
Exercice 1. *Inégalité de Tchebychev-Cantelli.*

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $t \geq 0$. Notons U la v.a. $X - E(X)$. On a : $(U \geq \varepsilon) = (U + t \geq \varepsilon + t)$. Or $\varepsilon + t > 0$, donc

$$(U + t \geq \varepsilon + t) \subset ((U + t)^2 \geq (\varepsilon + t)^2)$$

car l'événement $((U + t)^2 \geq (\varepsilon + t)^2)$ est l'union des deux événements incompatibles $(U + t \geq \varepsilon + t)$ et $(U + t \leq -(\varepsilon + t))$. Donc

$$P(U \geq \varepsilon) \leq P\big((U + t)^2 \geq (\varepsilon + t)^2\big) \tag{1}$$

Appliquons maintenant *l'inégalité de Markov* avec la v.a. *positive* et *d'espérance finie* $(U + t)^2 = (X - E(X) + t)^2$. On a :

$$P[(U + t)^2 \geq (\varepsilon + t)^2] \leq \frac{E[(U + t)^2]}{(\varepsilon + t)^2}. \tag{2}$$

Or $E(U) = E((X - E(X)) = E(X) - E(X) = 0$, $E(U^2) = E[(X - E(X))^2] = V(X)$ et $E(t^2) = t^2$, donc

$$E[(U + t)^2] = E[U^2 + t^2 + 2tU] = E(U^2) + t^2 + 2tE(U) = V(X) + t^2. \tag{3}$$

Finalement, en utilisant (1), (2) et (3), on obtient bien :

$$P(X - E(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(t + \varepsilon)^2}. \tag{4}$$

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ avec $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f'(t) = 2\,\dfrac{\varepsilon t - V(X)}{(t + \varepsilon)^3}$, d'où $f'(t) \geq 0 \Leftrightarrow t \geq \dfrac{V(X)}{\varepsilon}$.
Donc f est décroissante sur $[0, \frac{V(X)}{\varepsilon}]$ et croissante sur $[\frac{V(X)}{\varepsilon}, +\infty[$.
On vérifie que $f(\dfrac{V(X)}{\varepsilon}) = \dfrac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$ et on en déduit donc que $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $f(t) \geq f(\dfrac{V(X)}{\varepsilon})$.
On obtient alors la majoration demandée en remplaçant t par $\frac{V(X)}{\varepsilon}$ dans l'inégalité (4) de la question précédente.

3. Comme $(-X)^2 = X^2$ est d'espérance finie, on peut utiliser (1) avec la v.a $-X$ à la place de X.
Comme $E(-X) = -E(X)$, $V(-X) = (-1)^2 V(X) = V(X)$, on obtient : $P(-X + E(X) \geq \varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$, c'est-à-dire

$$P(X - E(X) \leq -\varepsilon) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$$

car $(-X + E(X) \geq \varepsilon)$ est l'événement $(X - E(X) \leq -\varepsilon)$.

4. L'événement $(|X - E(X)| \geq \varepsilon)$ est l'union des deux événements incompatibles $(X - E(X) \geq \varepsilon)$ et $(X - E(X) \leq -\varepsilon)$. Donc d'après **1.** et **3.** :

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) = P((X - E(X) \geq \varepsilon)) + P((X - E(X) \leq -\varepsilon)) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}.$$

5. On vérifie que $\dfrac{2V(X)}{V(X) + \varepsilon^2} < \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$ (majorant donné par l'inégalité de Tchebychev) si et seulement si $0 < \varepsilon < \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ (écart-type de X).

Exercice 3.

1. On a :

$$\chi_f(X) = \chi_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X-2 & -1 & -1 \\ -1 & X-2 & -1 \\ 0 & 0 & X-3 \end{vmatrix} = (X-3)\begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-2 \end{vmatrix} = (X-3)((X-2)^2-1) = (X-3)^2(X-1).$$

Les valeurs propres de f sont donc les réels 1 et 3 car une valeur propre de f (ou de A) est une racine de son polynôme caractéristique.
Comme 1 (resp. 3) est une valeur propre simple (resp. double) de f , on sait d'avance que le sous-espace propre $E_1(f)$ (resp. $E_3(f)$) est de dimension 1 (resp. 1 ou 2).
On obtient : $E_1(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0))$ (resp. $E_3(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$) en résolvant le système :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ (resp. } A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\text{)}.$$

Et l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable car $\dim E_1(f) + \dim E_3(f) = 2 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

2. Comme une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f (propriété du cours), l'endomorphisme f admet donc d'après **1**. deux droites stables, à savoir les droites : $E_1(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1, 0))$ et $E_3(f) = \mathrm{Vect}((1, 1, 0))$.

