Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 15.

Exercice 1. Soient $(E, \langle\, , \,\rangle)$ un espace préhilbertien réel, $\|\ \|$ la norme associée au produit scalaire, et $\ell \in E$.

• On dit qu'une suite (u_n) de vecteurs de E converge *faiblement* vers ℓ si, pour tout $v \in E$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \langle u_n, v \rangle = \langle \ell, v \rangle$.

Dans ce cas, on dit que ℓ est la *limite faible* de la suite (u_n).

1. Montrer qu'une suite (u_n) de E ne peut avoir qu'une seule limite faible.

2. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$, alors (u_n) converge faiblement vers ℓ.

3. Montrer que si (u_n) converge faiblement vers ℓ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\| = \|\ell\|$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

4. Dans cette question, E est de dimension finie. Montrer si (u_n) converge faiblement vers ℓ, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - \ell\| = 0$.

Exercice 2. On pose : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{2} P(k)Q(k)$.

1. Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Déterminer une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ muni de ce produit scalaire.

Exercice 3. Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On pose : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

1. Montrer que $(\,|\,)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans le cas $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, déterminer une base orthogonale pour $(\,|\,)$.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

Vérifier que $(E, \langle\, , \,\rangle)$ est un espace préhilbertien réel. Calculer la norme de la fonction constante égale à 1 sur $[-1,1]$.

Exercice 5. Soient u et v deux vecteurs d'un espace préhilbertien. Montrer que $u \perp v \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$, $\|u + tv\| \geq \|u\|$.

Exercice 6. *Cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.* Soit E un espace préhilbertien réel.
Soient $u \in E \setminus \{0\}$ et $v \in E$ tels que $|\langle u, v \rangle| = \|u\|\,\|v\|$.
1. Montrons par analyse-synthèse que v est colinéaire à u :

1. a. *Analyse.* Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $v = ku$. Montrer que $k = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2}$.

1. b. *Synthèse.* Montrer que $v = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u$ en vérifiant que $\|v - \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|u\|^2} u\|^2 = 0$.

2. Soient $u \in E \setminus \{0\}$ et $v \in E$ tels que $\langle u, v \rangle = \|u\|\,\|v\|$. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $v = ku$.

3. *Application.* Déterminer $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = n$ et $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = n$.

Exercice 7. Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{F} = \{e_1, \dots, e_n\}$ une famille de vecteurs unitaires telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow \|e_i - e_j\| = 1.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. On pose : $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \leq u_{n-1}.\, u_{n+1}$.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$.
On rappelle que $(E, \langle\, , \,\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $u_n(x) = (x^2-1)^n$, $x \in [-1,1]$ et $p_n = u_n^{(n)}$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de u_n).
Vérifier que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\, , \,\rangle)$.

Exercice 10. On munit $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{T}$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que $\mathcal{T}$ est sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et calculer la distance de A à $\mathcal{T}$.

Exercice 11. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel.
1. Prouver que $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.

2. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la distance de A à $S_n(\mathbb{R})$.

3. Déterminer $\mathrm{Vect}(I_n)^\perp$.

Exercice 12. **1.** Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$ en posant :

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_3[X]^2,\ (P|Q) = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)(1+x^2)\, dx.$$

2. Déterminer une base orthogonale pour $(\,|\,)$ du sev $\mathbb{R}_2[X]$, et calculer la distance de $X^3 + 1$ à $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur l'hyperplan H d'équation cartésienne : $x - y + z - t = 0$.

Exercice 14. Soient $(E, (|))$ un eve, a un vecteur unitaire de E, et p la projection orthogonale sur l'hyperplan $\text{Vect}(a)^{\perp}$. Montrer que pour tout $(u, v) \in E^2$, $(p(u)|p(v)) = (u|v) - (a|u)(a|v)$.

Exercice 15. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de son produit scalaire usuel. Soit $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$.

1. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et préciser sa dimension. Déterminer $H^{\perp}$.

2. Soit J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer la distance $d(J, H)$.

Exercice 16. $\mathbb{R}_n[X]$ est muni du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ défini par : $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.

Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = 0\}$.

1. Vérifier que $\langle\, ,\, \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Vérifier que H est un sous-espace vectoriel de E. Déterminer $H^{\perp}$ et calculer la distance du polynôme X à H.

Exercice 17. Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, E un eve de dimension n et $e_1, \cdots, e_p$ p vecteurs unitaires tels que $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2$.

1. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthonormée de E.
2. Préciser $(\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p))^{\perp}$. En déduire que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de E (et donc que $p = n$).

