dfrac{A}{2\eta}z^2 + Bz + C$ avec B et C des constantes d'intégration.
   Conditions aux limites et notation de l'énoncé :
   - En $z = a$ par adhérence : $v(a) = 0$
   - En $z = -a$ par adhérence : $v(-a) = 0$
   - En $z = 0$: $v(0) = v_0$

   On trouve : $B = 0$, $C = v_0$ et $A = \dfrac{2\eta v_0}{a^2}$. Ainsi :
   $$\vec{v} = v_0\left(1 - \frac{z^2}{a^2}\right)\vec{e_x} \qquad \text{et} \qquad P(x) = P_0 - \frac{2\eta v_0}{a^2}x$$
6. $z \to v(z)$ est un polynôme du second degré en z, d'où l'expression de profil parabolique des vitesses.
7. On a : $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) = \dfrac{\partial v}{\partial z}\vec{e_y} = -2\dfrac{v_0 z}{a^2}\vec{e_y}$. Ainsi, l'écoulement n'est pas irrotationnel (hormis en $z = 0$) (on parle d'écoulement tourbillonnaire).
   Remarque : L'interprétation physique est que si l'on place un système solide dans le fluide, il va subir une rotation autour d'un axe passant par le solide et dirigé selon $\vec{e_y}$. Cette rotation provient de la variation de la norme de la vitesse avec z (ne pas se laisser tromper par la forme rectiligne des lignes de champ).
8. Force exercée par le fluide sur la plaque en $z = -a$:
   $$\vec{F}_{\text{inf}} = +\iint_{(S)} \eta \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=-a} \mathrm{d}S\vec{e_x} = \frac{2\eta v_0 S}{a}\vec{e_x}$$
   dirigé selon $+\vec{e_x}$: conforme au sens physique.
   Force exercée par le fluide sur la plaque en $z = a$:
   $$\vec{F}_{\text{sup}} = -\iint_{(S)} \eta \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=+a} \mathrm{d}S\vec{e_x} = \frac{2\eta v_0 S}{a}\vec{e_x}$$
   dirigé selon $+\vec{e_x}$: conforme au sens physique.

Ex. 3 Ecoulement gravitaire sur un plan incliné

Une mince couche d'épaisseur h (uniforme et constante) de fluide visqueux incompressible de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η est en écoulement laminaire stationnaire sur un plan incliné d'un angle θ sur l'horizontale ; il est surmonté d'air de pression P_0.



L'équation de Navier-Stokes est :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}\, P + \eta \Delta \vec{v}$$

a) Pourquoi convient-il de chercher le profil des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$?

b) Déterminer d'abord la pression $P(x,z)$ dans le fluide.

c) Puis la fonction $v(z)$ en introduisant la viscosité cinématique $\nu = \eta / \rho$ et deux constantes d'intégration A et B

d) Justifier les conditions aux limites en $z = 0$ et $z = h$ sur $v(z)$.

e) Achever la détermination de $v(z)$, dessiner et commenter le profil des vitesses.

f) En déduire le débit volumique Q_V sur une largeur L selon $\vec{u}_y$.

Correction de l'exercice 3

Je vous mets ici le corrigé de "C. GARING, Les mille et une questions en prépa, Physique, 2e année PC/PC*, 4ème édition, Ellipses".

A noter que le corrigé détaille complètement l'origine de la condition limite en $z = h$: selon moi, on ne vous demandera pas ce niveau de détail aux concours sans vous guider. Néanmoins, comme ça, vous voyez la démonstration complète de la condition limite à l'interface fluide/air, ça ne fait pas de mal !

a) L'écoulement se fait suivant la pente, on se limite à $\vec{v} = v(x,y,z,t)\vec{u}_x$.
Il n'y a pas de dépendance en x car l'écoulement est incompressible, pas de dépendance en y par invariance par translation (plan infini selon Oy), et pas de dépendance en t pour un écoulement stationnaire, d'où $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$.

b) Toute particule de fluide a un mouvement rectiligne uniforme d'où $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ (on peut aussi dire qu'il n'y a ni accélération locale, ni accélération convective).
Navier-Stokes en projection sur Oz :

$$0 = -\rho g \cos\theta - \frac{\partial P}{\partial z} + 0 \quad \Rightarrow \quad P(x,z) = -\rho g \cos\theta\, z + C(x)$$

