

Bilans dans des écoulements parfaits et stationnaires

Sommaire

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique	2
I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif	2
I.2 Relation de Bernoulli	3
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait	7
II Bilan macroscopique de quantité de mouvement	8
II.1 Force exercée sur une canalisation coudée	8
II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque	9
III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique	11

Questions de cours

- Démontrer la relation de Bernoulli à partir du premier principe des fluides en écoulement stationnaire en présentant rigoureusement l'ensemble des hypothèses.
- Démontrer la relation de Bernoulli à partir de l'accélération convective écrite sous la forme $\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$ en présentant rigoureusement l'ensemble des hypothèses.
- Décrire l'effet Venturi : principe, applications.
- Sur l'exemple d'une canalisation coudée, présenter un bilan de quantité de mouvement. En déduire la force exercée sur la conduite.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter un bilan d'énergie cinétique à partir d'un système ouvert.

Prise de notes : Exemple de la pompe à essence : citerne enterrée sous la station service. Opérateur demande l'essence : démarrage d'une pompe pour amener l'essence dans le véhicule de l'opérateur. Problématique : quelle va être la puissance consommée par la pompe pour réaliser cette distribution ? Cet odg impacte forcément le choix de la pompe, son dimensionnement...



Objectifs du chapitre : réaliser des bilans d'énergie et de qté de mvt dans des fluides. Donc, on va avoir besoin des outils de thermo, de méca flu et de méca.

Comme on va construire des systèmes fermés entourant des éléments actifs (pompe par exemple), les bilans seront appelés **bilans macroscopiques**.

Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Connaître les hypothèses de la relation de Bernoulli, et l'appliquer sur de nombreux exemples pour comprendre sa praticité.
2. Passer d'un système ouvert (échange de matière du fait de l'écoulement) à un système fermé adapté aux bilans.
3. Effectuer un bilan de quantité de mouvement ou d'énergie cinétique, à un système fermé durant dt , en régime stationnaire.

Pour des soucis de simplification, ce chapitre se limite à l'étude de fluides en **écoulement parfait et stationnaire**.

Notation : Dans ce chapitre (et contrairement au chapitre T4), la vitesse du fluide sera notée v . On note v_{mass} le volume massique.

I Bilan macroscopique d'énergie : vision thermodynamique

I.1 Bilan d'énergie sur un dispositif actif

On considère que le fluide passe au travers d'un élément actif avec des pièces mobiles (pompe, turbine, etc) : le travail utile massique reçu par le fluide est noté $w_u \neq 0$.

Considérons un écoulement stationnaire. Isolons une ligne de courant. L'application du premier principe au fluide en écoulement entre deux points A et B de la ligne de courant de part et d'autre de l'élément actif conduit, en supposant un écoulement parfait, donc adiabatique ($q = 0$) :

$$[h + e_c + e_p]_A^B = w_u + q = w_u$$

On suppose de plus l'écoulement incompressible. Comme l'écoulement est parfait, il est aussi isentropique. Donc $du = Tds - Pdv_{mass} = 0$. Or, $h = u + Pv_{mass} = u + \frac{P}{\rho}$ avec

$\rho =$ cste la masse volumique, si l'écoulement est homogène. Donc $h_B - h_A = \frac{P_B}{\rho} - \frac{P_A}{\rho}$.



Enfin, si le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen où l'énergie potentielle de pesanteur est la seule énergie potentielle du fluide, en notant (Oz) l'axe vertical ascendant, on aboutit à la relation :

$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right]_A^B = w_u$$

Pour reformuler cette relation en terme de puissance utile P_u , il suffit de la multiplier par le débit massique :

$$D_m \left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz\right]_A^B = D_m w_u = \frac{\delta m}{dt} w_u = P_u$$



Application à la puissance d'une pompe

Considérons une pompe (altitude $z = 0$) qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $z = -h = -5$ m. On considère que l'eau dans le puits est quasiment statique, même lors du pompage. La section du tuyau avant la pompe est de $S = 100$ cm², et se réduit en sortie de la pompe à $s = 10$ cm². En considérant un débit volumique de $D_v = 10$ L s⁻¹, déterminer la puissance P_u de la pompe en régime stationnaire, sachant que la pression en sortie est de 2.5 bar.

Schéma du dispositif

On considère l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. Entre deux points A et B d'une ldc :

$$D_m \left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B \right) - \left(\frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A \right) = P_u$$

Le fluide dans le puits est quasi-statique : $P_A = P_0 - \rho g z_A$. Donc :



$$D_m \left(\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2} v_B^2 \right) - \left(\frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 \right) = P_u$$

De plus, par conservation du débit volumique : $D_v = S v_A = s v_B$. Et $D_m = \rho D_v$.
Finalement :

$$P_u = D_v \left(P_B - P_0 + \frac{1}{2} \rho D_v^2 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) \right) = 2.0 \text{ kW}$$

Odg cohérent ! (En tenant compte du rendement de conversion, il y a des chances que l'on atteigne une puissance électrique de 3 kW.)

I.2 Relation de Bernoulli

a Enoncé

En supposant l'absence de parties mobiles dans le fluide, $w_u = 0$, on aboutit, avec les mêmes hypothèses que précédemment, à :

$$\left[\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + g z \right]_A^B = 0$$

Relation de Bernoulli

Lorsque l'écoulement est **parfait, stationnaire, homogène, incompressible**, étudié dans un référentiel supposé **galiléen**, où la seule force volumique extérieure agissant sur le fluide est la **force de pesanteur** supposée uniforme, et où le fluide n'échange **pas de travail utile** avec l'extérieur, en considérant (Oz) l'**axe vertical ascendant** (♡!), la **relation de Bernoulli** est vérifiée sur une ligne de courant :

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g z = \text{cste}_{\text{ldc}}$$

Cette relation traduit la **conservation de l'énergie mécanique volumique**.

b Seconde démonstration de la relation de Bernoulli

On peut démontrer d'une autre façon la relation de Bernoulli.

Supposons un écoulement **parfait** où la seule force volumique extérieure agissant sur le fluide est la **force de pesanteur** supposée uniforme (donc pas de pièce mobile !). On oriente l'axe (Oz) vers le haut. Dans un référentiel **galiléen**, l'équation d'Euler (Navier-Stokes sans forces de viscosité) donne :

★

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho g \vec{e}_z$$

On suppose l'écoulement **stationnaire**, donc $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$.

Le formulaire d'analyse vectorielle fournit la relation suivante (à ne pas connaître) :

$$(\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v}$$

Donc :

$$\rho \left(\overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} \right) + \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho g \vec{e}_z = \vec{0}$$

On projette sur une ligne de courant de vecteur directeur $\vec{d}\ell$ colinéaire à \vec{v} :

$$\vec{d}\ell \cdot \left(\rho \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\|\vec{v}\|^2}{2} \right) + \overrightarrow{\text{grad}}(P) + \rho g \vec{e}_z \right) = 0$$

★

Supposons l'écoulement incompressible et homogène : $\rho = \text{cste}$. On peut alors reconnaître un gradient :

$$\vec{d}\ell \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + P + \rho g z \right) = 0$$

En intégrant entre deux points A et B d'une même **ligne de courant** :

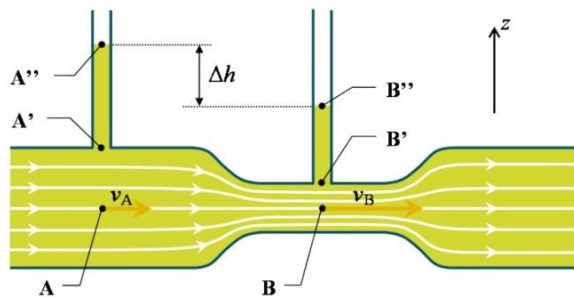
$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 + \rho g z_B$$

Relation de Bernoulli

c Exemples d'application

i) Effet Venturi

L'effet Venturi se manifeste lors du rétrécissement d'une conduite.



