Feuille d'exercices n° 15 : solutions et/ou indications.

Exercice 3. *Soit* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. *On pose :* $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, $(P|Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a_k)Q^{(k)}(a_k)$.

1. *Montrer que* $(\,|\,)$ *est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

2. *Dans le cas* $n = 2$, $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, *déterminer une base orthogonale pour* $(\,|\,)$.

Solution : **1.** On vérifie sans difficultés que $(\,|\,)$ est une « forme » symétrique, linéaire à gauche (donc bilinéaire) et positive. Montrons que $(\,|\,)$ est une forme «définie» : Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $(P|P) = 0$. Alors $\forall k \in \{0, \ldots, n\}$, $P^{(k)}(a_k) = 0$. Comme $P^{(n)}(a_n) = 0$, P n'est pas de degré n car si P était de degré n, sa dérivée n-ème serait un polynôme constant non nul. De même, P n'est pas de degré $n-1$ car si P était de degré $n-1$, sa dérivée $n-1$-ème serait un polynôme constant non nul. Or $P^{(n-1)}(a_{n-1}) = 0$. En répétant ce raisonnement, on obtient que P est un polynôme constant, nul en a_0, donc que $P = 0$.

2. Rappelons que $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, $(P|Q) = P(-1)Q(-1) + P'(0)Q'(0) + P''(1)Q''(1)$.

On détermine une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire en orthogonalisant avec le procédé de Gram-Schmidt la base canonique $(U_0, U_1, U_2) = (1, X, X^2)$. Posons à cet effet :

- $V_0 = U_0 = 1$,
- $V_1 = U_1 - aV_0$. On détermine a de sorte que $(V_1|V_0) = 0$. Comme $a = \frac{(U_1|U_0)}{\|V_0\|^2}$, $(U_1|U_0) = (X|1) = (-1)\cdot 1 = -1$ et $\|V_0\|^2 = \|1\|^2 = 1$, on obtient donc $a = -1$ et $V_1 = X + 1$,
- $V_2 = U_2 - bV_1 - cV_0$. On détermine b et c de sorte que $(V_2|V_0) = 0$ et $(V_2|V_1) = 0$. On obtient $b = \frac{(U_2|V_1)}{\|V_1\|^2} = 0$ car $(U_2|V_1) = (X^2|X+1) = 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 1 + 2\cdot 0 = 0$ et $c = \frac{(U_2|V_0)}{\|V_0\|^2} = 1$. D'où $V_2 = X^2 - 1$. La famille $(1, X+1, X^2-1)$ est donc une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire $(\,|\,)$.

Remarque. Une base *orthonormée* de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire est $(1, X+1, \frac{1}{2}(X^2-1))$.

Exercice 4. *Soit* $E = \mathcal{C}^0([-1,1], \mathbb{R})$. *On pose, pour tout* $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.
Vérifier que $(E, \langle\,,\,\rangle)$ *est un espace préhilbertien réel. Calculer la norme de la fonction constante égale à* 1 *sur* $[-1,1]$.

Indications : Commençons par justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\langle f, g \rangle$. Soit $h = fg$. La fonction h est continue sur $[-1,1]$ donc bornée sur $[-1,1]$. Soit $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in [-1,1]$, $|h(x)| \leq M$. Comme

$$\forall x \in]-1,1[,\ \left|\frac{h(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right| = \frac{|h(x)|}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{M}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{A\to -1, B\to 1} [\arcsin(x)]_A^B = \pi,$$

l'intégrale $\langle f, g \rangle$ converge absolument par comparaison donc converge.

Les propriétés de l'intégrale (généralisée) impliquent que $\langle\,,\,\rangle$ est bien une forme bilinéaire symétrique positive. De plus, sachant que l'intégrale généralisée d'une fonction continue et positive sur un intervalle est nulle si et seulement si la fonction est la fonction nulle sur l'intervalle, on en déduit que $\langle\,,\,\rangle$ est «définie». Donc $\langle\,,\,\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Enfin la norme de la fonction constante égale à 1 sur $[-1,1]$ est égale à $\sqrt{\pi}$.

Exercice 5. *Soient* u *et* v *deux vecteurs d'un espace préhilbertien. Montrer que* $u \perp v \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, \|u + tv\| \geq \|u\|$.