En effet, un vecteur propre de f est soit un vecteur (non nul) de $E_1(f)$ et il engendre alors la droite vectorielle $E_1(f)$, soit un vecteur (non nul) de $E_3(f)$ et dans ce cas il engendre la droite vectorielle $E_3(f)$.

3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ et P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne : $ax+by+cz=0$.
Le plan vectoriel P est stable par f si et seulement si $\forall u=(x,y,z)\in P,\ f(u)=f(x,y,z)=(2x+y+z,x+2y+z,3z)\in P$.
Donc P est stable par f si et seulement si :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ ax+by+cz=0 \Rightarrow a(2x+y+z)+b(x+2y+z)+c\,3z=0,$$

ou encore P est stable par f si et seulement si :

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ ax+by+cz=0 \Rightarrow (2a+b)x+(a+2b)y+(a+b+3c)z=0.\ (*)$$

Montrons que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est une colonne propre de A^T.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ colonne propre de A^T. Cela veut dire qu'il existe un réel λ tel que $A^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. On a donc :

$$2a+b=\lambda a,\ a+2b=\lambda b,\ a+b+3c=\lambda c.$$

On constate que la propriété $(*)$ ci-dessus est satisfaite : Soit $(x,y,z)\in P$ c'est-à-dire tel que $ax+by+cz=0$. On a immédiatement : $(2a+b)x+(a+2b)y+(a+b+3c)z=\lambda(ax+by+cz)=\lambda\cdot 0=0$ (c'est-à-dire $f(x,y,z)\in P$).

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons P stable par f, c'est-à-dire que la propriété $(*)$ ci-dessus est satisfaite. Distinguons deux cas :
i) Supposons que l'un au moins des trois réels $2a+b,\ a+2b,\ a+b+3c$ soit non nul.
Considérons *le plan vectoriel* Π *de* $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne :

$$(2a+b)x+(a+2b)y+(a+b+3c)z=0.$$

La propriété $(*)$ peut se reformuler de la façon suivante : si $(x,y,z)\in P$, $(x,y,z)\in\Pi$, en d'autres termes le plan P est inclus dans le plan Π c'est-à-dire plus simplement $\cdots$ $P=\Pi$ (car $\dim P=\dim\Pi=2$).
Considérons maintenant le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. Comme $\Pi=P$, $\Pi^\perp=P^\perp$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Vect}(2a+b,a+2b,a+b+3c)=\mathrm{Vect}(a,b,c).$$

Rappel : soit $R=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/ux+vy+wz=0\}$ avec $(u,v,w)\neq(0,0,0)$: R est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et $R^\perp=\mathrm{Vect}\,(u,v,w)$.
Le vecteur $(2a+b,a+2b,a+b+3c)$ est donc colinéaire au vecteur (a,b,c). Il existe donc un réel λ tel que $(2a+b,a+2b,a+b+3c)=\lambda(a,b,c)$, c'est-à-dire tel que $A^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$. On vient de montrer que $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est une colonne propre de A^T (pour la valeur propre λ).

ii) (cas particulier) Si $2a+b=0,\ a+2b=0,\ a+b+3c=0$, on a : $A^T\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$. Donc 0 est une valeur propre de A^T et $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est bien une colonne propre de A^T (pour la valeur propre 0).

4. Commençons par déterminer les éléments propres de A^T. Comme $\chi_{A^T}(X)=\chi_A(X)$, les valeurs propres de A^T sont les réels 1 et 3. On obtient : $E_1(A^T)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix})$ (resp. $E_3(A^T)=\mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$) en résolvant le système : $A^T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ (resp. $A^T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$).

Les colonnes propres de A^T sont donc les colonnes $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et les colonnes $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, avec $k\neq 0$.
D'après **3.** f admet donc deux plans stables : le plan d'équation cartésienne : $x-y=0$ et le plan d'équation cartésienne : $z=0$.

Exercice 3.
1. • f est un bien endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ car :
i) Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$. On a : $d^0(P)\leq n$, $d^0(P')\leq n-1$, $d^0((X-a)P'(X))\leq n$ et finalement $d^0(f(P))\leq n$. Donc $f(P)\in\mathbb{R}_n[X]$.
ii) Soient $(P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Comme la dérivation dans $\mathbb{R}[X]$ est linéaire, on a :

$$\begin{aligned} f(\alpha P+\beta Q) &= (X-a)(\alpha P'(X)+\beta Q'(X))+\alpha P(a)+\beta Q(a)-(\alpha P(X)+\beta Q(X)) \\ &= \alpha((X-a)P'(X)+P(a)-P(X))+\beta((X-a)Q'(X)+Q(a)-Q(X))=\alpha f(P)+\beta f(Q) \end{aligned}$$

