Spé PC. **Préparation de l'interrogation de mathématiques n° 7 (24. 2. 2025)**

I. Algèbre linéaire.

Exercice 1. *Calcul d'un polynôme caractéristique.*
Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que :

$$f(e_1) = e_2,\ f(e_2) = e_3,\ \cdots,\ f(e_{n-1}) = e_n \text{ et } f(e_n) = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \text{ avec } (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Soit A la matrice de f dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$. Montrer que $\det(XI_n - A) = X^n - a_nX^{n-1} - \cdots a_2X - a_1$.
Indication : Soient $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de la matrice $XI_n - A$. Remplacer L_1 par $L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_n$. .

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors :

$$g \circ f = f \circ g \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.$$

Exercice 3. `[Algèbre linéaire et intégration].`

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Montrer que l'application g définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(0) = f(0)$ et $\forall x > 0,\ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, est continue sur $\mathbb{R}^+$.

▷ On note T l'application de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ associant à chaque f l'application g définie ci-dessus.

2. Vérifier que T est un endomorphisme de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. T est-il injectif ? surjectif ?

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T.

Exercice 4. **1.** Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à coefficients diagonaux distincts. Soit $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $UD = DU$. Prouver que U est une matrice diagonale.

2. Soit $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^3 - 2M = D$.
Indication : commencer par justifier qu'une telle matrice M est diagonale.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant comme valeurs propres -1 et 4.

Déduire de la question précédente qu'il y a exactement trois matrices $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^3 - 2B = A$.

II. Espaces préhilbertiens.

Exercice 5. Soient n et $p \in \mathbb{N}^*$, E un eve de dimension n et $e_1, \cdots, e_p$ p vecteurs unitaires tels que

$$\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{p} \langle\, x, e_k \,\rangle^2 \ (*).$$

1. Montrer que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille orthonormée de E.
2. Préciser $(\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p))^\perp$. En déduire que $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base orthonormée de E (et donc que $p = n$).

Exercice 6. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$. On pose, pour tout $(f, g) \in E^2$, $\langle\, f, g \,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$.

▷ On rappelle que $(E, \langle\,,\,\rangle)$ est un espace préhilbertien réel.

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1, 1]$, on note : $u_n(x) = (x^2 - 1)^n$, et $p_n(x) = u_n^{(n)}(x)$ (dérivée $n^{\text{ième}}$ de u_n).
Montrer que la famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $(E, \langle\,,\,\rangle)$.

Exercice 7. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire usuel noté $\langle\,,\,\rangle$. Soient $u_1 = (1, -1, 1, 1)$ et $u_2 = (5, 1, -3, 3)$.
On note F le plan vectoriel $\mathrm{Vect}(u_1, u_2)$ et p la projection orthogonale sur F.

1. Déterminer une base orthonormée de F.

2. Déterminer la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

Indications et/ou solutions.

`Solution de l'exercice 1.` Posons : $P_n(X) = X^n - (a_n X^{n-1} + \cdots + a_2 X + a_1)$. Commençons par étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$ en utilisant l'indication.

i) Cas $n = 2$. On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix}$. Donc

$$\chi_A(X) = \det(XI_2 - A) = \begin{vmatrix} X & -a_1 \\ -1 & X - a_2 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + XL_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & -a_1 + X(X - a_2) \\ -1 & X - a_2 \end{vmatrix} = -a_1 + X(X - a_2) = P_2(X).$$

ii) Cas $n = 3$. On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \end{pmatrix}$. Donc

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} X & 0 & -a_1 \\ -1 & X & -a_2 \\ 0 & -1 & X - a_3 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2 L_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -a_1 - a_2 X + X^2(X - a_3) \\ -1 & X & -a_2 \\ 0 & -1 & X - a_3 \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne du dernier déterminant :

$$\chi_A(X) = (-1)^{1+3}(-a_1 - a_2 X + X^2(X - a_3)) \begin{vmatrix} -1 & X \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = X^3 - (a_3 X^2 + a_2 X + a_1) = P_3(X).$$

iii) Cas général. On a : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$ et $\chi_A(X) = \det(XI_n - A) = \begin{pmatrix} X & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ -1 & X & 0 & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X - a_n \end{pmatrix}$.

L'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + XL_2 + X^2 L_3 + \cdots + X^{n-1} L_n$ donne :

$$\chi_A(X) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 - a_2 X - \cdots - a_{n-1} X^{n-2} + X^{n-1}(X - a_n) \\ -1 & X & 0 & \ddots & 0 & -a_2 \\ 0 & -1 & X & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X - a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & P_n(X) \\ -1 & X & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & -1 & X & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X & -a_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & X - a_n \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première ligne du dernier déterminant :

$$\chi_A(X) = (-1)^{1+n} P_n(X) \begin{vmatrix} -1 & X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & X & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+n} P_n(X)\,(-1)^{n-1} = P_n(X)$$

(le dernier déterminant, triangulaire d'ordre $n - 1$, étant égal à $(-1)^{n-1}$).

`Solution de l'exercice 2.`

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = f \circ g$. Soient λ une valeur propre de f et $x \in E_\lambda(f)$. On a :

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x),$$

c'est-à-dire $g(x) \in E_\lambda(f)$. Donc $E_\lambda(f)$ est stable par g.

Remarque : L'hypothèse de diagonalisabilité de f n'a pas été utilisée.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $E_{\lambda_k}(f)$ est stable par g. Comme f est diagonalisable, $E = E_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(f)$. *Soit $x \in E$ (quelconque).* Alors

$$\exists!(x_1, \dots, x_p) \in E_{\lambda_1}(f) \times \dots E_{\lambda_p}(f) \ \text{ tel que } x = x_1 + \cdots + x_p.$$

D'après les hypothèses de stabilité des sous-espaces propres de f, on a $\forall k \in \{1, \dots, p\}$, $g(x_k) \in E_{\lambda_k}(f)$, c'est-à-dire

$$f(g(x_k)) = \lambda_k \, g(x_k).$$

D'où, par linéarité de f et de g :

$$\begin{array}{rcl} f(g(x)) & = & f(g(x_1)) + \cdots + f(g(x_p)) \\ & = & \lambda_1 g(x_1) + \cdots + \lambda_p g(x_p) \\ & = & g(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p (x_p) \\ & = & g(f(x_1) + \cdots + f(x_p)) \\ & = & g(f(x)) \end{array}$$

donc $f \circ g = g \circ f$.