**Semaine n° 17 du 3 février au 7 février 2025.**

**Algèbre linéaire** : Programme précédent et :

• Pratique du déterminant d'ordre $n$ (révisions). Déterminant de Van der Monde.

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

• Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
Ordre de multiplicité d'une valeur propre.
Majoration de la dimension d'un sous-espace propre par l'ordre de multiplicité de la valeur propre.
Théorème de Cayley-Hamilton (admis).

• Endomorphisme et matrice diagonalisable : Définitions équivalentes.
Un endomorphisme est diagonalisable ssi son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$ et si, pour toute valeur propre, la dimension du sous-espace propre associé est égale à l'ordre de multiplicité de cette valeur propre.
Un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-ev $E$ de dimension finie admettant $\dim E$ valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$ est diagonalisable.
Calcul de puissances d'une matrice diagonalisable.

**Semaine n° 18 du 24 février au 28 février 2025.**

**Algèbre linéaire** : programme précédent et :

• Diagonalisabilité et polynômes annulateurs :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors $f$ est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de $f$ scindé et à racines simples.
Plus précisement :

$\triangleright$ Si $f$ est diagonalisable, alors $P(X) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de $f$.

$\triangleright$ S'il existe un polynôme annulateur de $f$ scindé à racines simples, alors $f$ est diagonalisable.

Résultats analogues avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en considérant l'endomorphisme canoniquement associé à $A$.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $f$. L'endomorphisme $f_F$ induit par $f$ sur $F$ est un endomorphisme diagonalisable de $F$.

• Endomorphisme et matrice trigonalisable :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{L}(E)$) est trigonalisable ssi $\chi_A$ (resp. $\chi_f$) est scindé dans $\mathbb{K}$ (théorème admis).
*La recherche d'une base de trigonalisation est guidée*

**Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens.**

Produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, inégalité de Cauchy-Schwarz (cas d'égalité), norme associée à un produit scalaire.

Orthogonalité : famille orthogonale, théorème de Pythagore, orthogonal d'une partie, d'un sev, procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Calculs en base orthonormée.

Supplémentaire orthogonal, projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie.