Spé PC. Lycée Rabelais-Saint-Brieuc. Durée : 4 heures.
Samedi 8 mars 2025.

Devoir de mathématiques en temps limité n° 6.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 2A^2 - A$.

1. Quelles sont les valeurs propres éventuelles de A ?

2. En déduire que la trace de A est un entier naturel.

Exercice 2. Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. *Un produit scalaire sur E.*

1. a. Soit $U \in E$. Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} U(x)e^{-x}\,dx$.

1. b. Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^k e^{-x}\,dx$.

• On *admet* que l'on définit un produit scalaire sur E, noté $\langle\ ,\ \rangle$, en posant :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle\, P, Q\,\rangle = \int_0^{+\infty} P(x)Q(x)e^{-x}\,dx.$$

On munit désormais E du produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ et on note $\|\ \|$ la norme associée à $\langle\ ,\ \rangle$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose : $f(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (1 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n)^2 e^{-x}\,dx$.

Soit $F = \mathrm{Vect}(X, X^2, \ldots, X^n)$, U le polynôme constant égal à 1 et $V = b_1X + \cdots + b_nX^n$ la projection orthogonale de U sur F.

2. Justifier l'existence de V. Vérifier que $f(a_1, \ldots, a_n) = \|U - (a_1X + \cdots + a_nX^n)\|^2$ et démontrer en utilisant le théorème de Pythagore que :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n,\ f(a_1, \ldots, a_n) \geq \|U - V\|^2.$$

3. Montrer que : $\|U - V\|^2 = \langle\, U, U - V\,\rangle = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k k!$.

4. On considère le polynôme : $P(X) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k \prod_{j=1}^{k} (X + j)$.

4. a. Calculer $P(-1)$.

4. b. Soit $q \in [\![1, n]\!]$. Montrer que : $q!P(q) = q! - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k(q+k)! = \langle\, X^q, U - V\,\rangle = 0$.

4. c. Factoriser $P(X)$ et déduire de **3.** que $\|U - V\|^2 = \dfrac{1}{n+1}$.

Problème 1.

I. Matrice compagne d'un polynôme unitaire.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$, avec $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$.

La *matrice compagne* de ce polynôme P (unitaire et à coefficients complexes) est, par définition, la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, notée C_P, suivante :

$$C_P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

• *On pourra noter plus simplement C la matrice C_P. Exemple : si $P(X) = X^3 - 3iX^2 + 4X + 2$, $C_P = C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3i \end{pmatrix}$.*

1. Montrer que C_P est inversible si et seulement si $P(0) \neq 0$.

2. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$, dont la matrice dans la base canonique $(e_1, \cdots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ est la matrice compagne C_P.

2. a. Vérifier que $f^n(e_1) = -a_{n-1}f^{n-1}(e_1) - \cdots - a_1 f(e_1) - a_0 e_1$. En déduire que pour tout $i \in [\![2, n]\!]$,

$$f^n(e_i) = -a_{n-1}f^{n-1}(e_i) - \cdots + a_1 f(e_i) - a_0 e_i.$$

2. b. En déduire que $C_P^n + a_{n-1}C_P^{n-1} + \cdots + a_1 C_P + a_0 I_n = O_n$, où I_n (resp. O_n) est la matrice identité (resp. nulle) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. c. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si λ est une valeur propre de C_P, alors λ est une racine de P.

3. On note ${}^tC_P$ la transposée de la matrice C_P. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

3. a. Vérifier que ${}^tC_P\, X = \lambda X \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & \lambda x_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \lambda^{n-1} x_1 \\ P(\lambda) x_1 & = & 0 \end{array} \right.$.

3. b. *i*) En déduire que λ est une valeur propre de ${}^tC_P$ si et seulement si λ est une racine de P.

ii) Déterminer le sous-espace propre de ${}^tC_P$ associé à une valeur propre λ de ${}^tC_P$ et préciser sa dimension.

3. c. Justifier que ${}^tC_P$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ si et seulement si P admet n racines complexes distinctes.

4. *Calcul du polynôme caractéristique de C_P.* Montrer que $\det(XI_n - C_P) = P(X)$.

Indication : Soient $L_1, \cdots, L_n$ les lignes de la matrice $XI_n - C_P$. Remplacer L_1 par $L_1 + XL_2 + X^2L_3 + \cdots + X^{n-1}L_n$.

5. Retrouver à l'aide de 4. que λ est une valeur propre de ${}^tC_P$ si et seulement si λ est une racine de P.

II. Localisation des racines d'un polynôme unitaire.

Les deux premières questions sont indépendantes de la partie I.

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose : $r_i = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ et $D_i = \{z \in \mathbb{C} / \, |z| \leq r_i\}$.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, on note : $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \cdots, |x_n|)$.

On note $Sp_{\mathbb{C}}(A)$ le spectre complexe de A, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres complexes de A.

1. Soit λ une valeur propre complexe de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{n,1}\}$ une colonne propre associée à λ.

Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|\lambda|\, |x_i| \leq r_i \|X\|_\infty$.

2. En déduire que $Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

3. *Application.* Soient $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{C}_n[X]$ et z une racine complexe de P.

