Exercice 1. `[Algèbre linéaire et intégration].`

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = f(0)$ et $\forall x > 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, est continue sur $\mathbb{R}^+$.

$\triangleright$ On note T l'application de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ associant à chaque f l'application g définie ci-dessus.

2. Vérifier que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. T est-il injectif ? surjectif ?

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 - 3A - 5I_n = O_n$ où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que le déterminant de A est strictement positif.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 4. 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux distincts. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $UD = DU$. Prouver que U est une matrice diagonale.

2. Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = D$.
Indication : commencer par justifier qu'une telle matrice M est diagonale.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant comme valeurs propres -1 et 4.
Déduire de la question précédente qu'il y a exactement trois matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^3 - 2B = A$.

Exercice 1.

1. Posons pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée f, car F est l'unique primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction *continue* f, s'annulant en 0. On en déduit d'une part que g est continue (à droite) en 0 car

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(x)-F(0)}{x-0} = F'(0) = f(0) = g(0),$$

et d'autre part que g est continue sur $]0,+\infty[$ car dérivable sur $]0,+\infty[$ en tant que produit des deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$: $x \mapsto \frac{1}{x}$ et F. En conclusion, g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

2. *i) Linéarité de T.* Posons $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$. Soit $(u,v) \in E^2$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Vérifions que $T(au+bv) = aT(u)+bT(v)$, c'est-à-dire que, *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$, $T(au+bv)(x) = aT(u)(x) + bT(v)(x)$. On distingue les deux cas $x = 0$, $x > 0$:

D'une part, $T(au+bv)(0) = (au+bv)(0) = au(0) + bv(0) = aT(u)(0) + bT(v)(0)$ et si $x > 0$, par linéarité de l'intégrale,

$$T(au+bv)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (au(t)+bv(t))\,dt = a\,\frac{1}{x}\int_0^x u(t)\,dt + b\,\frac{1}{x}\int_0^x v(t)\,dt = aT(u)(x) + bT(v)(x).$$

ii) Injectivité de T. Déterminons le noyau de T. Soit $f \in E$. On a :

$$f \in \operatorname{Ker} T \text{ si est seulement si } f(0) = 0 \text{ et pour tout } x > 0,\ F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 0.$$

Par conséquent, si $f \in \operatorname{Ker} T$, $f(0) = 0$ et, en dérivant F, pour tout $x > 0$, $f(x) = F'(x) = 0$. Donc f est la fonction nulle θ sur $\mathbb{R}^+$ et comme la fonction nulle sur $\mathbb{R}^+$ appartient au noyau de T, $\operatorname{Ker} T = \{\theta\}$ et T est un endomorphisme injectif de E.

iii) T n'est pas surjective. On a remarqué précédemment que si $f \in E$, $T(f)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$. Donc une fonction de E qui n'est pas dérivable sur $]0,+\infty[$ n'admet pas d'antécédent par T. Considérons par exemple la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = |x-1|$. Comme h est continue sur $\mathbb{R}^+$, $h \in E$ mais comme h n'est pas dérivable en 1, il n'existe pas de fonction $f \in E$ telle que $T(f) = h$. Ainsi T n'est pas une surjection de E sur E.

Remarque : Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E n'est donc pas de dimension finie...

3. Comme T est injective, 0 n'est pas une valeur propre de T et on peut déjà remarquer que 1 est une valeur propre de T, l'espace propre $E_1(T)$ contenant les fonctions constantes (car si f est constante, $T(f) = f$)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. λ est une valeur propre de T s'il existe une fonction f *non nulle* de E telle que $T(f) = \lambda f$ $(*)$.

L'égalité $(*)$ est équivalente à : $f(0) = \lambda f(0)$ et $\forall x > 0$, $F(x) = \lambda x f(x)$ $(**)$ où $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Comme F, dérivable sur $]0,+\infty[$, de dérivée f, est d'après $(**)$ solution de l'équation différentielle : $y'(x) - \frac{1}{\lambda x} y(x) = 0$, $(*)$ implique qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $F(x) = c x^{\frac{1}{\lambda}}$ et donc, en posant $d = \frac{c}{\lambda}$, qu'il existe $d \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x > 0$, $f(x) = F'(x) = d x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ $(***)$.

