Exercice. *Solutions et/ou indications.*

1. Identifions chaque rangement à une application de l'ensemble $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_r\}$ des r boules dans l'ensemble $\mathcal{U} = \{U_1, \cdots, U_n\}$ des n urnes. L'ensemble Ω de ces n^r rangements est muni de la probabilité uniforme (ou équiprobabilité) P : chaque rangement est équiprobable. Comme il y a $(n-1)^r$ applications de $\mathcal{B} = \{B_1, \cdots, B_r\}$ dans $\mathcal{U} \setminus \{U_j\}$, on a donc :

$$E(X_j) = P(X_j = 1) = P(A_j) = \frac{(n-1)^r}{n^r} = (1 - \frac{1}{n})^r.$$

Enfin comme $N_n = X_1 + \cdots + X_n$, par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(N_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = nE(X_1) = n(1 - \frac{1}{n})^r.$$

2. $E(X_i^2) = E(X_i)$ et si $i \neq j$, $E(X_iX_j) = P(X_i = 1, X_j = 1) = \dfrac{(n-2)^r}{n^r} = (1 - \dfrac{2}{n})^r$.

Donc $E(N_n^2) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} E(X_i^2) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} E(X_iX_j) = n(1 - \frac{1}{n})^r + n(n-1)(1 - \frac{2}{n})^r$.

3. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\frac{N_n}{n}) &= \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}(N_n) = \frac{1}{n^2}(E(N_n^2) - (E(N_n))^2) \\ &= \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n})^{r_n} + (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})^{r_n} - (1 - \frac{1}{n})^{2r_n} \end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Var}(\frac{N_n}{n}) = 0$ car, en passant à l'exponentielle, on montre que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{2}{n})^{r_n} = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^{2r_n} = e^{-2c}$.
Comme

$$E[(\frac{N_n}{n} - e^{-c})^2] = E[((\frac{N_n}{n} - E(\frac{N_n}{n})) + (E(\frac{N_n}{n}) - e^{-c}))^2] = \mathrm{Var}(\frac{N_n}{n}) + (E(\frac{N_n}{n}) - e^{-c})^2,$$

on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E[(\frac{N_n}{n} - e^{-c})^2] = 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} E(\frac{N_n}{n}) = \lim_{n\to+\infty}(1 - \frac{1}{n})^{r_n} = e^{-c}$.

4. On utilise l'inégalité de Markov avec la v.a. positive et d'espérance finie $(\frac{N_n}{n} - e^{-c})^2$.

Problème 1.

1. On a : $E(X_1) = (-1) \cdot P(X_1 = -1) + 1 \cdot P(X_1 = 1) = -(1-p) + p = 2p - 1$, $E(X_1^2) = 1$ car X_1^2 est une v.a. constante égale à 1 et

$$V(X_1) = E(X_1^2) - (E(X_1))^2 = 1 - (2p-1)^2 = 4p - 4p^2 = 4p(1-p).$$

Comme les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi, $E(X_1) = \cdots = E(X_n) = 2p - 1$ et $V(X_1) = \cdots = V(X_n) = 4p(1-p)$.
Par linéarité de l'espérance, $E(S_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n) = nE(X_1) = n(2p-1)$ et comme les v.a. $X_1, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes,

$$V(S_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = nV(X_1) = 4np(1-p).$$

2. On suppose $p \in]\frac{1}{2}, 1[$. On a bien $E(S_n) = n(2p-1) > 0$ car $2p > 1$.

2. a. *Rappel : soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On a : $|x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$.*

Donc $(|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n)) = (S_n - E(S_n) \geq E(S_n)) \cup (S_n - E(S_n) \leq -E(S_n)) = (S_n \geq 2E(S_n)) \cup (S_n \leq 0)$. Par conséquent

$$(S_n \leq 0) \subset (|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n)).$$

2. b. D'après 2. a. $P(S_n \leq 0) \leq P(|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n))$. Et, d'après l'inégalité de Tchebychev, comme $V(S_n)$ existe et $E(S_n) > 0$,

$$P(|S_n - E(S_n)| \geq E(S_n)) \leq \frac{V(S_n)}{E(S_n)^2} (= \frac{4p(1-p)}{n(2p-1)^2}).$$

Donc $0 \leq P(S_n \leq 0) \leq \dfrac{4p(1-p)}{n(2p-1)^2}$, cet encadrement impliquant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(S_n \leq 0) = 0$ car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{4p(1-p)}{n(2p-1)^2} = 0$.