Solution : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $u \perp v$, alors $u \perp tv$ et par Pythagore, $\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + t^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$. D'où $\|u+tv\| \geq \|u\|$ par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|u+tv\| \geq \|u\|$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, tv \rangle + \|tv\|^2 \geq \|u\|^2$, c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t^2\|v\|^2 + 2t\langle u, v \rangle = t(t\|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) \geq 0.$$

Donc $\underline{\forall t > 0}$, $t\|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \geq 0$. D'où $2\langle u, v \rangle = \lim\limits_{t\to 0^+} (t\|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) \geq 0$. De même, $\underline{\forall t < 0}$, $t\|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \leq 0$. D'où $2\langle u, v \rangle = \lim\limits_{t\to 0^-} (t\|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle) \leq 0$. Finalement, $\langle u, v \rangle = 0$.

Exercice 8. *Soit* $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R}^+)$. *On pose :* $u_n = \displaystyle\int_0^1 f(x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$. *Prouver que* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^2 \leq u_{n-1}.\, u_{n+1}$.

Indication : Remarquer que $f(x)^n = f(x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot f(x)^{\frac{n+1}{2}}$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 9. *Soit* $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$. *On pose, pour tout* $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.
On rappelle que $(E, \langle\,,\,\rangle)$ *est un espace préhilbertien réel.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, *on note :* $u_n(x) = (x^2-1)^n$, $x \in [-1,1]$ *et* $p_n = u_n^{(n)}$ *(dérivée* $n^{\text{ième}}$ *de* u_n*).*
Vérifier que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une famille orthogonale de* $(E, \langle\,,\,\rangle)$.

Solution : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $u_n(x) = (x-1)^n(x+1)^n$, -1 et 1 sont des racines d'ordre de multiplicité n du polynôme u_n. Donc -1 et 1 sont des racines de $u_n^{(j)}$ si $j \in \{0,\dots,n-1\}$.
Soient m et n deux entiers naturels tels que $m < n$. Montrons que $\langle p_m, p_n \rangle = 0$. On effectue n intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\langle p_m, p_n \rangle &= \int_{-1}^{1} u_m^{(m)}(x)u_n^{(n)}(x)\,dx \\
&= [u_m^{(m)}(x)u_n^{(n-1)}(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)}(x)u_n^{(n-1)}(x)\,dx \ \ (\text{IPP } n^{\text{o}}\ 1) \\
&= -\int_{-1}^{1} u_m^{(m+1)}(x)u_n^{(n-1)}(x)\,dx \ \text{ car } \ u_n^{(n-1)}(-1) = u_n^{(n-1)}(1) = 0 \\
&= -\{[u_m^{(m+1)}(x)u_n^{(n-2)}(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)}(x)u_n^{(n-2)}(x)\,dx\} \ \ (\text{IPP } n^{\text{o}}\ 2) \\
&= \int_{-1}^{1} u_m^{(m+2)}(x)u_n^{(n-2)}(x)\,dx \ \text{ car } \ u_n^{(n-2)}(-1) = u_n^{(n-2)}(1) = 0 \\
&\ \vdots \\
&= (-1)^n \int_{-1}^{1} u_m^{(m+n)}(x)u_n(x)\,dx \ \ (\text{IPP } n^{\text{o}}\ n) \ \text{ car } \forall k \in \{1,\dots,n\},\ u_n^{(n-k)}(-1) = u_n^{(n-k)}(1) = 0
\end{aligned}$$

Or u_m est un polynôme de degré $2m$ et $m+n > 2m$ donc $\forall x \in [-1,1]$, $u_m^{(m+n)}(x) = 0$. D'où

$$\langle p_m, p_n \rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} \underbrace{u_m^{(m+n)}(x)}_{=0}\, u_n(x)\,dx = 0.$$

Exercice 11. *On munit* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *de son produit scalaire usuel.*
1. *Prouver que* $S_n(\mathbb{R})^\perp = A_n(\mathbb{R})$.
2. *Soit* $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Calculer la distance de* A *à* $S_n(\mathbb{R})$.
3. *Déterminer Vect*$(I_n)^\perp$.