La condition à l'interface liquide-air s'écrit
$P(x,h) = P_0 = -\rho g \cos\theta\, h + C(x)$, et donc C et P sont indépendantes de x (pas de gradient de pression imposé dans la direction de l'écoulement)

d'où $\boxed{P(z) = P_0 + \rho g \cos\theta (h - z)}$

c) Navier-Stokes en projection sur Ox avec $P(z)$:

$$0 = \rho g \sin\theta - 0 + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{g}{\nu}\sin\theta$$

d'où $v(z) = -\frac{g}{\nu}\sin\theta \frac{z^2}{2} + Az + B$

d) En $z=0$, le fluide adhère au plan incliné fixe : $\boxed{v(0)=0}$

En $z=h$, considérons un élément de surface dS du fluide d'épaisseur nulle et donc de masse nulle ($dm=0$) en contact avec l'air ; la relation fondamentale de la dynamique appliquée à cet élément s'écrit :

$$\cancel{dm}\vec{a}=\vec{0}=\cancel{dm}\,\vec{g}+(P(h)-P_0)dS\,\vec{u}_z+d\vec{F}_{eau}+d\vec{F}_{air}$$

- d'où sur $\vec{u}_z$: $P(h)=P_0$, la pression est continue en surface
- $d\vec{F}$ sont les forces surfaciques de viscosité exercées par l'air et l'eau sur l'élément dS : $d\vec{F}_{air}\approx\vec{0}$ car la viscosité dynamique de l'air est très faible (l'air n'a pas d'action sur l'écoulement du fluide), on déduit donc $d\vec{F}_{eau}\approx\vec{0}$

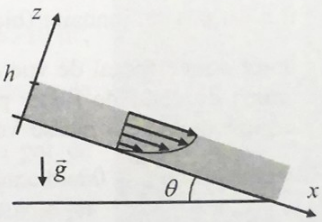
or $d\vec{F}_{eau}=-\eta\left.\dfrac{dv}{dz}\right|_{z=h}dS\,\vec{u}_x$ (signe – car du bas vers le haut) et $\eta\neq 0$

d'où $\boxed{\left.\dfrac{dv}{dz}\right|_{z=h}=0}$

e) Les conditions aux limites donnent $A=\dfrac{g\sin\theta}{\nu}h$ et $B=0$, d'où le profil :

$$\boxed{v(z)=\frac{g\sin\theta}{\nu}z(h-\frac{z}{2})}$$

Il s'agit d'un profil hémi-parabolique classique d'un écoulement de Poiseuille avec ses conditions aux limites spécifiques.



f) Le débit volumique est $Q_V=\int_0^h v(z)Ldz$; il vient $\boxed{Q_V=\dfrac{g\sin\theta\, h^3L}{3\nu}}$

Ex. 4 Ecoulement de Couette cylindrique

On considère l'écoulement d'un fluide incompressible de viscosité η entre deux cylindres verticaux de hauteurs $h=15\,\text{cm}$ concentriques de rayons $R_1=4.8\,\text{cm}$ et $R_2=5.0\,\text{cm}$. On appelle (Oz) l'axe commun des cylindres, dirigé vers le haut. Le cylindre intérieur est mis en rotation à la vitesse angulaire ω constante, alors que le cylindre extérieur est maintenu fixe dans le référentiel du laboratoire. On suppose que l'écoulement est laminaire et stationnaire. On se place dans le référentiel du laboratoire.

En coordonnées cylindriques, pour un vecteur $\vec{A}=A(r)\vec{e_\theta}$, on donne le laplacien vectoriel : $\Delta\vec{A}=\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\dfrac{\partial(rA)}{\partial r}\right)\vec{e_\theta}$

1. Justifier que, en coordonnées cylindriques, la vitesse dans le fluide peut s'écrire $\vec{v}=v(r)\vec{e_\theta}$.
2. Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.
3. En déduire le champ de vitesse dans tout le fluide. (On ne cherchera pas à le représenter, pour une fois.)

Correction de l'exercice 4

1. L'écoulement est laminaire. Par symétrie du problème : $\vec{v}=v(r,\theta,z,t)\vec{e_\theta}$.
   Ecoulement stationnaire : $\vec{v}=v(r,\theta,z)\vec{e_\theta}$
   Invariance par rotation d'angle θ et par translation selon $\vec{e_z}$ ($h\gg R_2-R_1$: donc entre les deux cylindres, on peut négliger les effets de bords selon z) : $\vec{v}=v(r)\vec{e_\theta}$
   Remarque : L'hypothèse d'écoulement incompressible permet seulement d'aboutir à $\dfrac{\partial v}{\partial\theta}=0$, ce qui n'apporte rien de plus ici.
2. Accélération : $\vec{a}=\underbrace{\cancel{\dfrac{\partial\vec{v}}{\partial t}}}_{\vec{0}}+(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}=\dfrac{v(r)}{r}\dfrac{\partial v(r)\vec{e_\theta}}{\partial\theta}=-\dfrac{v(r)^2}{r}\vec{e_r}$.
3. De même qu'à la Q.1, par invariance : $P(r,z)$