Considérons un fluide parfait en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Entre deux points d'une même ligne de courant, l'application de la relation de Bernoulli conduit à :

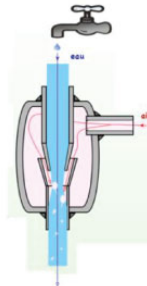
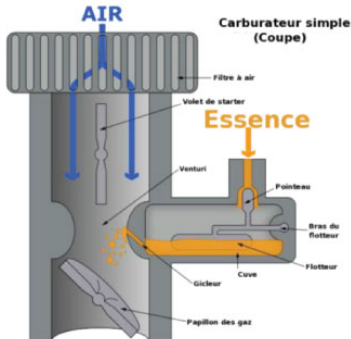
$$P_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho v_B^2 \iff P_B = P_A + \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$$

Or, par conservation du débit volumique : $v_B > v_A$. Donc : $P_B < P_A$

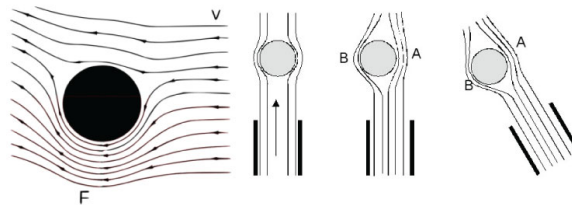
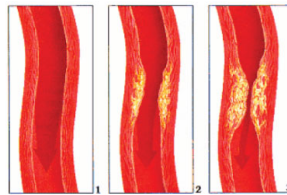
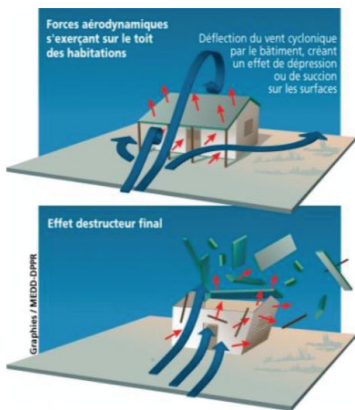
Pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène, un rétrécissement d'un tube de courant se traduit par une diminution de la pression. Cet effet se nomme **effet Venturi**.

De nombreux exemples peuvent être cités :

- dans le domaine technologique : l'injection d'essence dans le carburateur des voitures, la diminution de la portance des Formule 1, l'aspiration grâce à la trompe à eau en chimie, le fonctionnement de certains débitmètres, la portance des avions.



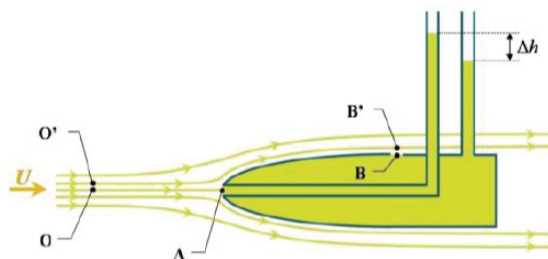
- manifestations "naturelles" : arrachement des toitures par grand vent, artériosclérose (diminution du diamètre des artères localement par accumulation de lipides et tissus fibreux pouvant conduire à une sténose artérielle, voire une thrombose = obstruction totale du flux sanguin), l'effet Magnus des ballons.



★ Manip de cours : balle de golf qui lévite. + Effet Magnus sur la balle des images ci-dessus.

ii) Mesure de vitesse : sonde de Pitot (= sonde de Prandtl)

Un tube de Pitot est un système simple permettant la mesure de la vitesse d'un véhicule à l'aide d'une mesure de pression différentielle : une mesure de pression latéralement à l'écoulement (en B) et une mesure de pression frontalement à l'écoulement en A. Le fluide ne pénètre pas dans le tube de Pitot en A.

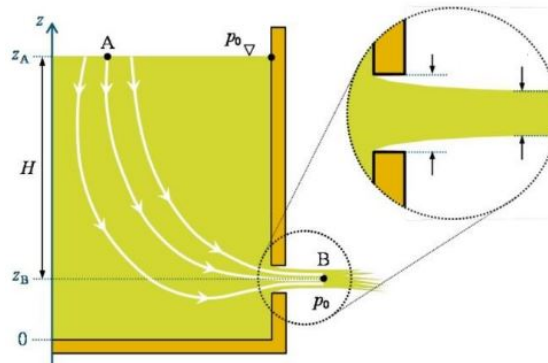


En appliquant le théorème de Bernoulli au fluide en écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène :

- sur la ligne de courant OA , avec $v_A = 0$ et pas de changement d'altitude : $P_A = P_O + \frac{1}{2}\rho v^2$ (mesure dynamique) ;
 - ★ sur la ligne de courant $O'B'$: on néglige la différence d'altitude (pièce de petite dimension) et de vitesse d'écoulement (tube de courant fin qui contient la ldc et qui garde la même surface), de sorte que $P_{O'} = P_{B'}$, soit comme les couples (B, B') et (O, O') sont proches, $P_B = P_O$ (mesure statique).
- Ainsi $P_A - P_B \simeq \frac{1}{2}\rho v^2$

iii) Vidange quasi-statique de réservoir

Étudions la vidange d'un réservoir dont la surface libre est de section S très grande devant la section s de l'orifice de sortie.



On considère un écoulement parfait, incompressible et homogène, mais instationnaire. Néanmoins, à partir du moment où la vitesse v_ℓ au niveau de la surface libre est très petite devant la vitesse v_s de sortie ($v_\ell S = v_s s$ dans le cas d'un écoulement incompressible conduisant, avec $s \ll S$, à $v_\ell \ll v_s$), on pourra considérer l'écoulement comme *quasi-stationnaire*.

On va donc pouvoir appliquer la relation de Bernoulli à une ligne de courant, entre A et B . La pression au niveau de la surface libre est $P_A = P_0$. On suppose également que la pression en B est égale à P_0 (jet libre, dont la pression est supposée constante sur une section, car on néglige la pesanteur sur le rayon du jet libre). Ainsi

$$\star \quad P_0 + \frac{1}{2}\rho v_\ell^2 + \rho g H(t) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + 0 \quad (\text{I.1})$$

conduit à la formule de Torricelli lorsqu'on néglige v_ℓ devant v_s :

$$\boxed{v_s = \sqrt{2gH(t)}} \quad (\text{I.2})$$

On peut alors conduire un calcul de temps de vidange du réservoir.

Exercice : Après avoir déterminé le lien entre $\frac{dH}{dt}$ et la vitesse v_s , intégrer l'équation différentielle obtenue pour en déduire le temps de vidange en fonction de la hauteur initiale du récipient H_0 .

On peut exprimer le lien entre v_ℓ et la dérivée de H : $v_\ell = -\frac{dH}{dt}$ (on définit une vitesse positive). Soit avec la conservation du débit :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{s}{S}v_s = -\frac{s}{S}\sqrt{2gH(t)} \quad (\text{I.3})$$

\star puis par séparation des variables :

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt \implies 2\left[\sqrt{H}\right]_{H_0}^0 = -\frac{s}{S\sqrt{2g}}\Delta t \quad (\text{I.4})$$

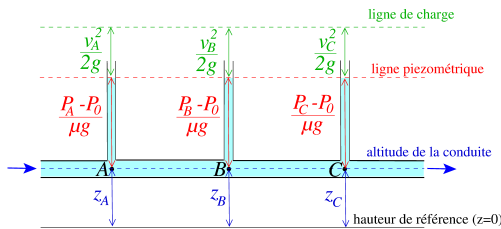
c'est-à-dire :

$$\boxed{\Delta t = \frac{S}{s}\sqrt{\frac{2H_0}{g}}} \quad (\text{I.5})$$

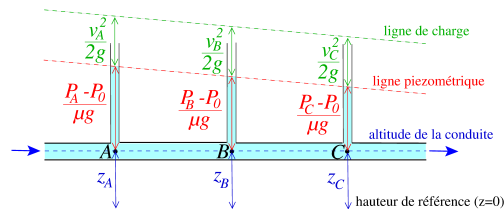
I.3 Validité du modèle de l'écoulement parfait

Afin de revenir sur la validité du modèle de l'écoulement parfait, prenons le cas simple d'une conduite de section constante, horizontale, avec un écoulement stationnaire, homogène et incompressible ($w_u = 0$).

Cas de l'écoulement parfait :



Cas de l'écoulement réel (et donc visqueux) (cf. chapitre MF3) :



Dans le cas d'un écoulement visqueux, la pression diminue le long de la conduite : on parle de perte de charges ΔP . Cette perte de charges est associée à une perte d'énergie volumique, liée à des actions intérieures résistives. Cela met en évidence un des principaux défauts du modèle de l'écoulement parfait :

Dans un écoulement parfait et incompressible, la puissance des actions intérieures est nulle.