Exercice 18. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0.$$

1. Soit $(u, v) \in E^2$. Vérifier que $u + v \perp u - v \Leftrightarrow \|u\| = \|v\|$.

2. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de E. Montrer que $\|f(e_1)\| = \|f(e_2)\| = \cdots = \|f(e_n)\|$.

3. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \lambda \|x\|$.

Exercice 19. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (ax + b))^2\, dx$.

Exercice 20. **1.** On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}$. Justifier l'existence de I_n et calculer I_n.

2. Calculer $\displaystyle\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^{+\infty} (x^4 - (ax + b))^2 e^{-x}\, dx$.

Indication : Interpréter cette borne inférieure comme la distance d'un vecteur à un sous-espace d'un eve.

Exercice 21. $\mathbb{R}^4$ est muni de son produit scalaire usuel. Soit $u = (1, -1, 1, 1)$ et $v = (5, 1, -3, 3)$. Déterminer la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$, de la projection orthogonale sur le plan P engendré par u et v.

Exercice 22. On munit $\mathbb{R}^2$ de son produit scalaire usuel. Soit $D = \text{Vect}((\alpha, \beta))$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à la droite D dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
Vérifier que la matrice obtenue est bien une matrice orthogonale dont le déterminant est égal à -1.

Exercice 23. Soient E un espace euclidien, $u \in E \setminus \{0_E\}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et $f \in \mathcal{L}(E)$ défini par : $\forall x \in E,\ f(x) = x - \lambda \langle x, u \rangle u$.
Montrer qu'il existe un seul réel λ tel que $f \in O(E)$ et reconnaître l'isométrie f.

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit f une isométrie vectorielle de E et $g = Id_E - f$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} g \subset (\operatorname{Im} g)^{\perp}$ puis que $\operatorname{Ker} g = (\operatorname{Im} g)^{\perp}$.

2. Soit $x \in E$. Soit y (resp. z) la projection orthogonale de x sur $\operatorname{Ker} g$ (resp. $\operatorname{Im} g$). Soit $t \in E$ tel que $z = t - f(t)$.

a. On pose : $S_n(x) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f^k(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $S_n(x) = y + \dfrac{1}{n}(t - f^n(t))$.

b. Prouver que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = y$.

Exercice 25. On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel noté $(|)$. On note $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$ et $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ canoniquement associé à A et $u = e_1 + \cdots + e_n$. Calculer $(f(u)|u)$.
2. En déduire que $|S_n| \leq n$.

Exercice 26. Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Prouver avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathbb{R}^{n^2}$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$.

Exercice 27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$ tels que $A^p = I_n$. Prouver que si p est pair, $A^2 = I_n$ et que si p est impair, $A = I_n$.

Exercice 28. Déterminer toutes les matrices $A \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + 2A - 3I_n = 0$.

Exercice 29. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A\, A^T A = I_n$.

1. Montrer que A est symétrique.

2. Montrer que $A = I_n$.

Exercice 30. Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A.

Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2$.

Exercice 31. Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$, et $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres non nécessairement distinctes de A.

Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que ${}^tXX = 1$. Montrer que $\min\limits_{k\in\{1,\cdots,n\}} \lambda_k \leq {}^tXAX \leq \max\limits_{k\in\{1,\cdots,n\}} \lambda_k$.

Exercice 32. Soit E un eve. Soit $f \in S(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$. Prouver que f est l'endomorphisme nul.

Exercice 33. Soit E un eve. Soit $f \in S(E)$. Prouver que $\operatorname{Ker}(f \circ f) = \operatorname{Ker} f$.

Exercice 34. Soit α (resp. β) la plus petite (resp. grande) valeur propre d'un endomorphisme symétrique f d'un eve E. Montrer que $\forall x \in E$, $\alpha\|x\|^2 \leq \langle f(x), x \rangle \leq \beta\|x\|^2$.

Exercice 35. Soit $(E, (|))$ un espace vectoriel euclidien et $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de E.

1. Vérifier que l'on définit bien un endomorphisme f de E en posant : $\forall x \in E$, $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}(x|u_k)u_k$.

2. Montrer que f est un endomorphisme auto-adjoint de E et que ses valeurs propres sont strictement positives.

3. Justifier que f est bijective et montrer que f^{-1} est un endomorphisme auto-adjoint de E.

Exercice 36. Soit E un espace vectoriel euclidien et f un endomorphisme autoadjoint de E. Prouver que $\operatorname{Im} f = (\operatorname{Ker} f)^{\perp}$.

Exercice 37. Soient $U \in O_n(\mathbb{R})$ et $A = \frac{1}{2}(U + U^{-1})$.

Montrer que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que le spectre de A est inclus dans $[-1, 1]$.