Navier-Stokes dans le référentiel du laboratoire galiléen :

$$-\frac{\rho v(r)^2}{r}\vec{e_r} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) + \eta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial(rv(r))}{\partial r}\right)\vec{e_\theta} + \rho\vec{g}$$

On projette selon $\vec{e_\theta}$: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}(rv(r))}{\mathrm{d}r}\right) = 0$. On intègre deux fois :

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rv(r))}{\mathrm{d}r} = A \Rightarrow rv(r) = \frac{Ar^2}{2} + B \Rightarrow v(r) = A'r + \frac{B}{r}$$

avec A' et B des constantes d'intégration.
Conditions aux limites :

- En $r = R_1$: Par adhérence : $v(R_1) = R_1\omega$
- En $r = R_2$: Par adhérence : $v(R_2) = 0$

On trouve, après calcul :

$$A' = -\frac{R_1^2\omega}{R_2^2 - R_1^2} < 0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{R_1^2R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2} > 0$$

et donc $\vec{v} = (A'r + \dfrac{B}{r})\vec{e_\theta}$

Ex. 5 Viscosimètre de Couette cylindrique

On considère l'écoulement d'un fluide d'huile d'olive de viscosité η entre deux cylindres verticaux de hauteurs $h = 15\,\text{cm}$ concentriques de rayons $R_1 = 4.8\,\text{cm}$ et $R_2 = 5.0\,\text{cm}$. Un moteur permet de faire tourner le cylindre intérieur à une vitesse angulaire $\omega = 3$ tours par seconde. On mesure alors le couple nécessaire pour maintenir le cylindre extérieur fixe : $C = 9.4 \times 10^{-2}\,\text{N m}$.

On rappelle l'expression de la force de viscosité élémentaire s'exerçant entre deux particules de fluide en contact sur la surface $\mathrm{d}S$: $\mathrm{d}F = \eta\dfrac{\partial v}{\partial r}\mathrm{d}S$ si $\vec{v} = v(r)\vec{e_\theta}$.

1. On donne la forme de la norme du champ de vitesse dans cet écoulement (coordonnées cylindriques) :

$$||\vec{v}|| = Ar + \frac{B}{r}$$

   avec A et B des constantes. Déterminer les constantes A et B et en déduire l'expression de la vitesse dans tout le fluide.
2. En déduire le moment scalaire sur l'axe de rotation, exercé par le fluide sur le cylindre extérieur, en fonction de la viscosité dynamique η, de la vitesse de rotation ω et des dimensions du dispositif.
3. Calculer la viscosité η du fluide.

Correction de l'exercice 5

1. CL en $r = R_1$: $AR_1 + \frac{B}{R_1} = R_1\omega$
   CL en $r = R_2$: $AR_2 + \frac{B}{R_2} = 0$
   On trouve, après calcul :

$$A = -\frac{R_1^2\omega}{R_2^2 - R_1^2} < 0 \qquad \text{et} \qquad B = \frac{R_1^2R_2^2\omega}{R_2^2 - R_1^2} > 0$$

2. Etablissons la force élémentaire exercée par le fluide sur une surface $\mathrm{d}S = R_2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ du cylindre extérieur. Supposons un instant que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} > 0$: le cylindre tournerait plus vite que la fluide. Donc, le fluide freine le cylindre :

$$\overrightarrow{\delta F_v} = -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}R_2\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\vec{e_\theta}$$

   Donc, le moment élémentaire de la force de viscosité le long de l'axe $(0, \vec{e_z})$ exercée sur le cylindre extérieur est :

$$\delta M_\Delta = (R_2\vec{e_r} \wedge \overrightarrow{\delta F_v}) \cdot \vec{e_z} = -\eta R_2^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

   On intègre alors les moments élémentaires sur toute la surface du cylindre extérieur : $M_\Delta = -2\pi\eta hR_2^2\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_2} = +4\pi\eta h\frac{R_1^2R_2^2\omega}{R_2^2-R_1^2}$

3. TMC au cylindre extérieur autour de l'axe fixe $(O,\overrightarrow{e_z})$ dans le référentiel du labo galiléen : $0 = -C + M_\Delta$
Donc :
$$\eta = \frac{C(R_2^2 - R_1^2)}{4\pi h R_1^2 R_2^2 \omega}$$
A.N. : $\eta = 9.0 \times 10^{-2}\,\mathrm{P}\ell$

Validation :

- La viscosité trouvée est supérieure à celle de l'eau, ce qui est cohérent avec le fait qu'on étudie de l'huile d'olive.
- Plus C est grand, plus η est grand : logique, les forces de viscosité sont plus importantes.