\star *Prise de notes :* La loi de Bernoulli n'est plus valide dans un écoulement visqueux,

II Bilan macroscopique de quantité de mouvement

Pour un système ouvert, il est impossible d'appliquer directement la loi de la quantité de mouvement (= le PFD). On se ramène alors à un système fermé pour lequel on évalue la quantité de mouvement à l'instant t et à l'instant $t + dt$.

Dans le cours, nous allons traiter deux exemples qui rassemblent toutes les méthodes à maîtriser. L'hypothèse de fluide en écoulement parfait peut alors être utile pour :

- s'assurer que la vitesse est uniforme sur une section droite de l'écoulement, ce qui permet un calcul facile du débit volumique.
- appliquer la relation de Bernoulli.

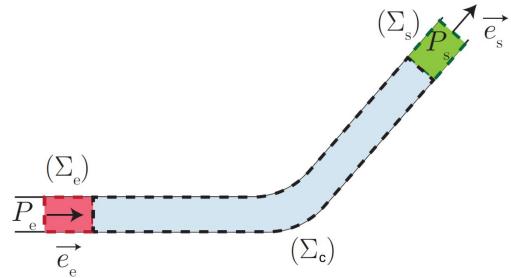
II.1 Force exercée sur une canalisation coudée

Étudions une canalisation coudée, avec un écoulement parfait, incompressible et homogène en régime stationnaire. La conduite est de section S constante. On cherche la résultante des forces $\vec{F}_{fluide \rightarrow can}$ que le fluide exerce sur une portion de canalisation.

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c), et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle pendant dt , de masse $\delta m_e = D_m dt$ et de vitesse \vec{v}_e ;
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c), et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle pendant dt , de masse $\delta m_s = D_m dt = \delta m_e$ et de vitesse \vec{v}_s ;



★ S'agissant d'un système fermé, on peut lui appliquer la loi de la quantité de mouvement, à la limite où dt tend vers 0 :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Les pressions sont notées P_e à l'entrée et P_s à la sortie. Elles sont uniformes sur les sections d'aire S . On note $\vec{e}_e = \frac{\vec{v}_e}{\|\vec{v}_e\|}$ et $\vec{e}_s = \frac{\vec{v}_s}{\|\vec{v}_s\|}$ les vecteurs unitaires orthogonaux aux sections à l'entrée et à la sortie.

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

Par additivité :

- à l'instant t , $\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t) + D_m dt \vec{v}_e$;
 - à l'instant $t + dt$, $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) + D_m dt \vec{v}_s$;
- En régime stationnaire, $\vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t)$, d'où :

$$\star \quad \vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)dt$$

Or, l'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique : $D_v = \|\vec{v}_e\| S = \|\vec{v}_s\| S \Rightarrow \|\vec{v}_e\| = \|\vec{v}_s\| = v$. Ainsi :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = D_m v(\vec{e}_s - \vec{e}_e)dt$$

iii) Bilan des forces extérieures

- Poids (négligé)
- Forces de pressions $\vec{F}_p = P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s$
- Résultante des forces de la canalisation sur le fluide $\vec{F}_{can \rightarrow fl} = -\vec{F}_{fl \rightarrow can}$ (attention : le système est le fluide !) (Pas de viscosité comme écoulement parfait, mais force de pression car coudé !)

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = D_m v (\vec{e}_s - \vec{e}_e) = P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s - \vec{F}_{fl \rightarrow can} \quad (II.1)$$

★

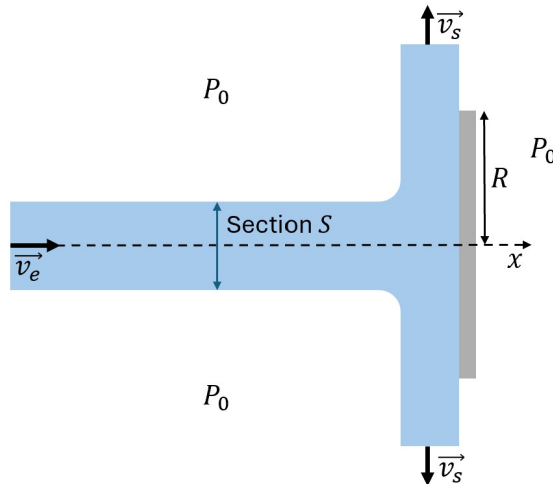
En négligeant l'influence de la pesanteur, la loi de Bernoulli donne : $P_e = P_s = P$.
Donc, avec $D_m = \rho D_v = \rho v S$:

$$\vec{F}_{fl \rightarrow can} = (P + \rho v^2) S (\vec{e}_e - \vec{e}_s) \quad (II.2)$$

II.2 Action d'un jet cylindrique sur une plaque

Etudions désormais une situation dans laquelle un jet d'eau cylindrique de section S est envoyé sur une plaque circulaire de rayon R . On note $\vec{v}_e = v_e \vec{e}_x$ la vitesse de l'eau en amont de la plaque. La pression atmosphérique P_0 est uniforme. L'écoulement est supposé incompressible et homogène, et on considérera la vitesse uniforme sur une section droite de l'écoulement. On réalise l'étude en régime stationnaire. On néglige la pesanteur.

Un opérateur maintient la plaque immobile. Quelle force $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$ l'opérateur doit-il alors exercer sur la plaque ?



a Une première résolution

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt$ à la vitesse \vec{v}_e).
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt$ à la vitesse \vec{v}_s).

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

Par additivité :

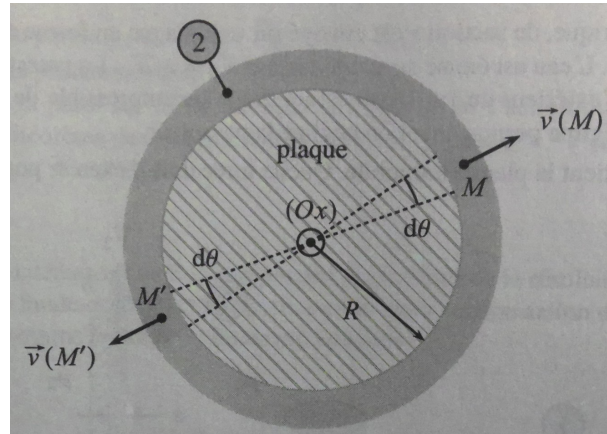
- à l'instant t : $\vec{p}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t) + \delta \vec{p}_e$
- à l'instant $t + dt$: $\vec{p}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt) + \delta \vec{p}_s$

En régime stationnaire : $\vec{p}_{\Sigma_c}(t) = \vec{p}_{\Sigma_c}(t + dt)$

En entrée : $\delta \vec{p}_e = D_m dt \vec{v}_e = (\rho v_e S) dt v_e \vec{e}_x = \rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$

En sortie, il faut faire attention au fait que la direction du vecteur vitesse \vec{v}_s dépend du point M considéré.

★



Du fait de la symétrie autour de l'axe (Oz) , $\delta \vec{p}_s = \vec{0}$.

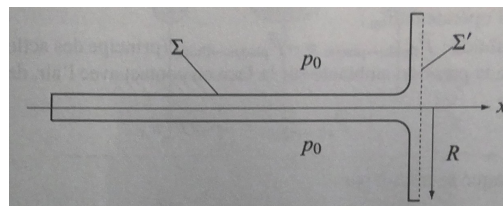
Ainsi :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = -\rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$$

iii) Bilan des forces extérieures

- Poids (négligé)
- Force de pression \vec{F}_p
- Force de la plaque sur le fluide $\vec{F}_{plaque \rightarrow fluide}$

Comment calculer la résultante des forces de pression \vec{F}_p ?



★

(Faire d'abord le schéma pour indiquer (S) et représenter $d\vec{S}$.)

On ne peut pas calculer directement $\vec{F}_p = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S}$ car on ne connaît pas la forme exacte de la surface de contrôle...

