

Ondes acoustiques dans les fluides

Sommaire

I	Modélisation de la propagation des ondes sonores	2
I.1	Présentation	2
I.2	Approximation acoustique	2
I.3	Équations linéarisées	3
I.4	Équation de propagation de d'Alembert	4
I.5	Célérité des ondes acoustiques	5
II	Étude énergétique	5
II.1	Bilan énergétique	5
II.2	Intensité acoustique et niveau d'intensité sonore	6
III	Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)	7
III.1	Définition (rappels)	7
III.2	Relation de dispersion	7
III.3	Caractère longitudinal de l'OPPH sonore	7
III.4	Impédance acoustique	8
III.5	Aspects énergétiques d'une OPPH	8
III.6	Justification de l'approximation acoustique	9
IV	Réflexion et transmission sur une interface plane	10
IV.1	Modélisation de l'onde plane	10
IV.2	Conditions aux limites à l'interface $x = 0$	10
IV.3	Coefficients de réflexion et de transmission en amplitudes	12
IV.4	Coefficients de réflexion et de transmission en puissances	12
V	Ondes sphériques	13
V.1	Ondes sphériques progressives	13
V.2	Cas d'une onde sphérique progressive harmonique divergente	13
V.3	Onde plane / sphérique et diffraction	14
	Exercices	15

Questions de cours

- Présenter l'approximation acoustique et établir dans ce modèle les équations linéarisées.
- À partir des équations linéarisées, établir l'équation de propagation pour la surpression à 1D et citer une généralisation à 3D. Établir l'expression de la célérité des ondes acoustiques dans l'air en fonction de la température.
- Citer l'équation de conservation de l'énergie acoustique, en définissant les différents termes. Définir l'intensité sonore et le niveau d'intensité sonore. Ordres de grandeurs.
- Présenter l'onde plane progressive harmonique. Démontrer l'expression de l'impédance acoustique.
- Déterminer le coefficient de réflexion en amplitude pour la vitesse et la surpression dans le cas d'une interface entre deux milieux non miscibles d'impédances Z_1 et Z_2 .
- Onde sphérique : présentation et commentaire de la surpression générée par une sphère pulsante : $p(r,t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r}$. Lien avec les ondes planes progressives harmoniques.

Prise de notes : Le type d'onde mécanique (i.e. se propageant dans un milieu matériel) qui nous est le plus utile dans la vie de tous les jours est l'onde acoustique. On pense bien sûr à la voix et à la musique, mais il existe de très nombreuses applications (échographie, traitement médical pour détruire des caillots (cancer de la prostate), lévitation acoustique pour déplacer des masses en industrie, détection d'objets via des sonars, mesure de vitesse par effet Doppler...).

- ★ On a déjà étudié les ondes acoustiques (i.e. pour nous, ondes longitudinales) dans les solides, via la loi de Hooke $F = ES \frac{\Delta L}{L}$. Modélisation mésoscopique 1D avec l'étude d'une portion de solide entre x et $x + dx$. On avait alors trouvé une eq de d'Alembert avec $c = \sqrt{\frac{E}{\mu}}$. La grosse différence dans les fluides est qu'on va considérer le caractère 3D de l'onde : on va retrouver la structure d'onde plane/onde sphérique.

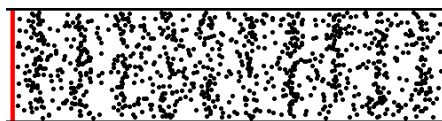
Ce chapitre a trois objectifs principaux :

1. Déterminer une équation de propagation de d'Alembert, via la linéarisation des équations de mécanique des fluides.
2. Décrire la structure spatiale tridimensionnelle de deux modèles simples d'ondes progressives.
3. Exprimer des coefficients de réflexion et de transmission des ondes acoustiques à une interface plane, sous incidence normale.

I Modélisation de la propagation des ondes sonores

I.1 Présentation

Le son est une onde mécanique qui se propage à travers un milieu matériel. Dans les fluides, cette onde est transmise par changement de pression du milieu. Le mécanisme de propagation principal est le suivant : lorsqu'un son est émis, le milieu proche est comprimé, puis comprime à son tour le fluide un peu plus loin, et ainsi de suite, dans la direction de propagation de l'onde : il s'agit alors d'ondes **longitudinales**.



On distingue trois domaines fréquentiels à connaître :

- Infrasons : $f < 20$ Hz (inaudible par l'homme)
- Domaine audible : 20 Hz $< f < 20$ kHz
- Ultrasons : $f > 20$ kHz (inaudible par l'homme) (beaucoup d'applications physiques dans ce domaine fréquentiel)

I.2 Approximation acoustique

On souhaite modéliser la propagation des ondes sonores dans les fluides. Pour cela, on considère que :

- ★ L'écoulement est instationnaire mais périodique de période T .
- ★ L'écoulement est faiblement compressible : la masse volumique μ dépend de la pression P .