• Déterminons la matrice A de f dans la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.
Comme $f(1) = f(X) = 0$ et $\forall j \in [\![2, n]\!]$, $f(X^j) = (X-a)jX^{j-1} + a^j - X^j = (j-1)X^j - jaX^{j-1} + a^j$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^2 & a^3 & \dots & a^j & \dots & a^n \\ 0 & 0 & -2a & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3a & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 2 & \ddots & & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & -ja & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & j-1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \ddots & \ddots & -na \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & n-1 \end{pmatrix}.$$

2. Comme A est une matrice triangulaire (supérieure), les valeurs propres de A sont les coefficients diagonaux de A. Les valeurs propres de A sont donc : 0 (valeur propre double) et les $n-1$ entiers : $1, 2, \cdots, n-1$ (valeurs propres simples) : le polynôme caractéristique de A est le polynôme $X^2 \cdot \prod_{k=1}^{n-1}(X-k)$.

3. *i*) Soit λ une valeur propre *non nulle* de f. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On a :

$$f(P) = \lambda P \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ (x-a)P'(x) + P(a) - P(x) = \lambda P(x). \tag{5}$$

En considérant $x = a$ dans (5), on obtient $0 = \lambda P(a)$ et donc $P(a) = 0$ car $\lambda \neq 0$.
ii) Soit $k \in \{1, \cdots, n-1\}$. Déterminons le sous-espace propre $E_k(f)$ (de dimension 1 car k est valeur propre simple). D'après (5) :

$$f(P) = \lambda P \Rightarrow \forall x > a,\ (x-a)P'(x) - P(x) = kP(x)$$

car $P(a) = 0$. La fonction P est donc solution sur $]a, +\infty[$ de l'équation différentielle d'ordre 1 homogène :

$$(x-a)y'(x) - (k+1)y(x) = 0.$$

En résolvant cette équation différentielle, on obtient qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > a$, $P(x) = C(x-a)^{k+1}$. On en déduit que *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = C(x-a)^{k+1}$ car le polynôme $P(X) - C(X-a)^{k+1}$ est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines, à savoir tous les réels de $]a, +\infty[$. En conclusion, $\boxed{E_k(f) = \mathrm{Vect}((X-a)^{k+1})}$.
Remarque : on a considéré $x > a$ afin de pouvoir résoudre l'équation différentielle sur un intervalle sur lequel $x - a$ ne s'annule pas. On aurait pu raisonner sur $]-\infty, a[$.
iii) D'une part $\mathrm{Vect}(1, X) \subset \mathrm{Ker}\, f$ car $f(1) = f(X) = 0$, et d'autre part, 0 étant une valeur propre double de f, on sait par le cours que $\dim E_0(f) = \dim \mathrm{Ker}\, f \in \{1, 2\}$. D'où $\boxed{E_0(f) = \mathrm{Vect}(1, X)}$.

4. f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$ car $\dim E_0(f) + \sum_{k=1}^{n-1} \dim E_k(f) = 2 + (n-1) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Partie facultative.

Exercice 6.
1. On a : $\|A\| = \max(|1|, |1+i| + |e^{i\theta}|) = \max(1, \sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+1$ et $\rho(A) = 1$ car si $\frac{\theta}{2\pi} \notin \mathbb{Z}$, A admet les deux valeurs propres distinctes 1 et $e^{i\theta}$ (chacune de module 1) et si $\frac{\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$, A admet pour seule valeur propre le réel 1 (de module 1 !) .

2. Posons $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = AB = (c_{ij})$. Comme $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, $|c_{ij}| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|$ et donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}|.$$

Or

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}||b_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|(\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|) \leq \|A\|\|B\|$$

car, par définition de $\|A\|$ et $\|B\|$, on a : $\sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \leq \|A\|$ et $\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}| \leq \|B\|$.

Donc pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} |c_{ij}| \leq \|A\|\|B\|$ $(*)$ et, en considérant un indice $\ell \in [\![1, n]\!]$ tel que $\|C\| = \sum_{i=1}^{n} |c_{i\ell}|$, d'après $(*)$ pour $j = \ell$:

$$\|AB\| = \|C\| = \sum_{i=1}^{n} |c_{i\ell}| \leq \|A\|\|B\|.$$

3. Rappelons que A admet au moins une valeur propre complexe. Soit λ une valeur propre complexe de A *de module maximal*, c'est-à-dire telle que $|\lambda| = \rho(A)$. On sait que λ est aussi *une valeur propre de la transposée* A^T *de* A. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{n,1}$, tel que $A^T X = \lambda X$. Cette dernière égalité est équivalente à : pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} x_j$.