Solution : **1.** Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés classiques :
i) `[définition du produit scalaire usuel` $\langle\ ,\ \rangle$ `de` $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$`]` :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A, B \rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \operatorname{tr}({}^tA \cdot B) = \operatorname{tr}(A \cdot {}^tB).$$

ii) $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}({}^tM) = \operatorname{tr}(M)$ et que $\forall (U,V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, ${}^t(UV) = {}^tV \cdot {}^tU$ et $\operatorname{tr}(UV) = \operatorname{tr}(VU)$.
iii) $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$: $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M = \underbrace{\frac{1}{2}(M + {}^tM)}_{\in S_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{1}{2}(M - {}^tM)}_{\in A_n(\mathbb{R})}$

iv) $\dim S_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$, $\dim A_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$.
Montrons d'abord que $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$. Soit $A \in A_n(\mathbb{R})$. Pour tout $S \in S_n(\mathbb{R})$, on a d'après *i)*, *ii)* :

$$\langle S, A \rangle = \operatorname{tr}({}^tS \cdot A) = \operatorname{tr}(SA) = \operatorname{tr}({}^t(SA)) = \operatorname{tr}({}^tA \cdot {}^tS) = \operatorname{tr}(-A \cdot S) = -\operatorname{tr}(AS) = -\operatorname{tr}(SA) = -\langle S, A \rangle$$

donc $\langle S, A \rangle = 0$. Ainsi $A_n(\mathbb{R}) \subset S_n(\mathbb{R})^\perp$. Or on a aussi $\dim S_n(\mathbb{R})^\perp = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) - \dim S_n(\mathbb{R})$ donc d'après *iv)*

$$\dim S_n(\mathbb{R})^\perp = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \dim A_n(\mathbb{R})$$

d'où $A_n(\mathbb{R}) = S_n(\mathbb{R})^\perp \cdots$ et $S_n(\mathbb{R}) = (S_n(\mathbb{R})^\perp)^\perp = A_n(\mathbb{R})^\perp$.
2. Soit p la projection orthogonale sur $S_n(\mathbb{R})$. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. D'après **1.** $p(M) = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $M - p(M) = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Par définition de la distance d'un vecteur à un sous-espace de dimension finie, on a donc

$$d(M, S_n(\mathbb{R})) = \|M - p(M)\| = \|\frac{1}{2}(M - {}^tM)\| = \frac{1}{2}\|M - {}^tM\| = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(m_{ij} - m_{ji})^2}.$$

3. C'est un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\text{Vect}(I_n)^\perp = \{M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / m_{11} + \cdots + m_{nn} = 0\}$. Une base de $\text{Vect}(I_n)^\perp$ est par exemple la base formée avec les $n^2 - n$ matrices élémentaires $E_{i,j}$, $i \neq j$ et les $n-1$ matrices $E_{1,1} - E_{n,n}, \ldots, E_{n-1,n-1} - E_{n,n}$.

Exercice 17. *Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, E un eve de dimension n et $e_1, \cdots, e_p$ p vecteurs unitaires tels que*

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle x, e_k \rangle^2 \ (*).$$

1. *Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthonormée de E.*
2. *Préciser $(\text{Vect}(e_1, \cdots, e_p))^\perp$. En déduire que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de E (et donc que $p = n$).*

Solution : 1. Il s'agit de prouver que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthogonale de E car chaque vecteur de cette famille est de norme 1 par hypothèse. Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$. En considérant $(*)$ avec $x = e_i$, on obtient :

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle e_i, e_k \rangle^2 = \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 + \langle e_i, e_i \rangle^2 = \sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 + \|e_i\|^4.$$

Or $\|e_i\| = 1$ donc $\sum_{k \neq i} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$. Sachant qu'une somme de réels positifs est nulle ssi chaque terme de la somme est nulle, on en déduit que $\forall k \neq i$, $\langle e_i, e_k \rangle = 0$.

2. Posons $F = \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Soit $u \in E$. Si $u \in F^\perp$, alors $\forall k \in \{1, \ldots, p\}$, $\langle u, e_k \rangle = 0$ et par $(*)$, $\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle u, e_k \rangle^2 = 0$. Donc $u = 0_E$. Ainsi $F^\perp \subset \{0_E\}$ et comme $0_E \in F^\perp$, $F^\perp = \{0_E\}$. E étant de dimension finie, on en déduit que :

$$F = (F^\perp)^\perp = \{0_E\}^\perp = E.$$

La famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est donc une famille génératrice de E. Comme la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre (en tant que famille orthogonale formée de vecteurs non nuls), la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base (orthonormée) de E.
Remarque. On a donc le résultat suivant précisant celui vu en cours (calculs en BON) : Soit $B = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de E formée de vecteurs unitaires . Alors B est une base orthonormée si et seulement si $\forall x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$.