On utilise alors le fait que la pression P_0 est uniforme : sur une surface fermée, la résultante des forces de pression sera donc nulle. Considérons la surface fermée $(S) \cup (S')$. Dans la situation fictive où la pression P_0 entourerait cette surface fermée, on aurait alors :

$$\oiint_{(S) \cup (S')} P_0 d\vec{S} = \vec{0} = \iint_{(S)} P_0 d\vec{S} + \underbrace{\iint_{(S')} P_0 d\vec{S}}_{=-P_0 \pi R^2 \vec{e}_x}$$

Finalement :

$$\vec{F}_p = P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$$

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} &= \vec{F}_p + \vec{F}_{plaque \rightarrow fluide} \\ \Rightarrow -\rho S v_e^2 \vec{e}_x &= P_0 \pi R^2 \vec{e}_x + \vec{F}_{plaque \rightarrow fluide} \\ \Rightarrow \vec{F}_{plaque \rightarrow fluide} &= -(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x \end{aligned}$$

Réponse à la question posée

Pour rappel, on cherche la force $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$ que l'opérateur doit exercer sur la plaque. On va alors appliquer le PFD à l'équilibre sur la plaque (système fermé).

Bilan des forces extérieures :

- $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$
- $\vec{F}_{fluide \rightarrow plaque} = -\vec{F}_{plaque \rightarrow fluide} = +(\rho S v_e^2 + P_0 \pi R^2) \vec{e}_x$ d'après le principe des actions réciproques
- $\vec{F}_{air \rightarrow plaque} = -P_0 \pi R^2 \vec{e}_x$

Le PFD appliqué dans le référentiel terrestre galiléen donne donc :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{F}_{fluide \rightarrow plaque} + \vec{F}_{op \rightarrow plaque} + \vec{F}_{air \rightarrow plaque} \\ \Rightarrow \vec{F}_{op \rightarrow plaque} &= -\rho S v_e^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

b Une deuxième résolution

- ★ *Prise de notes :* Ce qui rend la résolution précédente particulièrement longue est la détermination de $\vec{F}_{plaque \rightarrow fluide}$. On peut résoudre le problème posé sans déterminer cette force en incluant la plaque dans le système : la force précédente devient alors une force intérieure, inutile dans l'application du PFD !

i) Définition d'un système fermé

- ★
- à l'instant t : $(\Sigma_c) \cup (\Sigma_e) \cup (\text{plaque})$
 - à l'instant $t + dt$: $(\Sigma_c) \cup (\Sigma_s) \cup (\text{plaque})$

ii) Variation de la quantité de mouvement de (Σ) durant dt

- ★ Identique, car la plaque est immobile : $\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = -\rho S v_e^2 dt \vec{e}_x$

iii) Bilan des forces extérieures

- ★
- Poids (négligé)
 - Résultante des forces de pression \vec{F}_p . La surface totale du système étant fermée et en contact avec la pression uniforme P_0 : $\vec{F}_p = \vec{0}$.
 - Force de l'opérateur sur la plaque $\vec{F}_{op \rightarrow plaque}$

iv) Application du PFD dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned} \frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} &= \vec{F}_{op \rightarrow plaque} \\ \Rightarrow \vec{F}_{op \rightarrow plaque} &= -\rho S v_e^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

III Bilan macroscopique d'énergie cinétique : vision mécanique

Pour terminer ce chapitre, nous allons de nouveau effectuer un bilan d'énergie sur un dispositif actif, mais en utilisant cette fois la loi de l'énergie cinétique. Cette vision mécanique (plutôt que thermodynamique) du problème convient, car l'écoulement étudié étant parfait, l'énergie interne des particules de fluide se conserve au cours de leur mouvement.

Reprenons l'exemple de la pompe puisant l'eau au fond d'un puits de profondeur $z_e = -h$. La pompe étant posée sur le sol, l'altitude de sortie $z_s = 0$. L'eau dans le puits étant quasi-statique, on en déduit que la pression en entrée du tuyau de pompage est $P_e = P_0 + \rho gh$ avec P_0 la pression atmosphérique. En sortie de pompe, la pression est P_s . La section du tuyau avant la pompe est S et se réduit à s en sortie de pompe. On suppose l'écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible. On note D_v le débit volumique de l'écoulement (qui se conserve). On cherche la puissance utile P_u que la pompe fournit au fluide.

i) Définition d'un système fermé

On définit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_e) entrant dans la surface de contrôle durant dt (masse entrante $\delta m_e = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse \vec{v}_e).
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide (Σ_s) sortant de la surface de contrôle durant dt (masse sortante $\delta m_s = D_m dt = \rho D_v dt$ à la vitesse \vec{v}_s).

Le système étant fermé, on va pouvoir appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre t et $t + dt$:

$$dE_c + dE_p = E_c(t + dt) - E_c(t) + E_p(t + dt) - E_p(t) = \delta W_{nc}$$

★



Le système est déformable (fluide !), donc δW_{nc} est le travail de toutes les forces non conservatives, y compris les forces **intérieures**.

On admet alors le résultat suivant :

Puissance des forces intérieures pour un écoulement parfait et incompressible

Pour un écoulement **parfait** et **incompressible**, la puissance des forces intérieures au fluide est nulle.

ii) Variation de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de (Σ) durant dt

Par additivité :

- à l'instant t , $E_c(t) = E_{c,\Sigma_c}(t) + \delta E_{c,e}$
 - à l'instant $t + dt$, $E_c(t + dt) = E_{c,\Sigma_c}(t + dt) + \delta E_{c,s}$
- En régime stationnaire : $E_{c,\Sigma_c}(t) = E_{c,\Sigma_c}(t + dt)$. Donc :

★

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = \delta E_{c,s} - \delta E_{c,e} = \frac{1}{2} \rho D_v dt v_s^2 - \frac{1}{2} \rho D_v dt v_e^2$$

$$\text{Or, } D_v = v_e S = v_s s. \text{ Donc : } E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2} \rho D_v^3 dt \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right)$$

On raisonne de manière similaire pour l'énergie potentielle, liée ici seulement à l'énergie potentielle de pesanteur.

Par additivité :

- à l'instant t , $E_p(t) = E_{p,\Sigma_c}(t) + \delta E_{p,e}$
- à l'instant $t + dt$, $E_p(t + dt) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt) + \delta E_{p,s}$

En régime stationnaire : $E_{p,\Sigma_c}(t) = E_{p,\Sigma_c}(t + dt)$.

Donc :

$$E_p(t + dt) - E_p(t) = \delta E_{p,s} - \delta E_{p,e} = \delta m_s g z_s^0 - \delta m_e g z_e = \rho D_v dt gh$$

iii) Bilan des travaux non conservatifs

- Forces de pression : $\delta W_p = P_e S v_e dt - P_s s v_s dt = (P_e - P_s) D_v dt$
- ★ Force de la pompe sur le fluide : $\delta W_{pompe \rightarrow fluide} = P_u dt$
- Forces intérieures au fluide, de puissance nulle, car l'écoulement est parfait et incompressible

iv) Application du TEC dans le référentiel terrestre galiléen

$$\begin{aligned} E_c(t + dt) - E_c(t) + E_p(t + dt) - E_p(t) &= \delta W_p + \delta W_{pompe \rightarrow fluide} \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \rho D_v^3 dt \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) + \rho D_v dt gh &= (P_e - P_s) D_v dt + P_u dt \\ \Rightarrow P_u &= (P_s - P_0) D_v + \frac{1}{2} \rho D_v^3 \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right) \end{aligned}$$

On retrouve bien la même expression que celle déterminée avec la vision thermodynamique du bilan d'énergie.

Ex. 1 **Mesure du temps : la clepsydre** (*Ecrit E3A-Polytech PSI 2024*)



Figure 4 – Clepsydre

Les candidats réalisent des épreuves en durée limitée, mesurée à l'aide d'une clepsydre. Utilisée depuis l'Antiquité, la clepsydre est une horloge reposant sur la vidange d'un récipient contenant de l'eau colorée qui s'écoule à travers un petit orifice sous l'effet de la gravité.

On considère tout d'abord un écoulement d'eau dans un récipient cylindrique, percé d'un orifice en $z = 0$ et placé dans l'air atmosphérique à pression P_0 (voir figure 5, à gauche). On note S la section du cylindre, $s \ll S$ la section de l'orifice, $h(t)$ la hauteur d'eau dans le récipient à l'instant t , ρ la masse volumique de l'eau, \vec{g} l'accélération de la pesanteur, $V(t)$ la vitesse de l'interface eau/air dans le cylindre et $v(t)$ la vitesse de l'eau s'écoulant à travers l'orifice.

