Spé PC. Année 2024-2025. Feuille d'exercices de mathématiques n° 16.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{y-x}$ si $x \neq y$ et $f(x,y) = 0$ si $x = y$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x+x^2)$. En déduire que f n'est pas continue en $(0,0)$.

2. Etudier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercice 2. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 3. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.

3. Montrer que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
Cette application est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f admet des dérivées partielles premières en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$.
Cette application est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = (x^2+y^2)^a \sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > 0$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ si et seulement si $a > 1$.

Exercice 7. Soit $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, R_1 < \sqrt{x^2+y^2} < R_2\}$ avec $0 < R_1 < R_2$.

1. Vérifier que Ω est un ouvert non convexe de $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y) \in \Omega$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. Montrer que la fonction f est constante sur Ω.

Indication : utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 8. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $f(1,1) = a$ et $f(2,3) = b$. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(1+t, 1+2t)\, dt + 2\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(1+t, 1+2t)\, dt$.

Exercice 9. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$. Montrer que :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\; f(x,y,z) = f(0,0,0) + x\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(tx,ty,tz)\, dt + y\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(tx,ty,tz)\, dt + z\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial z}(tx,ty,tz)\, dt.$$

Exercice 10. Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \, \forall t > 0, \; f(tx,ty) = t^r f(x,y)$$

Montrer que f est homogène de degré r si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y)$.

Exercice 11. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, $f(x+t, y+t, z+t) = f(x,y,z)$.
Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$.

Exercice 12. Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ si :

1. $g(x,y) = f(y,x)$, **2.** $g(x,y) = f(2x,3y)$, **3.** $g(x,y) = xyf(xy,x^2)$, **4.** $g(x,y) = f(y, f(x,x))$, **5.** $g(x,y) = f(f(x,y), f(y,x))$.

Exercice 13. Soient D (resp. U) le disque fermé (resp. ouvert) de centre $(0,0)$ et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1, et f une application continue de D dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall (x,y) \in \mathcal{C}$, $f(x,y) = 0$.
Prouver qu'il existe dans U un point critique de f.

Exercice 14. Justifier que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto (x-y)^2 + (x+y)^3$ n'a pas d'extremum local.

Exercice 15. Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto xy + x^3y^2$.

Exercice 16. Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = -x^2 - xy - y^2 + 3y - 2$.
Montrer que f admet un maximum global strict sur $\mathbb{R}^2$ que l'on calculera.

Exercice 17. Déterminer les extrema locaux de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x,y,z) \mapsto x^3 - z^3 + 3y^2 - 6xy - 9x + 12z$.

Exercice 18. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \le y \le x \le 1\}$ et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = (x - y)^3 + 6xy$.
On remarquera que la frontière de D est le triangle de sommets $A(1, 1)$, $B(1, -1)$ et $C(-1, -1)$.
1. Justifier que f est bornée sur D et atteint ses bornes dans D.
On note $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$ et $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x, y)$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Calculer m et M.
Exercice 19. Soit $T = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 / x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le \pi\}$. Existence et calcul de $\max\limits_{(x,y)\in T} \sin x \cdot \sin y \cdot \sin(x + y)$.
Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \ne (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.
1. Justifier que f est continue en $(0, 0)$.
2. a. Montrer que f admet deux dérivées partielles premières en tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$. *Distinguer $(x, y) = (0, 0)$ et $(x, y) \ne (0, 0)$.*
2. b. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?
Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0, 0) = 0$ et $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$. Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = \int_0^1 (1 - t)(x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(tx, ty) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty))\, dt.$$

Exercice 22. Soit $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Déterminer $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ de sorte que :
$\forall (x, y, z) \in U,\ f(x, y, z) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ et $\Delta f(x, y, z) = 0$.
Exercice 23. Soit $U =]0, +\infty[\times \mathbb{R}$. Déterminer $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ telle qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de sorte que :
$\forall (x, y) \in U,\ f(x, y) = \varphi(\dfrac{y}{x})$ et $\Delta f(x, y) = 0$.
Exercice 24. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ et $T \in O(\mathbb{R}^2)$ canoniquement associé à A.
Montrer que $\Delta(f \circ T) = (\Delta f) \circ T$.
Exercice 25. Soient $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $V = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$. Soit g définie sur V par :
$\forall (r, \theta) \in V,\ g(r, \theta) = f(r \cos\theta, r \sin\theta)$. Vérifier que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur V et que

$$\forall (r, \theta) \in V,\ (\Delta f)(r \cos\theta, r \sin\theta) = (\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2})(r, \theta).$$

Exercice 26. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f(x, y).$$

Indication : Soit f une telle fonction. On pose pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u, v) = f(u, u + v)$. Calculer $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u, v)$.
Déterminer $g(u, v)$ et $f(x, y)$.
Exercice 27. *Equation de propagation des ondes.*
1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto F(u, v)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$.
Montrer qu'il existe deux fonctions g et h de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $F(u, v) = g(u) + h(v)$.
2. Soit $c > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, t) \mapsto f(x, t)$ telle que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x, t) \tag{1}$$

Déterminer f en utilisant le changement de variable $(u, v) = (x + ct, x - ct)$.
3. Déterminer les solutions de (1) de la forme $f(x, t) = a(x)b(t)$ où a et b sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, bornées sur $\mathbb{R}$, non identiquement nulles, et telles que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x, 0) = 0$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(0, t) = 0$.
Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 2.$$

1. On pose $F(u, v) = f(u + v, u - v)$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Calculer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}(u, v)$.
2. En déduire f.