Exercice 19. Calculer $m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - (ax+b))^2 \, dx$.

Solution : i) Interprétation de m. On munit $E = \mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(x) Q(x) \, dx$$

(voir remarque ci-dessous) et on note $\| \cdot \|$ la norme associée à ce produit scalaire :

$$\forall P \in E,\ \|P\|^2 = \langle P, P \rangle = \int_0^1 P(x)^2 \, dx.$$

Alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \int_0^1 (x^2 - (ax+b))^2 \, dx = \|X^2 - (aX+b)\|^2.$$

Soit U la projection orthogonale de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\forall P \in \mathbb{R}_1[X],\ \|X^2 - P\|^2 \geq \|X^2 - U\|^2.$$

Ainsi m est le carré de la distance du «vecteur» X^2 de E au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ de E :

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|X^2 - (aX+b)\|^2 = \min_{P \in \mathbb{R}_1[X]} \|X^2 - P\|^2 = \|X^2 - U\|^2.$$

ii) Calcul de m. Posons $U(X) = \alpha X + \beta$. Comme $X^2 - U \in \mathbb{R}_1[X]^\perp$, on a en particulier :

$$\langle X^2 - U, 1 \rangle = 0,\ \langle X^2 - U, X \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\left\{ \begin{array}{rcl} \int_0^1 (x^2 - (\alpha x + \beta)) \cdot 1 \, dx & = & 0 \\ \int_0^1 (x^2 - (\alpha x + \beta)) \cdot x \, dx & = & 0 \end{array} \right.$ ou encore $\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\alpha}{2} + \beta & = & \frac{1}{3} \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} & = & \frac{1}{4} \end{array} \right.$ D'où $\alpha = 1$, $\beta = -\frac{1}{6}$, c'est-à- dire :

$$U(X) = X - \frac{1}{6}.$$

Or $U \perp X^2 - U$ donc

$$\begin{aligned} m &= \langle X^2 - U, X^2 - U \rangle = \langle X^2, X^2 - U \rangle - \langle U, X^2 - U \rangle = \langle X^2, X^2 - U \rangle \\ &= \langle X^2, X^2 - (X - \frac{1}{6}) \rangle = \int_0^1 x^2(x^2 - x + \frac{1}{6})\,dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{1}{18} = \frac{1}{180}. \end{aligned}$$

Remarque sur $\langle\, , \,\rangle$. On vérifie facilement que $\langle\, , \,\rangle$ est une forme symétrique, linéaire à gauche, et donc bilinéaire.
Soit $P \in E$. Comme $\begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & P^2(x) \end{array}$ est *continue* et positive, $\langle P, P \rangle = \displaystyle\int_0^1 P^2(x)\,dx \in \mathbb{R}^+$ et $\langle P, P \rangle = 0$ si et seulement si $\forall x \in [0,1],\ P^2(x) = 0$, c'est-à-dire ssi $\forall x \in [0,1],\ P(x) = 0$, donc ssi $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) = 0$, c'est-à-dire P est le polynôme nul, car le polynôme nul est le seul polynôme admettant une infinité de racines (à savoir ici tous les réels de $[0,1]$). Donc $\langle\, , \,\rangle$ est une forme positive et définie. En conclusion, $\langle\, , \,\rangle$ est bien un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 19'. Calculer $m = \displaystyle\inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \int_{-1}^1 (x^3 - (ax^2 + bx + c))^2\,dx$.

Indications : *i) Interprétation de m.* On munit $E = \mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire défini par :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,dx$$

(«définie-positivité» à détailler) et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire :

$$\forall P \in E,\ \|P\|^2 = \langle P, P \rangle = \int_{-1}^1 P(x)^2\,dx.$$

Soit U la projection orthogonale de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$. D'après le théorème de Pythagore :

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \|X^3 - P\|^2 \geq \|X^3 - U\|^2.$$