On suppose désormais que $p = \frac{1}{2}$.

3. a. $(S_{2n+1} = 0)$ est un événement impossible car S_{2n+1} est une somme d'un nombre impair de termes égaux à -1 ou 1. En effet, une somme de $N \in \mathbb{N}^*$ entiers égaux à -1 ou 1 ne peut être nulle que s'il y autant de -1 que de 1 dans cette somme, et donc que si N est pair.
En conclusion, $P(S_{2n+1} = 0) = 0$.

3. b. Notons U_{2n} l'ensemble des $2n$-uplets $(x_1, \ldots, x_{2n})$ tels que $\forall k \in [\![1, 2n]\!]$, $x_k \in \{-1, 1\}$ et $x_1 + \cdots + x_{2n} = 0$. Comme un $2n$-uplet de U_{2n} est déterminé par la position des n entiers égaux à 1 (les n autres termes étant égaux à -1), U_{2n} comporte donc $\binom{2n}{n}$ éléments.
On a :

$$(S_{2n} = 0) = \bigcup_{(x_1,\ldots,x_{2n})\in U_{2n}} (X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{2n} = x_{2n}),$$

et comme cet union est une union d'événements *deux à deux incompatibles* :

$$P(S_{2n} = 0) = \sum_{(x_1,\ldots,x_{2n})\in U_{2n}} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_{2n} = x_{2n}).$$

Enfin par *mutuelle indépendance des v.a.* $X_1, \ldots, X_{2n}$, toutes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(S_{2n} = 0) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_{2n})\in U_{2n}} P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2)\ldots P(X_{2n} = x_{2n}) \\ &= \sum_{(x_1,\ldots,x_{2n})\in U_{2n}} (\frac{1}{2})^{2n} = \mathrm{card}(U_{2n}) \cdot (\frac{1}{2})^{2n} \\ &= \binom{2n}{n} \cdot (\frac{1}{2})^{2n}. \end{aligned}$$

Rappelons la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{e})^n$. D'où $(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{4\pi n}\,(\frac{2n}{e})^{2n}$, $(n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\pi n\,(\frac{n}{e})^{2n}$ et après simplifications :

$$P(S_{2n} = 0) = \frac{(2n)!}{(n!)^2}(\frac{1}{2})^{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{4\pi n}\,(\frac{2n}{e})^{2n}}{2\pi n\,(\frac{n}{e})^{2n}2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge (car d'exposant $\frac{1}{2} \leq 1$), donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} P(S_{2n} = 0)$ diverge par la règle de l'équivalent positif.

3. c. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. On rappelle que $\forall t \in]-1, 1[$, $(1+t)^\alpha = 1 + \alpha t + \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!} t^n$.

En particulier pour $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient, après simplifications, que pour tout $t \in]-1, 1[$:

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n n!} t^n = 1 - \frac{1}{2}t + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n.$$

Soit $x \in]-1, 1[$. En considérant $t = -x^2 \in]-1, 0]$ dans l'égalité précédente, on obtient bien d'après 3. b. et 3. a. que :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} = P(S_0 = 0) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(S_{2n} = 0)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{2n} = 0)x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)x^n$$

car

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(S_n = 0)x^n = \sum_{m=0}^{+\infty} P(S_{2m} = 0)x^{2m} + \sum_{m=0}^{+\infty} \underbrace{P(S_{2m+1} = 0)}_{=0} x^{2m+1} = \sum_{m=0}^{+\infty} P(S_{2m} = 0)x^{2m} \underset{[n=m]}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} P(S_{2n} = 0)x^{2n}.$$

4. On constate directement que : $(S_2 \neq 0,\ S_4 = 0) = (X_1 = -1, X_2 = -1, X_3 = 1, X_4 = 1) \cup (X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = -1, X_4 = -1)$.
D'où par incompabilité et indépendance mutuelle des v.a. X_1, X_2, X_3, X_4 :

$$\boxed{P(S_2 \neq 0,\ S_4 = 0)} = P(X_1 = -1)P(X_2 = -1)P(X_3 = 1)P(X_4 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1)P(X_3 = -1)P(X_4 = -1) = (\frac{1}{2})^4 + (\frac{1}{2})^4 =$$