Ex. 6 (*D'après Centrale PC 2024*) Propagation de la houle

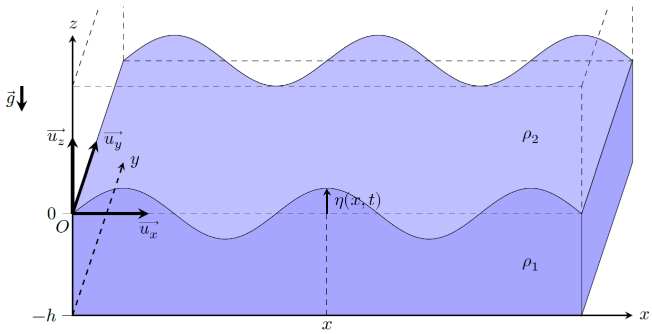
L'objectif de cet exercice est d'établir la relation de dispersion de la houle, onde mécanique se propageant dans l'eau de mer.

L'eau (fluide (1)) et l'air (fluide (2)) sont considérés comme des fluides parfaits, homogènes et incompressibles, de masses volumiques respectives ρ_1 et ρ_2.

L'espace est rapporté à un repère de coordonnées cartésiennes $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$. À l'état de repos, l'eau occupe l'espace compris entre $z = 0$ et $z = -h$ et qui est infini selon les directions Ox et Oy ; la quantité $h > 0$ désigne la hauteur d'eau au repos par rapport au fond solide. L'eau est surmontée de l'air atmosphérique. Au repos, l'air atmosphérique est immobile.

On supposera pour simplifier que les écoulements dans l'air et l'eau sont invariants par toute translation selon Oy et que le mouvement des fluides s'effectue parallèlement à un plan vertical. Ainsi, le champ de vitesse dans l'eau s'écrit $\overrightarrow{v}_1 = u_1(x,z,t)\overrightarrow{e_x} + w_1(x,z,t)\overrightarrow{e_z}$ et le champ de vitesse dans l'air s'écrit $\overrightarrow{v}_2 = u_2(x,z,t)\overrightarrow{e_x} + w_2(x,z,t)\overrightarrow{e_z}$. La surface à l'air libre de l'eau, d'équation $z = 0$ au repos, présente alors une petite déformation et on note $\eta(x,t)$ le déplacement vertical du point d'abscisse x par rapport à la position de repos.

On suppose de plus que les écoulements dans les deux fluides sont irrotationnels ce qui permet de définir les potentiels des vitesses $\varphi_1(x,z,t)$ et $\varphi_2(x,z,t)$ tels que $\overrightarrow{v}_1 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi_1)$ et $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi_2)$.



1. En tenant compte de l'incompressibilité des fluides, montrer que $\Delta\varphi_1 = 0$ et $\Delta\varphi_2 = 0$.
2. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{v}_1$ en fonction de φ_1. Déduire d'une condition limite satisfaite en $z = -h$ par le champ des vitesses une condition sur la fonction φ_1.
3. Exprimer les composantes de $\overrightarrow{v}_2$ en fonction de φ_2. Déduire d'une condition limite lorsque $z \to +\infty$, en supposant l'état de l'air non perturbé loin de la surface de l'eau, des conditions limites sur la fonction φ_2.
4. La coordonnée verticale $z_s(x,t)$ des points situés sur la surface vérifie $z_s(x,t) = \eta(x,t)$. Lors de petites oscillations, leur vitesse verticale $w_i(x,\eta(x,t),t)$ peut être assimilée à $w_i(x,0,t)$ où $i \in \{1,2\}$. Dans chaque milieu i, on peut alors écrire l'égalité $w_i(x,0,t) = \dfrac{\partial \eta}{\partial t}$. Déduire de cette égalité deux équations au premier ordre, l'une faisant intervenir η et φ_1, l'autre η et φ_2.