Reprenons tout d'abord le cas $\lambda = 1$. D'après $(***)$ $E_1(T)$ est exactement constitué des fonctions constantes sur $\mathbb{R}^+$: $T(f) = f$ si et seulement si il existe $d \in \mathbb{R}$, $f(x) = d$.

Supposons que $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ soit une valeur propre de T. Une fonction propre f de $E_\lambda(T)$ étant continue (à droite) en 0, on doit avoir d'après $(***)$: $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \in \mathbb{R}$. Cette dernière égalité n'est possible que si $\frac{1-\lambda}{\lambda} > 0$, c'est-à-dire si $\lambda \in]0,1[$ (et dans ce cas $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} = 0$).

En conclusion, le spectre de T est l'intervalle $]0,1]$ avec, pour tout $\lambda \in]0,1]$, $E_\lambda(T) = \operatorname{Vect}(u_\lambda)$ où u_λ est la fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ définie par : $\forall x \geq 0$, $u_\lambda(x) = x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$.

Exercice 2. Soit $P(X) = X^3 - 3X - 5 \in \mathbb{R}[X]$.

i) Spectre complexe de A.

▷ Comme P est un polynôme annulateur de A, une valeur propre complexe de A ne peut être qu'une racine de P.

▷ On déduit du théorème des valeurs intermédiaires et de la stricte monotonie par intervalles de la fonction polynôme $P : x \mapsto P(x)$, que P admet une unique racine réelle strictement positive : $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto P(x)$, de dérivée

$$P' : x \mapsto 3(x^2-1) = 3(x-1)(x+1),$$

est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$ et $[1,+\infty[$, et strictement décroissante sur $[-1,1]$. Plus précisement, la restriction de P à $[1,+\infty[$ est une bijection continue strictement décroissante de $[1,+\infty[$ sur $]-7,+\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]-7,+\infty[$ tel que $P(\alpha) = 0$ et ce réel α est strictement positif car $P(0) = -5$. La restriction de P à $]-\infty,-1]$ est une bijection continue strictement croissante de $]-\infty,-1]$ sur $]-\infty,-3]$ donc ne s'annule pas sur $]-\infty,-1]$ et P ne s'annule pas sur $[-1,1]$ car $\forall x \in [-1,1]$, $P(x) \leq P(-1) = -3$.

▷ Comme P est un polynôme à coefficients réels de degré 3, ses deux autres racines β, $\overline{\beta}$ sont complexes conjuguées.

Le spectre complexe de A est donc *inclus* dans l'ensemble $\{\alpha,\beta,\overline{\beta}\}$.

ii) Expression de $\det(A)$ *en fonction des valeurs propres complexes de A et signe de* $\det(A)$.

Notons p l'ordre de multiplicité de la valeur propre β si β est bien une valeur propre de A, avec la convention que $p = 0$ si β n'est pas une valeur propre de A. Comme $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, si β est une valeur propre de A, alors $\overline{\beta}$ est aussi une valeur propre de A. De plus, β et $\overline{\beta}$ ont le même ordre de multiplicité (en tant que racines de $\chi_A(X)$).

La matrice A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on a (cf. cours) :

$$\det(A) = \alpha^{n-2p}\beta^p\overline{\beta}^p = \alpha^{n-2p}|\beta|^{2p} > 0$$

car $\alpha > 0$ et $\beta \neq 0$.

Remarques. *a)* A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car P annulateur de A est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$:
il existe donc $U \in GL_n(\mathbb{C})$ et $D \in D_n(\mathbb{C})$ telles que $A = UDU^{-1}$, les coefficients diagonaux de D étant α (q fois), β et $\overline{\beta}$ (p fois chacun) avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $q + 2p = n$.

b) Si $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\alpha\} = Sp_{\mathbb{R}}(A)$, $p = 0$ et $\det(A) = \alpha^n$; si $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\beta, \overline{\beta}\}$, n est pair et $\det(A) = |\beta|^n$; et si $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{\alpha, \beta, \overline{\beta}\}$, $\det(A) = \alpha^{n-2p}|\beta|^{2p}$ avec p non nul.

