Devoir de mathématiques n° 9.

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire discrète réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On suppose que X^2 est d'espérance finie et on note $V(X)$ la variance de X.

1. Soit $\epsilon > 0$. Prouver que, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P(X - E(X) \geq \varepsilon) \leq \dfrac{t^2 + V(X)}{(t+\varepsilon)^2}$.

Indication : considérer la variable aléatoire $(X - E(X) + t)^2$.

2. Etudier les variations sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction $f : t \mapsto \dfrac{t^2 + V(X)}{(t+\varepsilon)^2}$. En déduire que

$$P(X - E(X) \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}. \tag{1}$$

3. En considérant la variable aléatoire $-X$, déduire de (1) que $P(X - E(X) \leq -\varepsilon) \leq \dfrac{V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$.

4. *Inégalité de Tchebychev-Cantelli.* Prouver finalement que $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{2V(X)}{V(X) + \varepsilon^2}$.

5. Pour quelles valeurs de $\varepsilon > 0$ l'inégalité de Tchebychev-Cantelli est-elle plus précise que l'inégalité de Tchebychev ?

Exercice 2. Soient p et q deux réels de $[0, 1]$ tels que $(p, q) \neq (0, 0)$ et $(p, q) \neq (1, 1)$.
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(X_{n+1} = 1/X_n = 0) = p \text{ et } P(X_{n+1} = 0/X_n = 1) = q.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $Z_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$; et on note : $A = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_{n+1} = AZ_n$.

2. *Eléments propres de A et expression des puissances entières de A.*

2. a. Déterminer le spectre de A et préciser son cardinal.

2. b. Justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et déterminer $P \in GL_2(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ telles que $D = P^{-1}AP$.

2. c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer A^n.

3. Déduire des questions précédents que $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 0) = \dfrac{q}{p+q}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = 1) = \dfrac{p}{p+q}$.

Exercice 3. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les éléments propres de f. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

2. Déterminer les droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ et P le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne : $ax + by + cz = 0$.

Montrer que P est stable par f si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est une colonne propre de A^T.

4. Déterminer tous les plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 4. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $a \in \mathbb{R}$.
Soit f l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ f(P) = (X - a)P'(X) + P(a) - P(X).$$

1. Vérifier que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$ et déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Déterminer les valeurs propres de f.

3. Déterminer les sous-espaces propres de f.

Indication : remarquer que si P est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle, alors $P(a) = 0$.

4. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Partie facultative.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.
On considère : $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(E) / \operatorname{Im} f \subset F\}$.

1. Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. Soit $(e) = (e_1, \cdots, e_p, e_{p+1}, \cdots, e_n)$ une base de E telle que $(e_1, \cdots, e_p)$ soit une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que $f \in \mathcal{E}$ si et seulement si la matrice de f dans la base (e) appartient à un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont on donnera la dimension.

3. En déduire $\dim \mathcal{E}$.

Exercice 6. Si $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose $\|A\| = \max\limits_{1 \le j \le n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|$ et on note $\rho(A) = \max\limits_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} |\lambda|$ le plus grand module des valeurs propres complexes de A. On dit que $\rho(A)$ est le *rayon spectral* de A. On admet que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. *Un exemple.* Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ où $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer $\|A\|$ et $\rho(A)$.

2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$. Montrer que $\|AB\| \le \|A\| \, \|B\|$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\rho(A) \le \|A\|$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\rho(A^p) = (\rho(A))^p$.

5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Prouver que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.