Montrer que $|z| \leq \max(|a_0|, 1 + |a_1|, 1 + |a_2|, \cdots, 1 + |a_{n-1}|)$.

Indications : Utiliser I. 4 et II. 2.

.

Problème 2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $D_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $GL_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$\triangleright$ On rappelle que pour tout $(A,B,C,D,A',B',C',D') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^8$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA'+BC' & AB'+BD' \\ CA'+DC' & CB'+DD' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

Préliminaire. Soit $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$.

Calculer et simplifier le produit de matrices par blocs :

$$\begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a'I_n & c'I_n \\ b'I_n & d'I_n \end{pmatrix}.$$

En déduire que $Q = \begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix} \in GL_{2n}(\mathbb{R})$ et préciser Q^{-1}.

Partie I. Soient $V = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B = \begin{pmatrix} 4A & 2A \\ -3A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que V est diagonalisable et déterminer $D \in D_2(\mathbb{R})$ et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}VP$.

2. On note $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ la matrice de la question **1.** Montrer, en considérant la matrice $Q = \begin{pmatrix} aI_n & cI_n \\ bI_n & dI_n \end{pmatrix}$ de la question préliminaire que B est semblable à la matrice $C = \begin{pmatrix} A & O_n \\ O_n & 2A \end{pmatrix}$ où O_n est la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: soient $\Delta \in D_n(\mathbb{R})$ et $R \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\Delta = R^{-1}AR$.

3. a. Calculer le produit de matrices par blocs $\begin{pmatrix} R^{-1} & O_n \\ O_n & R^{-1} \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} R & O_n \\ O_n & R \end{pmatrix}$.

3. b. En déduire que B est diagonalisable en déterminant une matrice $\mathcal{D} \in D_{2n}(\mathbb{R})$ semblable à B.

Partie II.

Soient $E = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \begin{pmatrix} 3A & -2A \\ 2A & -A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de E. Justifier que E n'est pas diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Justifier que E est trigonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}EP = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Prouver en procédant comme en Partie I. 2. que F est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ à $G = \begin{pmatrix} A & -2A \\ O_n & A \end{pmatrix}$.

4. Exprimer le polynôme caractéristique de G en fonction de celui de A. En déduire que F est trigonalisable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ si et seulement si A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Problème 3. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre n et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles orthogonales d'ordre n. Comme d'habitude, une matrice à une ligne et une colonne est identifiée à son unique coefficient.

$\triangleright$ Ce problème regroupe quelques propriétés des matrices symétriques réelles dont les valeurs propres sont positives.

Les questions 3 et 4 sont indépendantes de la question 2.

1. Soit $M \in S_n(\mathbb{R})$. Prouver que le spectre de M est inclus dans $[0, +\infty[$ si et seulement si

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ X^T M X \geq 0$$

où X^T est la matrice (ligne) transposée de la colonne X.

• *On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $S_n(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont positives.*

2. a. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $R \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$. *On admettra l'unicité d'une telle matrice R.*

2. b. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$. Vérifier que $A \in S_2^+(\mathbb{R})$ et déterminer $R \in S_2^+(\mathbb{R})$ telle que $R^2 = A$.

3. Soit $(A_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ telles que $\lim\limits_{p\to+\infty} A_p = L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $L \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Quelle propriété de $S_n^+(\mathbb{R})$ vient-on d'établir ?

4. Soient $A = (a_{ij}) \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $B = (b_{ij}) \in S_n^+(\mathbb{R})$. On considère la matrice $C = (c_{ij})$ où $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $c_{ij} = a_{ij} b_{ij}$.

Soient $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ (resp. $\mu_1, \cdots, \mu_n$) les valeurs propres (positives) de A (resp. de B) (non nécessairement distinctes).
Soient $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, $\Delta = \mathrm{diag}(\mu_1, \cdots, \mu_n)$, $P = (p_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$, $Q = (q_{ij}) \in O_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$A = PDP^T \text{ et } B = Q\Delta Q^T \text{ (théorème spectral).}$$

4. a. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Vérifier que $a_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} p_{ik}\lambda_k p_{jk}$, $b_{ij} = \sum\limits_{l=1}^{n} q_{il}\mu_l q_{jl}$ et $X^T C X = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j$.

Justifier que pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ik}\lambda_k p_{jk} q_{il}\mu_l q_{jl} x_i x_j \in \mathbb{R}^+$.

En déduire que $C \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k la matrice des puissances k-ième des coefficients de A : $A_k = (a_{ij}^k) \in S_n(\mathbb{R})$.
On pose : $A_0 = I_n$.

Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k \in S_n^+(\mathbb{R})$. En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $S_p := \sum\limits_{k=0}^{p} \dfrac{1}{k!} A_k \in S_n^+(\mathbb{R})$.

4. c. On note $U = (u_{ij}) \in S_n(\mathbb{R})$ la matrice dont les coefficients sont les exponentielles des coefficients de A :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ u_{ij} = e^{a_{ij}}.$$

Prouver que $U \in S_n^+(\mathbb{R})$.