Semaine n° 13 du 6 janvier au 10 janvier 2025.

Espaces probabilisés.

Tribu, événement, espace probabilisable.
Probabilité sur un univers fini ou dénombrable, espace probabilisé. Propriétés d'une probabilité.
Probabilités conditionnelles et indépendance.

Variables aléatoires discrètes.

Loi de probabilité. La famille $(P(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$ qui détermine la loi de X.

Soit $E = \{x_n/n \in I\}$ un ensemble au plus dénombrable et $(p_n)_{n\in I}$ une distribution de probabilités sur E. Alors il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et une variable aléatoire X tels que : $X(\Omega) = E$ et $\forall n \in I$, $P(X = x_n) = p_n$ (admis).

Lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson.

Espérance d'une variable aléatoire discrète :

Révision : espérance d'une variable aléatoire finie. Espérance de la fonction indicatrice d'un événement.

Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ telle que $E(X) = 0$. Alors X est nulle presque sûrement : $P(X = 0) = 1$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, $E(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.

Variable aléatoire centrée. Une variable aléatoire bornée est d'espérance finie.

Propriétés de l'espérance :

Théorème ou Formule du transfert.

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que $|X| \leq Y$. Si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie.

Linéarité, positivité, croissance.

Inégalité de Markov.

Variable aléatoire dont le carré est d'espérance finie :

Soient X et Y des v.a. telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie. Alors XY est d'espérance finie.

Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Variance : définition et propriétés élémentaires. Ecart-type. Variable aléatoire centrée et réduite.

Inégalité de Tchebychev.

Expression de l'espérance et de la variance de v.a. suivant des lois usuelles (Bernoulli, Binômiale, géométrique, Poisson).

Semaine n° 14 du 13 janvier au 17 janvier 2025.

Variables aléatoires discrètes. Programme précédent et :

Couple de variables aléatoires : Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles. Indépendance.

Lemme des coalitions.

Indépendance mutuelle de v.a. Espérance d'un produit de v.a. mutuellement indépendantes.

Covariance. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.

Loi d'une somme de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant chacune une loi de Poisson (exercice).
Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des v.a. de Bernoulli de paramètre p, mutuellement indépendantes, alors $X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Loi faible des grands nombres.

Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$: définition et utilisation de la fonction (ou série) génératrice.