5. a. Si $S_2 = 0$ et $S_6 = 0$, alors $S_2 = 0$ et $S_6 - S_2 = 0$. Réciproquement, si $S_2 = 0$ et $S_6 - S_2 = 0$, alors $S_2 = 0$ et $S_6 = S_2 + (S_6 - S_2) = 0$. Donc $(S_2 = 0, S_6 = 0)$ et $(S_2 = 0, S_6 - S_2 = 0)$ sont les mêmes événements. En outre, l'événement $(S_6 - S_2 = 0) = (X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = 0)$ est indépendant de l'événement $(S_2 = 0) = (X_1 + X_2 = 0)$ car la v.a. $X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ (fonction des v.a. X_3, X_4, X_5, X_6) est indépendante de la v.a. $X_1 + X_2$ (fonction des v.a. X_1, X_2). Enfin la v.a. $X_3 + X_4 + X_5 + X_6$ suit la même loi que la somme $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = S_4$. Donc par 3. b.

$$\boxed{P(S_2 = 0, S_6 = 0)} = P(S_2 = 0, S_6 - S_2 = 0) \underset{ind.}{=} P(S_2 = 0)P(S_6 - S_2 = 0) = P(S_2 = 0)P(S_4 = 0) \underset{3.a}{=} \frac{1}{2} \cdot \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = \boxed{\frac{3}{16}}.$$

5. b. On procède comme dans la question précédente. Comme $(S_4 = 0, S_6 = 0) = (S_4 = 0, S_6 - S_4 = 0) = (S_4 = 0, X_5 + X_6 = 0)$, $(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) = (S_2 \neq 0, S_4 = 0) \cap (X_5 + X_6 = 0)$. Or l'événement $(S_2 \neq 0, S_4 = 0)$ (défini avec les v.a. X_1, X_2, X_3, X_4) est indépendant de l'événement $(X_5 + X_6 = 0)$ (défini avec les v.a. X_5, X_6), et la v.a. $X_5 + X_6$ a la même loi que $S_2 = X_1 + X_2$, donc :

$$\boxed{P(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0)} = P(S_2 \neq 0, S_4 = 0)P(X_5 + X_6 = 0) = P(S_2 \neq 0, S_4 = 0)P(S_2 = 0) = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{16}}$$

d'après 4. et 3. b.

5. c. En utilisant le système complet d'événements $(S_4 = 0), (S_4 \neq 0)$, on a :

$$(S_2 \neq 0, S_6 = 0) = (S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) \cup (S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 = 0)$$

et par incompatibilité : $P(S_2 \neq 0, S_6 = 0) = P(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) + P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 = 0)$ d'où :

$$P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 = 0) = P(S_2 \neq 0, S_6 = 0) - P(S_2 \neq 0, S_4 = 0, S_6 = 0) \ (*)$$

De même $P(S_6 = 0) = P(S_2 \neq 0, S_6 = 0) + P(S_2 = 0, S_6 = 0)$ et d'après 3. b. et 5. a. :

$$\boxed{P(S_2 \neq 0, S_6 = 0)} = P(S_6 = 0) - P(S_2 = 0, S_6 = 0) = \binom{6}{3} \cdot (\frac{1}{2})^6 - \frac{3}{16} = 20 \cdot (\frac{1}{2})^6 - \frac{3}{16} = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

Et finalement d'après $(*)$ et 5. b. on obtient : $\boxed{P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 = 0)} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16} = \boxed{\frac{1}{16}}$.

6. Montrons d'abord par double inclusion que $(S_n = 0) = \bigcup_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k)$:

i) Si l'événement $\bigcup_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k)$ est réalisé, l'un au moins des événements de l'union est donc réalisé ce qui implique évidemment la réalisation de $(S_n = 0)$. Autrement dit, $\bigcup_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k) \subset (S_n = 0)$.

ii) Supposons $(S_n = 0)$ réalisé. Considérons les événements $(S_k = 0)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ et notons j *le plus petit entier de* $[\![1, n]\!]$ tel que $(S_j = 0)$ soit aussi réalisé (un tel j existe nécessairement et peut être égal à n (si n est pair)). Alors par définition de B_j, l'événement $(S_n = 0) \cap B_j$ est réalisé. On a donc $(S_n = 0) \subset (S_n = 0) \cap B_j$ et par conséquent $(S_n = 0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k)$.