Ainsi m est la distance au carré du «vecteur» $X^3 \in E$ au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ de E :

$$m = \inf_{(a,b,c)\in\mathbb{R}^3} \|X^3 - (aX^2 + bX + c)\|^2 = \min_{P\in\mathbb{R}_2[X]} \|X^3 - P\|^2 = \|X^3 - U\|^2.$$

ii) Calcul de m. Posons $U(X) = \alpha X^2 + \beta X + \gamma$. Comme $X^3 - U \in \mathbb{R}_2[X]^\perp$, on a en particulier :

$$\langle X^3 - U, 1 \rangle = 0,\ \langle X^3 - U, X \rangle = 0,\ \langle X^3 - U, X^2 \rangle = 0.$$

D'où après calculs : $U(X) = \frac{3}{5}X$. Or $U \perp X^3 - U$ donc

$$I = \langle X^3 - U, X^3 - U \rangle = \langle X^3, X^3 - U \rangle = \langle X^3, X^3 - \frac{3}{5}X \rangle = \int_{-1}^1 x^3(x^3 - \frac{3}{5}x)\,dx = \int_{-1}^1 x^6\,dx - \frac{3}{5}\int_{-1}^1 x^4\,dx = \frac{8}{175}.$$

Exercice 21. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel noté $\langle\, , \,\rangle$. Soient $u_1 = (1,-1,1,1)$ et $u_2 = (5,1,-3,3)$.
On note F le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et p la projection orthogonale sur F.

1. Déterminer une base orthonormée de F.

2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Solution : **1.** Utilisons le procédé de Gram-Schmidt afin d'orthogonaliser la base (u_1, u_2) de F.
Posons $v_1 = u_1$ et $v_2 = u_2 - av_1 = u_2 - au_1$ où $a \in \mathbb{R}$. On a :

$$v_1 \perp v_2 \Leftrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \Leftrightarrow a = \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} = 1 \text{ car } \langle u_1, u_2 \rangle = 4 \text{ et } \|v_1\|^2 = 4.$$

La famille $(v_1, v_2) = (u_1, u_2 - u_1) = ((1,-1,1,1), (4,2,-4,2))$ est donc une base orthogonale de F.
Et la famille $(w_1, w_2) = (\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}) = (\frac{1}{2}(1,-1,1,1), \frac{1}{\sqrt{10}}(2,1,-2,1))$ est une base orthonormée de F.

2. Soit $u = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. La famille (w_1, w_2) étant une base orthonormée de F, on a :

$$\begin{aligned} p(u) &= \langle u, w_1 \rangle w_1 + \langle u, w_2 \rangle w_2 = \frac{1}{2}(x - y + z + t)w_1 + \frac{1}{\sqrt{10}}(2x + y - 2z + t)w_2 \\ &= \frac{1}{4}(x - y + z + t)(1,-1,1,1) + \frac{1}{10}(2x + y - 2z + t)(2,1,-2,1) \\ &= \frac{1}{20}\big((x - y + z + t)(5,-5,5,5) + (2x + y - 2z + t)(4,2,-4,2)\big) \\ &= \frac{1}{20}(13x - y - 3z + 9t, -x + 7y - 9z - 3t, -3x - 9y + 13z + t, 9x - 3y + z + 7t) \end{aligned}$$

La matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est donc : $A = \dfrac{1}{20}\begin{pmatrix} 13 & -1 & -3 & 9 \\ -1 & 7 & -9 & -3 \\ -3 & -9 & 13 & 1 \\ 9 & -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Remarque : Conformément au cours, A est une matrice symétrique en tant que matrice d'un endomorphisme symétrique de l'eve $\mathbb{R}^4$ dans une BON de $\mathbb{R}^4$. Et p étant une projection sur un sev F de dimension 2, on a : $A^2 = A$ et $\mathrm{tr}(A) = 2 = \dim \mathrm{Im}\, p$.

Exercice 26. *Soit $A = (a_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$. Prouver avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz usuelle dans $\mathbb{R}^{n^2}$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \leq n^{\frac{3}{2}}$.*

Solution : Soit $x = (x_1, \ldots, x_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $y = (y_1, \ldots, y_{n^2}) \in \mathbb{R}^{n^2}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^{n^2}$ s'écrit :

$$|x_1 y_1 + \cdots + x_{n^2} y_{n^2}| \leq (x_1^2 + \cdots + x_{n^2}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (y_1^2 + \cdots + y_{n^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

En particulier avec $x = (|a_{11}|, \ldots, |a_{nn}|) \in \mathbb{R}^{n^2}$ et $y = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n^2}$, on obtient :

$$|a_{11}| + \cdots + |a_{nn}| \leq (a_{11}^2 + \cdots + a_{nn}^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{n^2} = n(a_{11}^2 + \cdots + a_{nn}^2)^{\frac{1}{2}} = n \cdot n^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{3}{2}}$$

car la somme des carrés des coefficients de A est égale à n puisque la somme des carrés de chaque colonne de A est égale à 1.

