Exercice 1. `[5 points]` Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

• On utilisera **sans la redémontrer** la propriété de continuité croissante.

1. `[Propriété de la continuité décroissante]`
Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{A}$, décroissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$.
Démontrer que la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que :

$$P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (quelconque) de $\mathcal{A}$. Prouver que :

$$P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k).$$

Exercice 2. `[4 points]` 1. Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$,

2. Calcul de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Exercice 3. `[4 points]` Un joueur lance une pièce de monnaie jusqu'à obtenir pile. On note $p \in]0,1[$ la probabilité d'obtenir pile lors de chaque lancer. S'il lui a fallu n lancers pour obtenir pile, on lui fait tirer au hasard un billet de loterie parmi n billets dont un seul est gagnant.
• On note A_n l'événement : « il obtient pour la première fois pile lors du $n$ème lancer », B_n l'événement : « il tire le seul billet gagnant parmi les n billets proposés », et G l'événement : « le joueur gagne ».

Justifier que : $P(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B_n)$ et calculer $P(G)$.

Exercice 4. `[4 points]` Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$.

On considère la v.a. Y définie de la façon suivante :

▷ Si $X = k \in \mathbb{N}^*$, alors $Y = k$; et si $X = 0$, alors Y est égal (équiprobablement) à l'un des entiers de $\{1, \cdots, n\}$.

Calculer la loi de Y et son espérance. Vérifier que $E(Y) \geq E(X)$. Etait-ce prévisible avant d'effectuer les calculs ?

Exercice 5. `[4 points]` Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne accompagnée de deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?

2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ? *On utilisera la formule de Stirling.*

Bonus. `[1 point]` Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie. Justifier que $P(X > 0) \leq E(X)$.