Dans le cadre du cours, réalisons également quelques hypothèses que nous validerons a posteriori :

- ★ Les effets de la pesanteur seront négligés.
- ★ L'écoulement est parfait, i.e. les processus diffusifs sont négligés. Donc : pas de diffusion de la quantité de matière (viscosité dynamique $\eta = 0$) + pas de diffusion thermique (adiabatique). Du point de vue thermodynamique, on considère donc des transformations réversibles, et donc des transformations isentropiques.

Les champs physiques associés aux ondes sonores sont la **pression** $P(M,t)$, la **vitesse** (eulérienne) des particules du milieu $\vec{v}(M,t)$ et leur **masse volumique** $\mu(M,t)$. Il nous faut donc 5 équations pour pouvoir connaître l'ensemble de ces champs. Les équations de la mécanique des fluides vont coupler de manière non linéaire ces différents champs : on va donc **linéariser** à l'ordre le plus bas ces équations. Pour ce faire, on considère que :

- au repos, en l'absence d'ondes sonores, le fluide est décrit par :

$$P(M,t) = P_0 \text{ uniforme} \quad , \quad \mu(M,t) = \mu_0 \text{ uniforme} \quad \text{et} \quad \vec{v}(M,t) = \vec{0} \quad (\text{I.1})$$

- **Approximation acoustique** : lors du passage d'une onde, on décrit l'onde sonore par des termes infiniment petits d'ordre 1, indicés par 1 :

★

$$P(M,t) = P_0 + P_1(M,t) \quad , \quad \mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t) \quad \text{et} \quad \vec{v}(M,t) = \vec{0} + \vec{v}_1(M,t) \quad (\text{I.2})$$

où $|P_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$. Quant à \vec{v}_1 , on peut la comparer à la vitesse caractéristique, c'est-à-dire la célérité c des ondes sonores : $\|\vec{v}_1\| \ll c$.

De plus, en notant a l'amplitude caractéristique de la vibration des particules de fluide, elle est de l'ordre de $v_1 T$ très inférieure à $cT = \lambda$: on a donc $a \ll \lambda$.

Remarque : On appelle $P_1(M,t) = P(M,t) - P_0$ la **surpression**. Elle est parfois notée en minuscule $p(M,t)$.

I.3 Équations linéarisées

a Équation du mouvement d'une particule de fluide

Appliquons la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide de volume $d\tau$ située en M à l'instant t , dans un référentiel galiléen. Elle n'est soumise qu'aux forces de pression (on néglige la pesanteur et les forces de viscosité) :

$$\mu d\tau \vec{a}(t) = - \overrightarrow{\text{grad}} P d\tau \quad (\text{I.3})$$

On n'oublie pas que l'on parle de l'accélération d'une particule de fluide :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}$$

Le PFD donne :

$$(\mu_0 + \mu_1) \left(\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} + (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1 \right) = - \overrightarrow{\text{grad}} (P_0 + P_1) \quad (\text{I.4})$$

★

Or (en comptant les indices) :

- $\mu_1 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t}$: ordre 2
- $\mu_0 (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1$: ordre 2
- $\mu_1 (\vec{v}_1 \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{v}_1$: ordre 3

$$\boxed{\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} (P_1)}$$

b Équation de conservation de la masse

Exprimons et linéarisons l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 \iff \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \text{div}(\mu_0 \vec{v}_1 + \mu_1 \vec{v}_1) = 0 \implies \boxed{\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \text{div}(\vec{v}_1) = 0} \quad (\text{I.5})$$

c Équation thermodynamique

Nous avons pour l'instant 4 équations pour 5 inconnues, il nous faut donc une équation supplémentaire, reliant la masse volumique μ à la pression P . On parle d'équation thermodynamique, car on se sert de l'hypothèse d'un écoulement adiabatique réversible, c'est-à-dire isentropique. On va alors utiliser un **coefficient thermoélastique** tabulé, à savoir le coefficient de compressibilité isentropique du fluide, noté χ_s et défini par :

$$\chi_s = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_S \quad (I.6)$$

Pour une particule de fluide de masse m constante (système fermé), on a :

$$\star \quad \chi_s = - \frac{\mu}{m} \left(\frac{\partial \frac{m}{\mu}}{\partial P} \right)_S = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_S$$

Ce coefficient χ_s , quasiment constant, est positif, homogène à l'inverse d'une pression, et petit. Typiquement $\chi_s(\text{eau}) \simeq 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ et $\chi_s(\text{air}) \simeq 7 \times 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$.