Exercice 32. *Soit E un eve. Soit $f \in S(E)$ tel que $\forall x \in E$, $\langle f(x), x \rangle = 0$. Prouver que f est l'endomorphisme nul.*

Indications : Montrer que le spectre de f est $\{0\}$ et conclure avec le théorème spectral.

Exercice 33. *Soit E un eve. Soit $f \in S(E)$. Prouver que* $\mathrm{Ker}(f \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.

Solution : Il est bien connu que, pour tout endomorphisme de E, $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}(f \circ f)$.
Montrons maintenant que si $f \in S(E)$, $\mathrm{Ker}(f \circ f) \subset \mathrm{Ker}\, f$: Soit $u \in \mathrm{Ker}(f \circ f)$. Comme $f \in S(E)$,

$$\|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u) \rangle = \langle u, f(f(u)) \rangle = \langle u, (f \circ f)(u) \rangle = \langle u, 0_E \rangle = 0.$$

Donc $f(u) = 0_E$, c'est-à-dire $u \in \mathrm{Ker}\, f$. cqfd.

Exercice 35. *Soit $(E, (\,|\,))$ un espace vectoriel euclidien et $(u_1, \cdots, u_n)$ une base de E.*

1. *Vérifier que l'on définit bien un endomorphisme f de E en posant : $\forall x \in E$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (x|u_k) u_k$.*

2. *Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E et que ses valeurs propres sont strictement positives.*

3. *Justifier que f est bijective et montrer que f^{-1} est un endomorphisme symétrique de E.*

Solution : **1.** Sans difficultés. Utiliser la linéarité à gauche du produit scalaire.

2. *i*) Soit $(x, x') \in E^2$. On a d'une part par linéarité à gauche et symétrie du produit scalaire :

$$(f(x)|x') = (\sum_{k=1}^{n} (x|u_k) u_k | x') = \sum_{k=1}^{n} (x|u_k)(u_k|x') = \sum_{k=1}^{n} (x|u_k)(x'|u_k)$$

et par linéarité à droite du produit scalaire :

$$(x|f(x')) = (x| \sum_{k=1}^{n} (x'|u_k) u_k) = \sum_{k=1}^{n} (x'|u_k)(x|u_k).$$

Donc $(f(x)|x') = (x|f(x'))$. En conclusion, f est un endomorphisme symétrique de $(E, (\,|\,))$.

ii) Soit λ une valeur propre (réelle) de f et $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = \lambda x$. Alors $(f(x)|x) = (\lambda x|x) = \lambda \|x\|^2$. Comme $\|x\|^2 \neq 0$,

$$\lambda = \frac{(f(x)|x)}{\|x\|^2} = \frac{1}{\|x\|^2} \sum_{k=1}^{n} (x|u_k)^2.$$

On peut déjà affirmer que λ est positif. Montrons par l'absurde que λ n'est pas nul. Si $\lambda = 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $(x|u_k) = 0$. Décomposons le vecteur propre x dans la base $(u_1, \cdots, u_n)$: $x = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$. Alors par linéarité à droite du produit scalaire :

$$(x|x) = (x|x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n) = x_1 (x|u_1) + \cdots + x_n (x|u_n) = 0$$

d'où $x = 0_E$ (ce qui n'est pas le cas). En conclusion, les valeurs propres de f sont des réels strictement positifs.

3. i) Comme 0 n'est pas une valeur propre de f d'après 2., l'endomorphisme f est injectif et donc bijectif car E est de dimension finie.

ii) De plus f^{-1} est aussi un endomorphisme symétrique de $(E, (\,|\,))$ car, f étant symétrique, pour tout $(x, x') \in E^2$,

$$(f^{-1}(x)|x') = (f^{-1}(x)|f(f^{-1}(x'))) = (f(f^{-1}(x)|f^{-1}(x')) = (x|f^{-1}(x')).$$