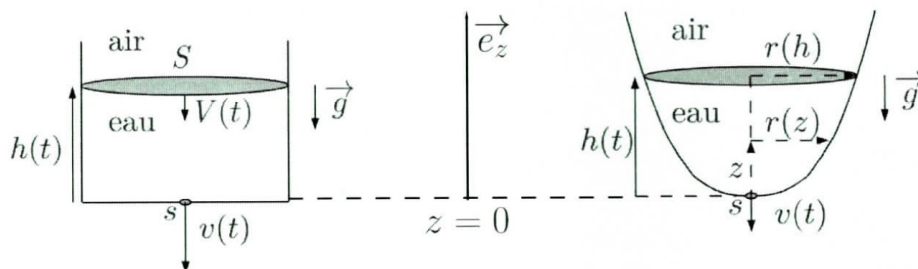


Figure 5 – À gauche : vidange d'un récipient cylindrique. À droite : schéma de la clepsydre

Q10. Rappeler la relation de Bernoulli ainsi que ses conditions d'application. On suppose ces conditions remplies dans la suite.

Q11. En exploitant l'hypothèse $s \ll S$, établir l'expression de $v(t)$ en fonction de g et de $h(t)$.

Q12. L'écoulement étant supposé incompressible, en déduire l'expression de $V(t)$ en fonction de S , s , g et de $h(t)$. Préciser **qualitativement** le sens d'évolution de $V(t)$ lors de la vidange.

On attend d'une horloge à eau que le niveau d'eau baisse à vitesse constante dans le récipient, malgré la diminution du débit dans le temps. On souhaite adapter la forme du récipient afin de satisfaire cette condition (voir figure 5, à droite). Le profil de la clepsydre, à symétrie de révolution, s'écrit :

$$\forall z > 0, \quad r(z) = K z^{1/n} \quad \text{avec} \quad K > 0 \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

Q13. En supposant que l'expression de $v(t)$ obtenue à la **question Q11** reste valable, montrer que l'évolution de $h(t)$ est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi K^2} \frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}} \quad (2)$$

Q14. Sans chercher à résoudre cette équation différentielle, déterminer la valeur de l'entier n en imposant que dh/dt ne dépende pas du temps. En déduire l'unité de K .

Q15. Trouver la valeur de K permettant d'assurer une vitesse constante $|dh/dt| = 1,0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$.

Données pour la partie II
Accélération de la pesanteur : $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
Section de l'orifice : $s = 1,0 \text{ cm}^2$

Correction de l'exercice 1

10. Pour un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible, dans le champ de pesanteur dans un référentiel galiléen, alors, entre deux points A et B d'une même ligne de courant :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g z_A = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g z_B$$

11. On applique la relation de Bernoulli entre un point à l'interface eau/air et un point au niveau de l'orifice de sortie :

$$P_0 + \frac{1}{2}\rho V(t)^2 + \rho g h(t) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v(t)^2 + 0$$

en considérant que la pression de l'eau au niveau de l'orifice de sortie est la pression atmosphérique (jet libre). L'écoulement étant incompressible, il y a conservation du débit volumique $SV(t) = sv(t)$. Comme $s \ll S$, alors $V(t) \ll v(t)$. On simplifie alors la relation de Bernoulli précédente et on obtient :

$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}$$

12. L'écoulement étant incompressible : $SV(t) = sv(t)$, d'où

$$V(t) = \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}$$

Lors de la vidange, $h(t)$ diminue, donc $V(t)$ diminue : le débit volumique est de moins en moins fort.

13. On appelle à nouveau $V(t)$ la vitesse de l'interface eau/air. On a donc toujours (cf. Q12) : $V(t) = \frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)}$ avec $S = \pi r(h)^2 = \pi K^2 h^{2/n}$ la surface de l'interface eau/air.

Or, $V(t)$ est relié à la variation de la hauteur d'eau dans la clepsydre : $V(t) = -\frac{dh}{dt}$. Donc :

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{s\sqrt{2gh(t)}}{\pi K^2 h^{2/n}}$$

14. $\frac{dh}{dt}$ sera indépendant du temps si $\frac{\sqrt{h}}{h^{2/n}}$ ne dépend pas du temps, i.e. ne dépend pas de h . Cela implique que $n = 4$.

En reprenant l'équation de $r(z)$, on en déduit que K est en $m^{3/4}$.

15. Ainsi, on a : $\frac{dh}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g}}{\pi K^2}$. Donc :

$$K = \sqrt{\frac{s\sqrt{2g}}{\pi \left| \frac{dh}{dt} \right|}} = 0.38 \text{ m}^{3/4}$$

Ex. 2 Tornade (*Ecrit CCINP PSI 2021*)

Remarque : Pour ce sujet, la calculatrice était interdite. Je vous conseille donc de réaliser cet exercice sans calculatrice.

Donnée : Masse volumique de l'air dans les conditions ambiantes $\rho_0 = 1.2 \text{ kg m}^{-3}$

On peut modéliser simplement une tornade (**photo 3**) en considérant l'air comme un fluide parfait en écoulement stationnaire et incompressible de masse volumique ρ_0 . Cet écoulement est qualifié de rotationnel à l'intérieur d'un cylindre C d'axe Oz et de rayon R_T . On définit le vecteur tourbillon $\vec{\omega}$, tel que : $\overline{\text{rot}}(\vec{v}) = 2\vec{\omega}$.

On a : $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$, avec $\begin{cases} \omega = \omega_0 & \text{pour } r < R_T \\ \omega = 0 & \text{pour } r > R_T \end{cases}$



Photo 3 - Tornade

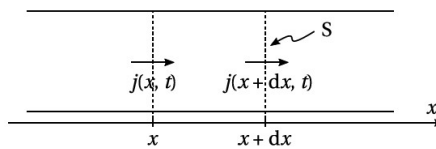
- Q21.** Énoncer les deux équations de Maxwell pour un champ magnétique en régime permanent.
- Q22.** Établir l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension. Par analogie, on admettra l'équation locale de conservation de la masse pour un fluide en écoulement : $\text{div}(\mu\vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$.
- Q23.** Que devient l'équation locale de conservation de la masse dans le cadre d'un écoulement stationnaire incompressible ? Par analogie avec l'électromagnétisme ou par application du théorème de Stokes, proposer une formulation analogue au théorème d'Ampère en régime permanent qui permet de déterminer le champ des vitesses \vec{v} en tout point de l'espace.
- Q24.** Déterminer le vecteur vitesse \vec{v} en tout point de l'espace et tracer l'allure de la courbe $v(r)$.
- Q25.** Rappeler les hypothèses d'application du théorème de Bernoulli. On suppose que ces hypothèses sont valables dans la zone $r > R_T$. En considérant la pression de l'air égale à P° loin du cyclone, préciser l'expression de la pression $P(R_T)$ à la surface de la tornade, en fonction de P° , ρ_0 , ω_0 et R_T .
- Q26.** Évaluer dans le cadre de ce modèle simplifié la dépression $\Delta P = P^\circ - P(R_T)$ pour des vents de 180 km/h à la surface de la tornade en R_T .
- Q27.** La masse d'une tuile en terre cuite est d'environ 2,8 kg. Le faible recouvrement offre une densité surfacique de masse réduite de la couverture, de l'ordre de $40 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-2}$. Justifier de la nécessité du collage des tuiles sur le toit dans les zones particulièrement ventées.

Correction de l'exercice 2

21. Les équations relatives au champ magnétostatique s'écrivent :

$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{B}) &= 0 \quad (\text{Maxwell-Thomson}) \\ \operatorname{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \cdot \vec{j} \quad (\text{Maxwell-Ampère}). \end{aligned}$	■ (34)
--	--------

22. Soit une tranche de conducteur comprise entre x et $x + dx$.



▲ Figure C6. Schéma de principe.