Exemples. Si $S_6 = 0$ avec $S_2 \neq 0$, $S_4 \neq 0$ alors $j = 6$ et l'événement $S_6 \cap B_6$ est réalisé. Si $S_6 = 0$ avec $S_2 \neq 0$, $S_4 = 0$ alors $j = 4$ et l'événement $S_6 \cap B_4$ est réalisé.

Puis, par incompatibilité des événements $((S_n = 0) \cap B_k), k \in [\![1, n]\!]$:

$$u_n = P(S_n = 0) = P(\bigcup_{k=1}^{n} ((S_n = 0) \cap B_k)) = \sum_{k=1}^{n} P((S_n = 0) \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P_{B_k}(S_n = 0).$$

En raisonnant comme en 5. a. pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $P_{B_k}(S_n = 0) = P(S_{n-k} = 0)$ car :

$$\begin{aligned} P((S_n = 0) \cap B_k) &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0) \\ &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n - S_k = 0) \\ &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, X_{k+1} + \cdots + X_n = 0) \\ &= P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0) P(X_{k+1} + \cdots + X_n = 0) \end{aligned}$$

car l'événement $(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \cdots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0)$, ne faisant intervenir dans sa définition que les v.a. $X_1, \cdots, X_k$, est indépendant de l'événement $X_{k+1} + \cdots + X_n = 0$ ne faisant intervenir dans sa définition que les v.a. $X_{k+1}, \cdots, X_n$.

Enfin comme $X_{k+1} + \cdots + X_n$ et S_{n-k} ont la même loi :

$$P((S_n = 0) \cap B_k) = P(B_k) P(S_{n-k} = 0)$$

ou encore

$$P_{B_k}(S_n = 0) = \frac{P((S_n = 0) \cap B_k)}{P(B_k)} = P(S_{n-k} = 0) = u_{n-k}.$$

L'égalité précédente est encore vraie pour $k = n$ car $P_{B_n}(S_n = 0) = 1 = P(S_0 = 0)$ (si B_n est réalisé, $(S_n = 0)$ est réalisé !).

En conclusion, $u_n = P(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) P_{B_k}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} b_k u_{n-k}$.

7. On convient de poser $b_0 = 0$. Soit $x \in]-1, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = P(S_n = 0) \in [0, 1]$ et $b_n = P(B_n) \in [0, 1]$ donc les séries $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ convergent absolument par comparaison à la série géométrique convergente $\sum_{n \geq 0} |x|^n$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n x^n| = u_n |x|^n \leq |x|^n$ et $|b_n x^n| = b_n |x|^n \leq |x|^n$. Le produit (de Cauchy) des deux séries $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$ est la série $\sum_{n \geq 0} c_n x^n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \sum_{k=0}^{n} b_k u_{n-k}.$$

Plus précisement, $c_0 = b_0 u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k u_{n-k} = u_n$ d'après 6.

Par le théorème sur le produit de deux séries absoluments convergentes (ou de deux séries entières), on a donc :

$$g(x)\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\sum_{n=0}^{+\infty}c_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}c_nx^n=\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n.$$

8. Soit $x\in]-1,1[$. D'après 3. c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_nx^n=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}u_nx^n=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-u_0=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1$ car $u_0=P(S_0=0)=1$.
Donc d'après 7. $g(x)=\sqrt{1-x^2}\,(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1)=1-\sqrt{1-x^2}=1-(1-x^2)^{\frac12}$.

9. On procède comme en 3. c. avec $\alpha=\frac12$. On obtient, après simplifications, que pour tout $t\in]-1,1[$:

$$(1+t)^{\frac12}=1+\frac12t+\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^nn!}t^n.$$

Soit $x\in]-1,1[$. En considérant $t=-x^2\in]-1,0]$ dans l'égalité précédente, on obtient bien d'après 3. b. et 3. a. que :

$$(1-x^2)^{\frac12}=1-\frac12x^2-\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^nn!}x^{2n}$$

et d'après 8.

$$g(x)=1-(1-x^2)^{\frac12}=\frac12x^2+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^nn!}x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}b_{2n}x^{2n}.$$

Par unicité du DSE(0) de g sur $]-1,1[$, on obtient que pour tout $n\geq2$, $b_{2n}=\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-3)}{2^nn!}$.
Remarques. i) On retrouve $b_2=P(B_2)=P(S_1\neq0,S_2=0)=P(S_2=0)=\frac12$.
ii) On peut vérifier avec 3. b. que pour tout $n\geq2$, $\dfrac{P(S_{2n}=0)}{2n-1}=b_{2n}$.