Exercice 3. *a)* Si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, f est injective et donc surjective car E est de dimension finie. Donc $\operatorname{Im} f = E$ et l'égalité demandée est clairement vérifiée : $E = \{0_E\} \oplus E$!

b) Si $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, alors f n'est pas injective et 0 est une valeur propre de f. Posons $\lambda_1 = 0$ et notons $\lambda_2, \cdots, \lambda_p$ les autres valeurs propres de f. Soit $u \in E$. Comme f est diagonalisable, $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$ et on a donc : $u = u_1 + \cdots + u_p$ avec $u_1 \in \operatorname{Ker} f$ et pour tout $i \in [\![2, p]\!]$, $u_i \in E_{\lambda_i}(f) \subset \operatorname{Im} f$ (car $u_i = f(\frac{1}{\lambda_i}u_i)$). Donc $u_2 + \cdots + u_p \in \operatorname{Im} f$ et $u \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

A ce stade du raisonnement, on a donc établi que $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$. Or $\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$ (théorème du rang), donc $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 4.

1. *Question très classique.* Posons $U = (u_{ij})$, $D = (d_{ij})$, $V = UD = (v_{ij})$ et $W = DU = (w_{ij})$.
Par hypothèse, $\forall i \neq j$, $d_{ij} = 0$. Donc :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik}d_{kj} = u_{ij}d_{jj} \text{ et } w_{ij} = \sum_{k=1}^{n} d_{ik}u_{kj} = d_{ii}u_{ij}.$$

Alors $V = W \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, u_{ij}d_{jj} = d_{ii}u_{ij} \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2 (d_{ii} - d_{jj})u_{ij} = 0$. Par conséquent,

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2,\ i \neq j \Rightarrow u_{ij} = 0 \text{ car par hypothèse } d_{ii} \neq d_{jj}.$$

Donc U est une matrice diagonale.

2. Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $M^3 - 2M = D$. Comme $M(M^3 - 2M) = M^4 - 2M^2 = (M^3 - 2M)M$, $MD = DM$ et d'après **1.** M est diagonale car les deux coefficients diagonaux de D sont distincts. Posons $M = \operatorname{diag}(u, v) \in D_2(\mathbb{R})$. Alors :

$$\begin{aligned} M^3 - 2M = D \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{diag}(u^3 - 2u, v^3 - 2v) = \operatorname{diag}(-1, 4) \\ &\Leftrightarrow \quad u^3 - 2u = -1 \text{ et } v^3 - 2v = 4 \\ &\Leftrightarrow \quad (u - 1)(u^2 + u - 1) = 0 \text{ et } (v - 2)(v^2 + 2v + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad u \in \{1, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\} \text{ et } v = 2. \end{aligned}$$

Notons pour simplifier $\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Il y a donc trois matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $M^3 - 2M = D$: les matrices diagonales $M_1 = \operatorname{diag}(1, 2)$, $M_2 = \operatorname{diag}(\alpha, 2)$, $M_3 = \operatorname{diag}(\beta, 2)$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. *On rappelle que si A admet n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$, alors A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (et chaque sous-espace propre est de dimension 1 sur $\mathbb{K}$) (condition suffisante de diagonalisabilité).*

Comme $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres réelles distinctes, A est donc diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Notons $D = \operatorname{diag}(-1, 4)$. Soit $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors par les propriétés du calcul matriciel :

$$B^3 - 2B = A \Leftrightarrow P^{-1}(B^3 - 2B)P = P^{-1}AP \Leftrightarrow P^{-1}B^3P - 2P^{-1}BP = D \Leftrightarrow C^3 - 2C = D$$

où d'après **2**. $C = P^{-1}BP \in \{M_1, M_2, M_3\}$. Il y a donc trois matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $B^3 - 2B = A$:
les matrices (deux à deux distinctes) $P \operatorname{diag}(1, 2)P^{-1}$, $P \operatorname{diag}(\alpha, 2)P^{-1}$, $P \operatorname{diag}(\beta, 2)P^{-1}$.