Entre t et $t + dt$, il entre par le plan d'abscisse x une charge :

$$\delta Q_{\text{entrant}} = j(x, t) \cdot S \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (35)$$

tandis qu'il sort par le plan d'abscisse $x + dx$ une charge :

$$\delta Q_{\text{sortant}} = j(x + dx, t) \cdot S \cdot dt. \quad \blacksquare \quad (36)$$

La variation globale de charge s'écrit donc, au premier ordre en dx et en dt :

$$dQ = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = -\frac{\partial j}{\partial x}(x, t) \cdot S \cdot dx \cdot dt. \quad \blacksquare \quad (37)$$

Cette variation peut également s'exprimer de façon plus directe :

$$dQ = Q(t + dt) - Q(t) = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t)) \cdot S \cdot dx = \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, t) \cdot S \cdot dx \cdot dt, \quad \blacksquare \quad (38)$$

soit en identifiant les deux relations :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0.} \quad \blacksquare \quad (39)$$

23. Pour un écoulement incompressible, $\operatorname{div}(\mu \cdot \vec{v}) = \mu \cdot \operatorname{div}(\vec{v})$, tandis que pour un écoulement stationnaire, $\partial \mu / \partial t = 0$, donc pour un écoulement incompressible et stationnaire :

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{v}) = 0.} \quad \blacksquare \quad (40)$$

Soit un contour fermé Γ de l'espace et soit une surface \mathcal{S} s'appuyant sur Γ , orientée dans le sens direct par rapport à celui-ci. D'après le théorème de Stokes,

$$\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\vec{v}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\mathcal{S}} 2 \cdot \vec{\omega} \cdot d\vec{S}, \quad \blacksquare \quad (41)$$

soit :

$$\boxed{\oint_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2 \cdot \iint_{\mathcal{S}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}.} \quad \blacksquare \quad (42)$$

24. On utilise les coordonnées cylindriques d'axe (O_z) . Le champ de vecteur tourbillon est invariant par rotation autour de l'axe (O_z) ainsi que par translation le long de cet axe, donc le champ des vitesses \vec{v} de dépend que de r . Par ailleurs, pour un point M donné de l'espace, le plan tangent à l'axe (O_z) et passant par M est un plan de symétrie pour le champ de vecteur tourbillon. Par analogie avec le champ magnétique, on en déduit que c'est un plan d'antisymétrie pour le champ des vitesses, si bien que finalement,

$$\boxed{\vec{v}(M) = v(r) \cdot \vec{e}_{\theta}.} \quad \blacksquare \quad (43)$$

Soit \mathcal{C} le cercle d'axe (O_z) passant par $M(r, \theta, z)$, orienté dans le sens direct par rapport à \vec{e}_z , et soit \mathcal{D} le disque inscrit dans le cercle, orienté dans le sens direct par rapport à celui-ci.

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{v} \cdot d\vec{\ell} = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot v(r). \quad \blacksquare \quad (44)$$

Par ailleurs, si $r < R_T$,

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \pi \cdot r^2 \cdot \omega_0, \quad \blacksquare \quad (45)$$

tandis que si $r \geq R_T$,

$$\iint_{\mathcal{D}} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \pi \cdot R_T^2 \cdot \omega_0. \quad \blacksquare \quad (46)$$

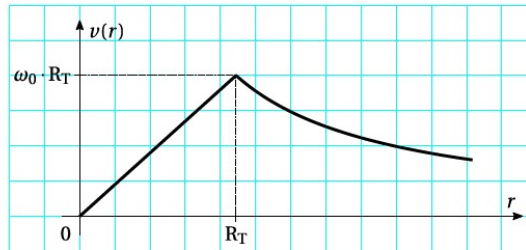
On applique le théorème établi à la question précédente. Si $r < R_T$, alors $2 \cdot \pi \cdot r \cdot v(r) = 2 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \omega_0$, soit :

$$\vec{v}(M) = \omega_0 \cdot r \cdot \vec{e}_r. \quad \blacksquare \quad (47)$$

Si $r \geq R_T$, alors :

$$\vec{v}(M) = \frac{\omega_0 \cdot R_T^2}{r} \cdot \vec{e}_r. \quad \blacksquare \quad (48)$$

On donne l'allure du profil de vitesse sur la Fig. C7.



▲ Figure C7. Profil de vitesse (allure).

25. *Théorème de Bernoulli.* Soit un fluide parfait en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Alors le long d'une ligne de courant,

$$\frac{\mu \cdot v^2}{2} + \mu \cdot g \cdot z + p = \text{constante}. \quad \blacksquare \quad (49)$$

Soit une ligne de courant entre un point à la surface du cyclone et un autre de même altitude situé loin du cyclone. La relation de Bernoulli s'écrit :

$$\frac{\rho_0 \cdot v^2(R_T)}{2} + \rho_0 \cdot g \cdot z + p(R_T) = 0 + \rho_0 \cdot g \cdot z + p^\circ, \quad \blacksquare \quad (50)$$

soit :

$$p(R_T) = p^\circ - \frac{\rho_0 \cdot v^2(R_T)}{2} = p^\circ - \frac{\rho_0 \cdot R_T^2 \cdot \omega_0^2}{2}. \quad \blacksquare \quad (51)$$

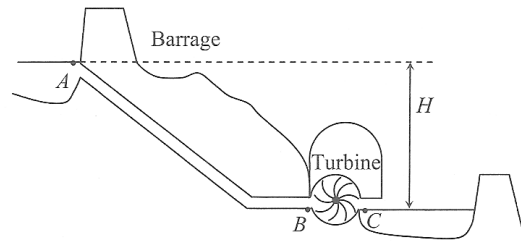
26. La dépression s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\rho_0 \cdot v^2(R_T)}{2} = \frac{1,2 \cdot 180^2}{3,6^2 \cdot 2} = \frac{180^2}{3 \cdot 3,6 \cdot 2} = \frac{180 \cdot 60 \cdot 3}{3 \cdot 3 \cdot 1,2 \cdot 2} \\ &= \frac{180 \cdot 10}{1,2} = \frac{3 \cdot 60 \cdot 10}{1,2} = \underline{1500 \text{ Pa}}. \end{aligned} \quad \blacksquare \quad (52)$$

27. La densité surfacique de poids vaut environ $400 \text{ N} \cdot \text{m}^2 = 400 \text{ Pa}$, donc la dépression engendrée par une tornade l'emporte largement sur la gravité, d'où la nécessité de fixer les tuiles!

Ex. 3 Étude simplifiée d'un barrage

Lors de la phase de vidange du barrage de Grand'Maison, l'eau s'écoule dans une conduite forcée reliant le lac de retenue en amont de Grand'Maison à la retenue du Verney en aval. La conduite a une longueur de 1450 m. Elle se termine par un coude la ramenant à l'horizontal pour alimenter une turbine Pelton qui assure la conversion d'une partie de l'énergie potentielle de l'eau en énergie cinétique de rotation de la turbine. Dans cet exercice, on négligera l'effet du coude sur l'écoulement. La conduite a un diamètre constant de 3 mètres. La vitesse dans la conduite est $v = 3,6 \text{ m.s}^{-1}$. L'écoulement étudié est stationnaire.



La viscosité dynamique de l'eau dans la conduite est prise égale à $\eta = 1,8.10^{-3} \text{ Pa.s}$, sa masse volumique est $\rho = 1,0.10^3 \text{ kg.m}^{-3}$. La hauteur de chute est prise égale à $H = 922 \text{ mètres}$.

1. On suppose l'écoulement parfait, incompressible et homogène. En un point A à la surface de la retenue amont, la vitesse est supposée nulle. Déterminer la pression P_B au point B .
2. On suppose pour simplifier qu'en sortie de la turbine Pelton au point C , la pression est égale à la pression atmosphérique et la vitesse est négligeable. En considérant que la Pelton a un rendement de 75 %, quelle est la puissance disponible sur l'arbre de la turbine ?

Correction de l'exercice 3

1. L'écoulement dans la conduite est supposé parfait, quasi-stationnaire, homogène et incompressible. On applique alors le théorème de Bernoulli sur une ligne de courant entre A et B :

$$P_B + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z_B = P_A + \rho g z_A \iff P_{B,\text{parfait}} = P_A + \rho g H - \frac{1}{2}\rho v^2 = 91 \text{ bar} \quad (\text{Ex.1})$$

2. Vu qu'il y a un travail utile échangé entre le fluide et la turbine, la relation de Bernoulli n'est pas applicable. On réalise alors un bilan d'énergie entre B et C , pour le fluide supposé parfait, en écoulement stationnaire, incompressible et homogène. Il y a deux façons de procéder :

Méthode A : Utilisation du premier principe des fluides en écoulement stationnaire

Pas de variation de l'énergie potentielle massique entre B et C (même altitude). Variation d'enthalpie massique : $du = Tds - Pdv_{\text{mass}} = 0$ car l'écoulement est parfait (évolution isentropique) et incompressible. Donc, $dh = v_{\text{mass}}dP = \frac{dP}{\rho}$. L'écoulement étant de plus homogène $\rho = \text{cste}$.