Problème 2. *Partie A.*
1. On vérifie sans difficultés que pour tous $(M,N)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $f(\alpha M+N)=\alpha f(M)+\beta f(N)$.
De plus, pour tout $M=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(f(M))=f(\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=M$. Donc $f\circ f$ est l'application identique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, et, d'après le cours, l'involution f est une symétrie vectorielle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. a. On vérifie sans difficultés en calculant MN, $f(MN)$, $f(N)f(M)$ que l'on a bien : $f(MN)=f(N)f(M)$.
2. b. Soit $M\in GL_2(\mathbb{R})$. La matrice $f(M)$ est inversible car $\det(f(M))=\det(M)\neq0$. De plus, d'après **2. a.** :

$$I_2=f(I_2)=f(MM^{-1})=f(M^{-1})f(M).$$

Donc la matrice inverse de $f(M)$ est la matrice $f(M^{-1})$, i.e. $f(M)^{-1}=f(M^{-1})$.
2. c. Soit $P\in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $B=P^{-1}AP$. D'après **2. a.** et **2. b.**, on a :

$$f(B)=f((P^{-1}A)P)=f(P)f(P^{-1}A)=f(P)f(A)f(P^{-1})=f(P)f(A)f(P)^{-1}.$$

Ou encore, en posant $Q=f(P)^{-1}$, $f(B)=Q^{-1}f(A)Q$. Donc $f(A)$ est semblable à $f(B)$.
3. a. $\mathcal{N}$ est le noyau de la forme linéaire non nulle tr sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc, d'après le cours, $\mathcal{N}$ est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Remarque : On pouvait aussi observer que $\mathcal{N}=\{\begin{pmatrix}a&b\\c&-a\end{pmatrix}/(a,b,c)\in\mathbb{R}^3\}=$ *Vect*$(E_{11}-E_{22},E_{21},E_{12})$.
Et $\mathcal{D}$ est par définition la droite vectorielle engendrée par I_2, donc un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. b. On vérifie facilement que $\mathcal{N}\cap\mathcal{D}=\{O_2\}$. Et comme $\dim\mathcal{N}+\dim\mathcal{D}=3+1=4=\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on conclut que

$$\mathcal{N}\oplus\mathcal{D}=\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Puis on vérifie sans difficultés que $f(M)=M$ si et seulement si $M\in\mathcal{D}$ et que $f(M)=-M$ si et seulement si $M\in\mathcal{N}$ ce qui permet d'affirmer que la symétrie f (cf. **1.**) est bien la symétrie vectorielle par rapport à $\mathcal{D}$, de direction $\mathcal{N}$.
Partie B.
1. Soient $(M,N)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. L'application g_A est linéaire car, d'après les propriétés du calcul matriciel,

$$g_A(\alpha M+\beta N)=A(\alpha M+\beta N)=\alpha AM+\beta AN=\alpha g_A(M)+\beta g_A(N).$$

Et comme $\forall M\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $g_A(M)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $g_A\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. a. et 2. b. Notons $\mathcal{A}$ la matrice de g_A dans la base canonique $(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On vérifie que :

$$g_A(E_{11})=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21},\ g_A(E_{12})=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22},$$

$$g_A(E_{21}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = bE_{11} + dE_{21} \text{ et } g_A(E_{22}) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = bE_{12} + dE_{22}.$$

D'où $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$ et $\operatorname{tr}(g_A) = \operatorname{tr}(\mathcal{A}) = 2a + 2d = 2(a+d) = 2\operatorname{tr}(A)$.