Notons $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$ et considérons $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $|x_k| = \|X\|_\infty > 0$ car $X \neq 0_{n,1}$. On a donc en particulier :

$$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_j$$

et en considérant les modules : $|\lambda||x_k| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \underbrace{|x_j|}_{\leq |x_k|} \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \cdot |x_k|$.

Et, en simplifiant par $|x_k|$ strictement positif, $\rho(A) = |\lambda| \leq \sum_{j=1}^{n} |a_{jk}| \leq \|A\|$ (la dernière inégalité provenant de la définition de $\|A\|$).

4. Précisons d'abord le lien entre les valeurs propres complexes de A et celles de A^p. On a la propriété suivante :

Soit $\mu \in \mathbb{C}$. μ est une valeur propre de A^p si et seulement si μ est la puissance p d'une valeur propre de A.

$\boxed{\Leftarrow}$ *Sens facile.* Si λ est une valeur propre de A, alors λ^p est une valeur propre de A^p. En effet, il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $X \neq 0_{n,1}$, tel que $AX = \lambda X$. D'où (classique) $A^p X = \lambda^p X$ et cette dernière égalité prouve que λ^p est bien une valeur propre de A^p (et X une colonne propre associée).

$\boxed{\Rightarrow}$ *Moins évident.* Soit μ une valeur propre (complexe) de A^p. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\alpha^p = \mu$, c'est-à-dire une « racine p-ième » de μ.

Remarque : si $\mu = re^{i\theta}$, *avec* $r > 0$, $\theta \in \mathbb{R}$, *on peut choisir :* $\alpha = \sqrt[p]{r} e^{i\frac{\theta}{p}}$.

Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $z^p = \mu \Leftrightarrow z \in \{\alpha, \alpha\omega, \cdots, \alpha\omega^{p-1}\}$ et la factorisation de $X^p - \mu$ dans $\mathbb{C}[X]$:

$$X^p - \mu = (X - \alpha)(X - \alpha\omega) \cdots (X - \alpha\omega^{p-1})$$

conduit à la "factorisation matricielle" de $A^p - \mu I_n$ suivante :

$$A^p - \mu I_n = (A - \alpha I_n)(A - \alpha\omega I_n) \cdots (A - \alpha\omega^{p-1} I_n).$$

Exemple. On a : $X^3 - 8 = (X-2)(X-2j)(X-2j^2)$ *et si* $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, $A^3 - 8I_3 = (A - 2I_3)(A - 2jI_3)(A - 2j^2 I_3)$ *où* $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Comme $A^p - \mu I_n$ n'est pas inversible, l'une au moins des matrices $A - \alpha I_n$, $A - \alpha\omega I_n$, $\cdots$, $A - \alpha\omega^{p-1} I_n$ n'est pas inversible (car si elles étaient toutes inversibles, leur produit $A^p - \mu I_n$ serait inversible ce qui n'est pas le cas). Soit donc $k \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $A - \alpha\omega^k I_n$ n'est pas inversible : $\lambda = \alpha\omega^k$ est une valeur propre de A et comme $\lambda^p = (\alpha\omega^k)^p = \alpha^p = \mu$, μ est donc la puissance p d'une valeur propre de A.

On est maintenant en mesure de prouver l'égalité demandée :

i) Soit μ une valeur propre (complexe) de A^p de module maximal. D'après ce qui précède, $\mu = \lambda^p$ où λ est une valeur propre de A. On a donc : $\rho(A^p) = |\mu| = |\lambda^p| = |\lambda|^p \leq \rho(A)^p$ car $|\lambda| \leq \rho(A)$ par définition de $\rho(A)$.

ii) Soit λ une valeur propre (complexe) de A de module maximal. D'après ce qui précède $\mu = \lambda^p$ est une valeur propre de A^p. Donc $(\rho(A))^p = |\lambda|^p = |\lambda^p| = |\mu| \leq \rho(A^p)$ par définition de $\rho(A^p)$.

En conclusion, $\rho(A^p) = (\rho(A))^p$.

Autre justification possible : Utiliser le fait que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire.

5. Soient $D = \text{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ où $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont les valeurs propres complexes (non nécessairement distinctes) de A et $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $A = PDP^{-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $D^k = P^{-1} A^k P \Leftrightarrow A^k = PD^k P^{-1}$. On en déduit que si $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle O_n, $(D^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle et réciproquement, si $(D^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle, $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle. Donc

$$\lim_{k \to +\infty} A^k = O_n \Leftrightarrow \lim_{k \to +\infty} \text{diag}(\lambda_1^k, \cdots, \lambda_n^k) = O_n \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \lim_{k \to +\infty} \lambda_i^k = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ |\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \rho(A) = \max[|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|) < 1$$

Rappel. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a : $\lim_{k \to +\infty} z^k = 0 \Leftrightarrow |z| < 1$.