L'écoulement étant stationnaire, le premier principe des fluides en écoulement stationnaire entre B et C (même ligne de courant) donne :

$$\frac{P_C}{\rho} - \frac{P_B}{\rho} - \frac{1}{2}v^2 = w_u \Rightarrow D_m \left(\frac{P_C}{\rho} - \frac{P_B}{\rho} - \frac{1}{2}v^2 \right) = D_m w_u = -P_{\text{utile fluide}}$$

avec $D_m = \rho D_v = \rho v S = \rho v \pi \frac{D^2}{4}$ où D_v est le débit volumique à travers la section S de la conduite et D le diamètre de la conduite. On en déduit : $P_{\text{utile fluide}} = 2.3 \times 10^8 \text{ W}$. Enfin, sachant que le rendement de la turbine Pelton est de 75 %, on en déduit la puissance disponible sur l'arbre de rotation : $P_{\text{disponible}} = 1.7 \times 10^8 \text{ W}$, ce qui est un bon odg pour une centrale hydroélectrique.

Méthode B : Utilisation d'un bilan d'énergie cinétique sur un système fermé

On construit un système fermé (Σ) tel que :

- à l'instant t , il soit constitué du volume de contrôle (Σ_c) contenant le fluide entre B et C et du volume de fluide (Σ_e) entrant en B pendant dt .
- à l'instant $t + dt$, il soit constitué de (Σ_c) et du volume de fluide sortant (Σ_s) en C pendant dt .

Variation de l'énergie cinétique pendant dt (pas de variation d'énergie potentielle de (Σ)) : Par additivité :

- $E_c(t) = E_{c,(\Sigma_c)}(t) + \frac{1}{2}D_m dt v^2 = E_{c,(\Sigma_c)}(t) + \frac{1}{2}\rho \pi \frac{D^2}{4} v^3 dt$
- $E_c(t + dt) = E_{c,(\Sigma_c)}(t + dt)$

Or, l'écoulement étant stationnaire : $E_{c,(\Sigma_c)}(t) = E_{c,(\Sigma_c)}(t + dt)$. Donc :

$$E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{D^2}{4} v^3 dt$$

Puissance des forces non conservatives s'exerçant sur (Σ) :

- Puissance des forces intérieures nulle, car l'écoulement est parfait.
- Puissance des forces extérieures de pression : $P_p = P_B D_v - P_C D_v$ car $D_v = S v = \frac{\pi D^2}{4} v$ se conserve (écoulement incompressible)
- Puissance que la turbine fournit au fluide : $-P_{\text{utile fluide}}$

Ainsi, le théorème de la puissance cinétique dans le référentiel de la conduite galiléen :

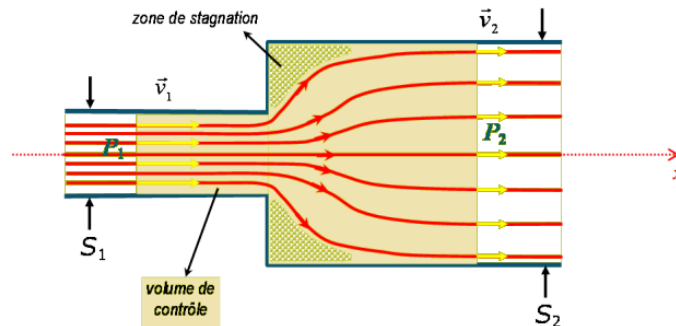
$$\frac{E_c(t + dt) - E_c(t)}{dt} = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{D^2}{4} v^3 = \pi \frac{D^2}{4} v (P_B - P_C) - P_{\text{utile fluide}} \Rightarrow P_{\text{utile fluide}} = \pi \frac{D^2}{4} v \left(P_B - P_C - \frac{1}{2} \rho v^2 \right)$$

soit la même expression qu'avec la méthode A.

Ex. 4 Perte de charge singulière dans un évasement

Le but de cet exercice est d'évaluer la perte de charge singulière $\Delta P_c = \left(P_1 + \frac{1}{2} \mu v_1^2 \right) - \left(P_2 + \frac{1}{2} \mu v_2^2 \right)$ pour un écoulement non parfait, lorsqu'une canalisation change brutalement de section. On néglige la pesanteur. On précise qu'on ne considère pas les forces de viscosité de la conduite sur le fluide.

L'écoulement est stationnaire et incompressible. La masse volumique du fluide est $\mu = cte$. On note P_1, S_1, v_1 les pressions, sections, vitesses à l'entrée, P_2, S_2, v_2 à la sortie.



L'écoulement fait apparaître des zones de stagnation dans lesquelles on considérera que la vitesse est nulle. Le volume de contrôle représenté sur le schéma ne contient pas les zones de stagnation.

1. On admet que la pression dans les zones de stagnation est proche de la pression d'entrée P_1 . Montrer que la résultante des forces de pression s'exerçant sur le volume de contrôle peut s'écrire $\vec{F}_p = (P_1 - P_2) S_2 \vec{e}_x$.
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement, déterminer une autre expression de cette force en fonction des vitesses et sections d'entrée et de sortie et de la masse volumique μ .
3. Déterminer la perte de charge en fonction de la vitesse d'entrée v_1 et des sections d'entrée et de sortie S_1 et S_2 . Effectuer l'application numérique pour l'eau, dans le cas d'une multiplication par deux du rayon d'une conduite cylindrique, pour $v_1 = 3 \text{ m/s}$.

Correction de l'exercice 4

1. Le volume de contrôle est soumis à une résultante des forces de pression uniquement horizontale, les forces de pression verticales s'annulent deux à deux. Sur la portion verticale de canalisation, si le fluide exerce la force $P_1(S_2 - S_1)(-\vec{e}_x)$ sur la canalisation, alors par le principe des actions réciproques, la canalisation exerce la force opposée sur le fluide. Il reste alors :

$$\vec{F}_p = P_1 S_1 \vec{e}_x + P_1 (S_2 - S_1) \vec{e}_x - P_2 S_2 \vec{e}_x = (P_1 - P_2) S_2 \vec{e}_x \quad (\text{Ex.2})$$

2. En considérant un système fermé usuel constitué uniquement de fluide (à t volume de contrôle + entrant pendant dt , à $t + dt$ volume de contrôle + ce qui sort pendant dt), on peut écrire un bilan de quantité de

mouvement en régime stationnaire :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \delta m_2 \vec{v}_2 - \delta m_1 \vec{v}_1 + \underbrace{\vec{p}_{\text{contrôle}}(t + dt) - \vec{p}_{\text{contrôle}}(t)}_{=0} \quad (\text{Ex.3})$$

En utilisant le débit volumique : $\delta m_1 = D_m dt = D_v \mu dt = v_1 S_1 \mu dt$. Résultat similaire pour δm_2 . On en déduit :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \mu (v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) dt \vec{e}_x$$

En appliquant la loi de la quantité de mouvement, il vient :

$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_p \implies \vec{F}_p = \mu (v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) \vec{e}_x \quad (\text{Ex.4})$$

3. Par identification :

$$\mu (v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) = (P_1 - P_2) S_2$$

puis en utilisant la conservation du débit volumique en régime permanent, $v_2 S_2 = v_1 S_1$, conduisant à :

$$P_1 - P_2 = \mu v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (\text{Ex.5})$$

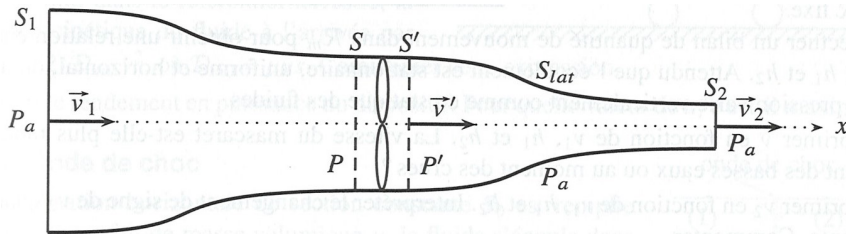
En écrivant enfin la différence entre la pression totale à l'entrée et à la sortie :

$$\Delta P_c = P_1 + \frac{1}{2} \mu v_1^2 - P_2 - \frac{1}{2} \mu v_2^2 = \frac{1}{2} \mu v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} + 1 - 2 \frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{\mu v_1^2}{2} \left(1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \quad (\text{Ex.6})$$

A.N. : $\Delta P_c = 2.5 \times 10^{-2}$ bar, ce qui est souvent négligeable devant les différences de pressions mises en jeu dans un écoulement industriel (qq bars)

Ex. 5 Fonctionnement d'une hélice

Une hélice animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe (Ox) est plongée dans un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ . L'étude est faite dans le référentiel galiléen \mathcal{R} lié à l'axe de l'hélice. Dans ce référentiel, l'écoulement est stationnaire. On néglige la pesanteur.