3. a. Supposons $A \in GL_2(\mathbb{R})$, i.e. inversible. Alors, pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$g_{A^{-1}}(g_A(M)) = A^{-1}(AM) = (A^{-1}A)M = M \quad \text{et } g_A(g_{A^{-1}}(M)) = A(A^{-1}M) = (AA^{-1})M = M$$

car la multiplication est associative dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $g_{A^{-1}} \circ g_A = g_A \circ g_{A^{-1}} = Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Par conséquent, g_A est une bijection de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et sa bijection réciproque, notée g_A^{-1}, est l'application $g_{A^{-1}}$.

3. b. Supposons g_A bijective. Il existe une (unique) matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $g_A(M) = I_2$, c'est-à-dire telle que $AM = I_2$ $(*)$, cette matrice M étant, par définition, l'unique *antécédent* de I_2 par g_A. Remarquons que l'égalité $(*)$ implique $\det(A) \neq 0$ car $\det(A)\det(M) = \det(AM) = \det(I_2) = 1$. Donc A est inversible (d'inverse M).

4. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons λ valeur propre de g_A. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $M \neq O_2$, telle que $g_A(M) = \lambda M$, c'est-à-dire telle que $AM = \lambda M$. Comme M n'est pas la matrice nulle, l'une au moins des deux colonnes de M est non nulle. Supposons par exemple que la première colonne de M, notée C_1, soit non nulle. On a $AM\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $AC_1 = \lambda C_1$. On en déduit que λ est une valeur propre de A (et C_1 un vecteur propre de A).

Autre approche possible. Remarquons que $AM = \lambda M \Leftrightarrow (A - \lambda I_2)M = O_2$. Si $A - \lambda I_2$ était inversible, on obtiendrait $M = O_2$, en multipliant l'égalité précédente à gauche par $(A - \lambda I_2)^{-1}$, ce qui contredit l'hypothèse faite sur M. Donc $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible et λ est donc bien une valeur propre de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons λ valeur propre de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, $X \neq O_{2,1}$, telle que $AX = \lambda X$. Soit M la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont les deux colonnes sont égales à la colonne X. On constate alors que $AM = \lambda M$. Et comme $M \neq O_2$, λ est donc une valeur propre de g_A.

Remarque : on pouvait prouver directement l'équivalence en utilisant la question **3.** Observons tout d'abord que : $Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = g_{I_2}$ et $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$, $g_U - g_V = g_{U-V}$ car :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \; (g_U - g_V)(M) = g_U(M) - g_V(M) = UM - VM = (U-V)M = g_{U-V}(M).$$

D'après **3. a.** et **3. b.**, comme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie :

$$\begin{aligned} \lambda \notin sp(g_A) \quad &\Leftrightarrow \quad g_A - \lambda Id_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = g_A - g_{\lambda I_2} \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow \quad g_{A-\lambda I_2} \text{ est bijective} \\ &\Leftrightarrow \quad A - \lambda I_2 \text{ est inversible} \\ &\Leftrightarrow \quad \lambda \notin sp(A) \end{aligned}$$

donc $\lambda \in sp(g_A) \Leftrightarrow \lambda \in sp(A)$.

5. • *Eléments propres de A.*

On vérifie que : $\chi_A(X) = X(X+1) - 2 = X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$, $E_1(A) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $E_{-2}(A) = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix})$.

Remarque : La matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car elle a deux valeurs propres réelles distinctes. Plus précisement, si $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $D = P^{-1}AP$: D est la matrice, dans la base $((1,1),(1,-2))$ de $\mathbb{R}^2$, de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

• *Eléments propres de g_A.* D'après **4.** $sp(g_A) = sp(A) = \{-2, 1\}$.

Déterminons $E_{-2}(g_A)$. Soit $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} M \in E_{-2}(g_A) \quad &\Leftrightarrow \quad AM = \lambda M \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2x \\ 2x - y &=& -2y \\ t &=& -2z \\ 2z - t &=& -2t \end{array} \right. \\ &\Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} y &=& -2x \\ t &=& -2z \end{array} \right. \end{aligned}$$

Donc

$$E_{-2}(g_A) = \{\begin{pmatrix} x & z \\ -2x & -2z \end{pmatrix} / (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}).$$

On montre de même que :

$$E_1(g_A) = \{\begin{pmatrix} x & z \\ x & z \end{pmatrix} / (x,z) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}).$$

Remarque : g_A est un endomorphisme diagonalisable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car $\dim E_{-2}(g_A) + \dim E_1(g_A) = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.