Devoir de mathématiques n° 10.

Exercice 1. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soient $a_1, \cdots, a_n$ n réels *distincts*.

1. *Rappels sur les polynômes d'interpolation de Lagrange associés à la liste* $(a_1, \cdots, a_n)$.

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$, on pose : $L_i(X) = \displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - a_k}{a_i - a_k}$.

1. a. Démontrer que $\mathcal{L} = (L_1, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

1. b. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Prouver que $P(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k(X)$.

2. On note B le polynôme $(X - a_1) \cdots (X - a_n)$. Soit $A \in \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne du polynôme $A(X)P(X)$ par le polynôme $B(X)$. Si Q est le quotient de la division euclidienne du polynôme $A(X)P(X)$ par le polynôme $B(X)$, on a donc :

$$A(X)P(X) = B(X)Q(X) + f(P). \tag{1}$$

2. a. Vérifier que $f(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ en utilisant (1) et l'unicité du reste d'une division euclidienne.

2. b. On note pour simplifier $R_i = f(L_i)$ où L_i est le polynôme défini en **1.**

Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Calculer $R_i(a_k)$. En déduire que $R_i(X) = A(a_i) L_i(X)$.

2. c. Justifier que f est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Préciser le spectre de f.

2. d. Prouver que f est bijectif si et seulement si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $A(a_i) \neq 0$.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 2$, dont le produit scalaire est noté $\langle\, ,\, \rangle$.

Soit $u_1, \ldots, u_n$ n vecteurs de E. On note $G(u_1, \ldots, u_n)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont le coefficient d'indice $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ est le produit scalaire $\langle\, u_i, u_j \,\rangle$:

$$G(u_1, \ldots, u_n) = (\langle\, u_i, u_j \,\rangle)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E. On considère l'endomorphisme f de E défini par :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = u_i.$$

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de f dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.

1. Justifier que $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \langle\, u_j, e_i \,\rangle$.

2. En déduire que $G(u_1, \ldots, u_n) = A^T A$ où A^T est la transposée de A.

3. Prouver que $\det G(u_1, \ldots, u_n) \geq 0$ et que $\det G(u_1, \ldots, u_n) = 0$ si et seulement si la famille $(u_1, \cdots, u_n)$ est liée.

Problème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. On pose, pour tout $P \in E$:

$$f(P) = (X^2 - 1)P''(X) + 2XP'(X) = ((X^2 - 1)P'(X))'.$$

1. Vérifier que $\forall P \in E$, $f(P) \in E$ et que $f \in \mathcal{L}(E)$.

2. a. Ecrire la matrice de f dans la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de E et déterminer les valeurs propres de f.

2. b. Justifier que f est diagonalisable.

3. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère les polynômes : $U_k(X) = (X^2 - 1)^k$ et $L_k(X) = U_k^{(k)}(X)$ (dérivée k-ième de U_k).

3. a. Vérifier que $(X^2 - 1)U_k'(X) - 2kXU_k(X) = 0$.

3. b. En déduire que $(X^2 - 1)U_k^{(k+2)}(X) + 2XU_k^{(k+1)}(X) - k(k+1)U_k^{(k)}(X) = 0$.

Indication : Dériver $(k+1)$ *fois le polynôme* $(X^2 - 1)U_k'$. *On rappelle la formule de dérivation de Leibniz :*

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2,\ (PQ)^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P^{(j)} Q^{(n-j)}.$$

3. c. Déduire de **3. b.** que $f(L_k) = k(k+1)L_k$. Préciser les sous-espaces propres de f.

4. On munit désormais $E = \mathbb{R}_n[X]$ du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ défini par : $\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle\, P, Q\,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,dx$.

• On admet que $\langle\, ,\, \rangle$ est un produit scalaire sur E et on note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle\, ,\, \rangle$.

4. a. Vérifier en intégrant par parties que $\forall (P,Q) \in E^2$, $\langle\, f(P), Q\,\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} (1-x^2)P'(x)Q'(x)\,dx$.

En déduire que $\langle\, f(P), Q\,\rangle = \langle\, P, f(Q)\,\rangle$. Quelle propriété de f retrouve-t-on ?

4. b. Démontrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de E. *Indication : utiliser 4. a. et 3. c.*

4. c. En déduire que : $\forall P \in E$, $\langle\, f(P), P\,\rangle \leq n(n+1)\|P\|^2$.

Partie facultative

Exercice 3. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^2) = 0$. Prouver que $\det(I_3 + A^2) = 1 + (\det(A))^2$.

Exercice 4. Soient E un espace euclidien, $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E et $u_1, \cdots, u_n$ des vecteurs de E tels que $\|u_1\|^2 + \cdots + \|u_n\|^2 < 1$. Montrer que la famille $(e_1 + u_1, \cdots, e_n + u_n)$ est une base de E.