On cherche les solutions en régime permanent de l'ensemble des équations précédentes sous forme de représentations complexes :

$$\underline{\varphi_1}(x,z,t) = \underline{\Phi_1}(z)\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \qquad \underline{\varphi_2}(x,z,t) = \underline{\Phi_2}(z)\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \qquad \text{et} \qquad \underline{\eta}(x,z,t) = \eta_m\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$$

où $j^2 = -1$, ω et k sont des constantes réelles positives, $\underline{\Phi_1}(z)$ et $\underline{\Phi_2}(z)$ sont des fonctions de la variable z a priori complexes et l'amplitude η_m est une constante réelle non nulle.

5. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\underline{\Phi_2}(z)$. En déduire la solution $\underline{\Phi_2}(z)$ uniquement en fonction de k, z et de la constante $\underline{\Phi_2^0} = \underline{\Phi_2}(z=0)$ en tenant compte d'une condition limite établie précédemment.
6. Établir l'équation différentielle satisfaite par $\underline{\Phi_1}(z)$. En déduire que $\underline{\Phi_1}(z) = \underline{\Phi_1^0}\cosh(k(z+h))$ où la constante $\underline{\Phi_1^0} = \dfrac{\underline{\Phi_1}(z=0)}{\cosh(kh)}$ en tenant compte d'une condition limite établie précédemment.
7. Montrer que les deux équations établies à la question Q 4, traduisant les propriétés de la surface de séparation, conduisent aux deux égalités :

$$-k\underline{\Phi_2^0} = j\omega\eta_m \qquad \text{et} \qquad k\sinh(kh)\underline{\Phi_1^0} = j\omega\eta_m$$

On admet que la continuité de la pression à l'interface permet d'écrire :

$$\rho_1\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}(x,0,t) + g\eta(x,t)\right) = \rho_2\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}(x,0,t) + g\eta(x,t)\right)$$

8. Etablir alors la relation suivante :

$$\rho_1\left(\frac{(j\omega)^2}{\tanh(kh)} + kg\right) = \rho_2\left(kg - (j\omega)^2\right)$$

9. Le rapport des masses volumiques vérifiant $\rho_2/\rho_1 \ll 1$, montrer que la relation de dispersion de l'onde associée à la houle s'écrit :

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)$$

10. On parle de houle en eau profonde lorsque $kh \gg 1$. Simplifier dans ce cas la relation de dispersion précédente, puis calculer la vitesse de phase et la vitesse de groupe en fonction de g et k. Indiquer, en justifiant, si le phénomène de propagation est dispersif.

Correction de l'exercice 6

1. Ecoulement incompressible : $\mathrm{div}(\vec{v}_1) = 0 = \mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi_1)) = \Delta\varphi_1$. De même : $\Delta\varphi_2 = 0$.
2. ***Remarque :*** Attention : le lien entre $\vec{v}_1$ et φ_1 n'est pas exactement le même qu'au chapitre MF1 : changement de signe (qui n'impacte en rien la physique du problème, impacte juste les équations).
   En projection sur $\vec{e_x}$ et $\vec{e_z}$, on trouve : $u_1(x,z,t) = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}$ et $w_1(x,z,t) = \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}$.
   Le fluide étant parfait, la seule condition limite en $z = -h$ est l'impénétrabilité de la surface solide : $w_1(x,z = -h,t) = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x,z=-h,t) = 0$
3. $u_2(x,z,t) = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}$ et $w_2(x,z,t) = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}$.
   Loin de la surface de l'eau, l'air reste au repos : $u_2(x,z\to+\infty,t) = 0 = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial x}(x,z\to+\infty,t)$ et $w_2(x,z\to+\infty,t) = 0 = \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x,z\to+\infty,t)$.
4. D'après les Q.2 et 3 : $\dfrac{\partial\varphi_1}{\partial z}(x,0,t) = \dfrac{\partial\eta}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial\varphi_2}{\partial z}(x,0,t) = \dfrac{\partial\eta}{\partial t}$.
5. On utilise $\Delta\varphi_2 = 0 = \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\varphi_2}{\partial z^2}$. En injectant la solution proposée :

$$(-jk)^2\underline{\Phi_2}(z) + \frac{\mathrm{d}^2\underline{\Phi_2}}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

   On résout cette équation différentielle d'ordre 2 à coefficients constants avec l'équation caractéristique et on obtient :

$$\underline{\Phi_2}(z) = A\,\mathrm{e}^{kz} + B\,\mathrm{e}^{-kz}$$

   avec A et B des constantes.
   Condition limite en $z\to+\infty$: $A = 0$
   Donc : $\underline{\Phi_2}(z) = \underline{\Phi_2^0}\,\mathrm{e}^{-kz}$.
6. De même qu'à la question précédente, on a

$$(-jk)^2\underline{\Phi_1}(z) + \frac{\mathrm{d}^2\underline{\Phi_1}}{\mathrm{d}z^2} = 0$$

