Exercice 1. `[2 points]` Soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ f(e_3) = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3.$$

Montrer que le polynôme caractéristique de f est le polynôme $X^3 - (a_3X^2 + a_2X + a_1)$.

Exercice 2. `[4 points]` Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle\, f, g\,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$.
$\triangleright$ On rappelle que $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace préhilbertien réel.
Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on note : $u_n(x) = (x^2 - 1)^n$, et $p_n(x) = u_n^{(n)}(x)$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de u_n).
Montrer que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\ ,\ \rangle)$.

Exercice 3. `[5 points]` On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel noté $\langle\ ,\ \rangle$.
Soient $u_1 = (1, -1, 1, 1)$ et $u_2 = (5, 1, -3, 3)$.
On note F le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et p la projection orthogonale sur F.
1. Déterminer une base orthonormée de F.
2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4. `[4 points]` Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que :

$$g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.$$

Exercice 5. `[6 points]` **1.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux distincts. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $UD = DU$. Prouver que U est une matrice diagonale.
2. Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = D$.
Indication : commencer par justifier qu'une telle matrice M est diagonale.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant comme valeurs propres -1 et 4.
Déduire de la question précédente qu'il y a exactement trois matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^3 - 2B = A$.