On considère un tube de courant possédant la symétrie de révolution autour de l'axe (Ox) et s'appuyant sur l'extrémité des pales de l'hélice. À partir de ce tube de courant, on définit la surface fermée constituée de la surface latérale du tube de courant S_{lat} , et des sections droites S_1 en amont et S_2 en aval. La pression à l'extérieur de ce tube de courant est uniforme et égale à la pression ambiante P_a .

Sur la surface S_1 , la vitesse est uniforme et égale à $v_1 \vec{e}_x$; elle vaut $v_2 \vec{e}_x$ sur S_2 .

Au voisinage de l'hélice, on considère deux sections S et $S' = S$ d'aire identique :

- sur la surface S , la vitesse est $v \vec{e}_x$ et la pression est P ;
- sur la surface S' , la vitesse est $v' \vec{e}_x$ et la pression est P' .

Entre S et S' , l'écoulement est perturbé : il existe une discontinuité de pression de part et d'autre de l'hélice.

1. Exprimer les pressions P et P' en fonction de P_a , ρ , v_1 , v_2 , v et v' .
2. On note \vec{F} la résultante des forces exercées par l'hélice sur le fluide. Effectuer un bilan de quantité de mouvement sur un système fermé à définir et faisant intervenir le volume de contrôle compris entre S et S' . Exprimer \vec{F} en fonction de ρ , S , v_1 et v_2 .

3. En prenant un autre système fermé à définir et faisant cette fois intervenir le volume de contrôle entre S_1 et S_2 , établir l'expression de \vec{F} en fonction de ρ , S_1 , v_1 , v_2 et v .
4. Dédire de ce qui précède une relation simple entre v , v_1 et v_2 .
5. Faire un bilan d'énergie cinétique sur l'un des systèmes fermés définis précédemment. En déduire la puissance \mathcal{P} fournie par l'hélice au fluide en fonction du débit massique D_m , de v_1 et de v_2 .

Correction de l'exercice 5

Exercice inspiré du Dunod, Physique PSI/PSI, 6e édition, exo 14.6*

1. L'écoulement est parfait, stationnaire, homogène et incompressible. On peut donc appliquer la loi de Bernoulli **dans les zones de l'espace où il n'y a aucun travail utile échangé avec le fluide**, c'est-à-dire sur une ligne de courant entre S_1 et S , ou sur une ligne de courant entre S' et S_2 :

$$P_a + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2 \iff P = P_a + \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v^2)$$

puis

$$P' = P_a + \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v'^2)$$

2. On souhaite avoir la force exercée par l'hélice sur le fluide, on exclut donc l'hélice du système fermé. On définit donc le système fermé (Σ) tel que :
 - à t , (Σ) contienne $(\Sigma_c)(t)$ le fluide entre S et S' + le fluide entrant pendant dt dans ce volume de contrôle
 - à $t + dt$, (Σ) contienne $(\Sigma_c)(t + dt)$ le fluide entre S et S' + le fluide sortant pendant dt dans ce volume de contrôle
 On calcule les quantités de mouvement à t et $t + dt$, par extensivité :

$$\begin{aligned} \vec{p}(t) &= \vec{p}_c(t) + \delta m_e v \vec{e}_x & \text{avec } \delta m_e &= \rho S v dt \\ \vec{p}(t + dt) &= \vec{p}_c(t + dt) + \delta m_s v' \vec{e}_x & \text{avec } \delta m_s &= \rho S v' dt \end{aligned}$$

où \vec{p}_c est la quantité de mouvement du fluide dans le volume de contrôle. Comme l'écoulement est stationnaire :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \rho S dt (v'^2 - v^2) \vec{e}_x$$

Or, par conservation du débit volumique (écoulement incompressible) : $Sv = Sv' \Rightarrow v = v'$. Donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$

Avec un bilan des forces sur le système défini, on aboutit, avec la loi de la quantité de mouvement dans le référentiel terrestre galiléen, à :

$$\vec{0} = \vec{F} + (P - P') S \vec{e}_x \Rightarrow \vec{F} = S(P' - P) \vec{e}_x$$

d'où avec la Q. 1 :

$$\vec{F} = \frac{1}{2} \rho S (v_2^2 - v_1^2) \vec{e}_x$$

3. Sur le même principe, on définit le système fermé (Σ') tel que :
 - à t , (Σ') contienne $(\Sigma'_c)(t)$ le fluide entre S_1 et S_2 + le fluide entrant pendant dt dans ce volume de contrôle
 - à $t + dt$, (Σ') contienne $(\Sigma'_c)(t + dt)$ le fluide entre S_1 et S_2 + le fluide sortant pendant dt dans ce volume de contrôle
 Par des calculs similaires, on aboutit à :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \rho dt (S_2 v_2^2 - S_1 v_1^2) \vec{e}_x$$

Avec la conservation du débit volumique : $S_1 v_1 = S_2 v_2$. Donc :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1) \vec{e}_x$$

Enfin, comme la pression est uniforme sur toute la surface fermée délimitant (Σ') , le PFD dans le référentiel terrestre galiléen donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} = \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1) \vec{e}_x$$

4. Par identification entre les expressions des Q. 2 et 3, on aboutit à :

$$\frac{1}{2}\rho S(v_2^2 - v_1^2) = \rho S_1 v_1 (v_2 - v_1) \stackrel{\text{car } v_1 \neq v_2}{\iff} \frac{1}{2}S(v_2 + v_1) = S_1 v_1$$

Par conservation du débit volumique $S_1 v_1 = S v$. Donc :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

5. Prenons par exemple le système fermé (Σ). Bilan d'énergie cinétique : Par extensivité :

$$\begin{aligned} E_c(t) &= E_{c,\text{contrôle}}(t) + \frac{1}{2}\rho S v dt v^2 \\ E_c(t + dt) &= E_{c,\text{contrôle}}(t + dt) + \frac{1}{2}\rho S v dt v^2 \end{aligned}$$

car $v' = v$. Puis, en utilisant le fait que l'écoulement soit stationnaire ($E_{c,\text{contrôle}}(t) = E_{c,\text{contrôle}}(t + dt)$), on arrive à : $\frac{dE_c}{dt} = 0$. On applique alors le théorème de la puissance cinétique à (Σ) dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\frac{dE_c}{dt} = 0 = \mathcal{P}_{\text{forces extérieures}} + \underbrace{\mathcal{P}_{\text{forces intérieures}}}_{=0 \text{ car fluide parfait}}$$

Sur le système (Σ), les deux forces extérieures qui travaillent sont les forces de pression extérieures et la force de l'hélice sur le fluide.

Puissance des forces de pression, agissant sur les sections droites en amont et en aval de (Σ) (sur la surface latérale, elles ne travaillent pas) :

$$\mathcal{P}_p = P S v - P' S v = S v (P - P') = \frac{1}{2}\rho S v (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{2}D_m (v_1^2 - v_2^2)$$

On en déduit la puissance de l'hélice sur le fluide :

$$\mathcal{P} = -\mathcal{P}_p = \frac{1}{2}D_m (v_2^2 - v_1^2) > 0$$

L'hélice est donc motrice ici (cas d'une hélice de bateau par exemple).

Remarque : En raisonnant sur (Σ'), on trouve :

$$\frac{dE'_c}{dt} = \frac{1}{2}\rho(S_2 v_2^3 - S_1 v_1^3) = \frac{1}{2}D_m (v_2^2 - v_1^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}'_p = P_a S_1 v_1 - P_a S_2 v_2 = 0$$