La résolution conduit donc aussi à :

$$\underline{\Phi_1}(z) = C\ \mathrm{e}^{kz} + D\ \mathrm{e}^{-kz}$$

avec C et D des constantes.
Condition limite en $z = -h$: $\dfrac{\mathrm{d}\underline{\Phi_1}}{\mathrm{d}z}(x, -h, t) = 0 = k(C\ \mathrm{e}^{-kh} - D\ \mathrm{e}^{kh})$. Donc : $D = C\ \mathrm{e}^{-2kh}$.
Ainsi :

$$\underline{\Phi_1}(z) = C\left(\mathrm{e}^{kz} + \mathrm{e}^{-k(z+2h)}\right) = C\ \mathrm{e}^{-kh}\left(\mathrm{e}^{k(z+h)+}\ \mathrm{e}^{-k(z+h)}\right) = 2C\ \mathrm{e}^{-kh}\cosh(k(z+h))$$

En $z = 0$: $\underline{\Phi_1}(0) = 2C\ \mathrm{e}^{-kh}\cosh(kh) \Rightarrow 2C\ \mathrm{e}^{-kh} = \dfrac{\underline{\Phi_1}(0)}{\cosh(kh)}$. On obtient le résultat fourni :

$$\underline{\Phi_1}(z) = \underline{\Phi_1^0}\cosh(k(z+h))$$

7. On a :

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}(x,0,t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\Phi_1}}{\mathrm{d}z}(z=0) = j\omega\eta_m \Rightarrow k\underline{\Phi_1^0}\sinh(kh) = j\omega\eta_m$$

   On a aussi :

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z}(x,0,t) = \frac{\partial \eta}{\partial t} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\underline{\Phi_2}}{\mathrm{d}z}(z=0) = j\omega\eta_m \Rightarrow -k\underline{\Phi_2^0} = j\omega\eta_m$$

8. Avec les fonctions d'onde proposées, on a déjà

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x,z=0,t) = \underline{\Phi_1}(z=0)j\omega\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} = j\omega\underline{\Phi_1^0}\cosh(kh)\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$$

   et

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x,z=0,t) = j\omega\underline{\Phi_2^0}\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$$

   En utilisant les relations de la Q.7, on en déduit que

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(x,z=0,t) = j\omega\cosh(kh)\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \times \frac{j\omega\eta_m}{k\sinh(kh)} = \frac{(j\omega)^2\eta_m\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}}{k\tanh(kh)}$$

   et

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial t}(x,z=0,t) = -\frac{(j\omega)^2}{k}\eta_m\ \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$$

   En injectant ces relations dans l'équation fournie, on aboutit à :

$$\rho_1\left(\frac{(j\omega)^2\eta_m}{k\tanh(kh)} + g\eta_m\right) = \rho_2\left(-\frac{(j\omega)^2}{k}\eta_m + g\eta_m\right) \Rightarrow \rho_1\left(\frac{(j\omega)^2}{\tanh(kh)} + kg\right) = \rho_2\left(kg - (j\omega)^2\right)$$

9. On peut ré-écrire la relation obtenue à la question précédente comme :

$$kg(\rho_1 - \rho_2) - \omega^2\left(\frac{\rho_1}{\tanh(kh)} + \rho_2\right)$$

   Or, $\rho_2 \ll \rho_1$ et $\tanh(kh) < 1$. Donc, $\rho_2 \ll \dfrac{\rho_1}{\tanh(kh)}$. Ainsi, on aboutit à :

$$\rho_1\left(\frac{-\omega^2}{\tanh(kh)} + kg\right) = 0 \Rightarrow \omega^2 = gk\tanh(kh)$$

10. En eau profonde, $\omega^2 = gk \Rightarrow \omega = \sqrt{gk}$.
    Vitesse de phase : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k} = \sqrt{\dfrac{g}{k}}$
    Vitesse de groupe : On différentie la relation de dispersion : $2\omega\mathrm{d}\omega = g\mathrm{d}k$. Donc : $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \dfrac{g}{2\omega} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{g}{k}} = \dfrac{1}{2}v_\varphi$.
    La vitesse de phase dépend de k : le phénomène de propagation est dispersif.