On peut donc à nouveau linéariser, sachant que le modèle est fait à entropie S constant :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{d\mu}{dP} = \frac{1}{\mu_0 + \mu_1} \frac{\mu_1}{P_1} \simeq \frac{\mu_1}{\mu_0 P_1} \iff \boxed{\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1} \quad (I.7)$$

I.4 Équation de propagation de d'Alembert

Dans le cadre du programme, on va établir l'équation de propagation associée à la surpression à 1D en coordonnées cartésiennes.

Ainsi, tous les champs ne dépendent que de x et de t et $\vec{v}_1 = v_1(x,t)\vec{e}_x$. Les 3 équations couplées sont :

- $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = - \frac{\partial P_1}{\partial x}$
- $\frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0$
- $\mu_1 = \mu_0 \chi_s P_1$

Donc :

$$\chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial t \partial x} = 0$$

★ Or, avec le théorème de Schwarz :

$$\chi_s \frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2} = 0$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \chi_s} \frac{\partial^2 P_1}{\partial x^2}} \quad (I.8)$$

La surpression vérifie donc une équation de d'Alembert à 1D, en posant $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité.

Le même travail peut être effectué pour la vitesse $\vec{v}_1 = v_1(x,t)$ dans une modélisation unidimensionnelle et on aboutit à $\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$.

On peut généraliser ces équations d'onde dans le cas 3D :

Equations de d'Alembert 3D pour les ondes acoustiques

Dans le cadre de l'approximation acoustique dans un écoulement parfait et en négligeant la pesanteur, on admet que les ondes acoustiques sont régies par des équations de d'Alembert

3D :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta P_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \vec{v}_1}{\partial t^2} = c^2 \Delta \vec{v}_1$$

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$ la célérité des ondes (μ_0 : masse volumique du fluide au repos et χ_s : coefficient de compressibilité isentropique).

I.5 Célérité des ondes acoustiques

La détermination de la célérité des ondes sonores (à ne pas confondre avec la vitesse mésoscopique des particules de fluide v_1) nécessite de connaître la masse volumique μ_0 et le coefficient de compressibilité isentropique χ_s . Dans le cas d'un gaz parfait, on peut se servir de :

- l'équation des gaz parfait $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$ conduisant à $\mu = \frac{MP}{RT}$ et donc $\mu_0 = \frac{MP_0}{RT_0}$;
- la loi de Laplace, du fait de la transformation isentropique : $PV^\gamma = cste = P\mu^{-\gamma}$.
On différencie logarithmiquement :

★

$$\frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\mu}{\mu} = 0 \implies \chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{1}{\gamma P_0} \quad (\text{I.9})$$

D'où une célérité :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}} = \sqrt{\frac{RT_0}{MP_0}} \times \gamma P = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \quad (\text{I.10})$$

soit avec $M = 29 \text{ g mol}^{-1}$, $\gamma = \frac{7}{5}$ (GP diatomique) à $T = 298 \text{ K}$, il vient $c = 345 \text{ m s}^{-1}$.

Pour des gaz réels, ou pour d'autres fluides, on peut par contre se servir des valeurs tabulées de μ_0 et χ_s . En particulier, retenons $c(\text{eau}) = 1410 \text{ m s}^{-1}$.

II Étude énergétique

II.1 Bilan énergétique

a Vecteur densité de courant énergétique

Soit un élément de surface $d\vec{S}$. Sous l'effet de l'onde, celui-ci se déplace à la vitesse \vec{v}_1 , l'onde acoustique exerçant la force $d\vec{F} = P_1 d\vec{S}$. L'énergie, sonore, qui traverse cette surface pendant la durée dt vaut donc :

$$d^2\mathcal{E} = (d\vec{F} \cdot \vec{v}_1)dt = \vec{\Pi} d\vec{S}dt \quad (\text{II.1})$$

avec $\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1$ le **vecteur de Poynting acoustique**, vecteur densité de courant énergétique acoustique, homogène à une puissance surfacique (exprimée en W m^{-2}). Notons que l'on ne tient compte que de la surpression qui caractérise l'onde sonore, et non de la pression au repos.

La puissance sonore traversant une surface S vaut alors :

★

$$P_{\text{son}} = \iint_{(S)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

b Équation de conservation de l'énergie

Afin d'écrire un bilan énergétique, faisons un parallèle avec les équations de conservation établies dans le cadre de la diffusion :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j}) = 0 \quad (\text{II.2})$$

où ρ est homogène à une densité volumique de la grandeur transportée, soit ici une énergie volumique. On a alors fortement envie de calculer la divergence du vecteur de Poynting acoustique. Pour cela, on utilise une formule d'analyse vectorielle : $\text{div}(f\vec{A}) = \vec{A} \cdot \text{grad}(f) + f \text{div}(\vec{A})$.

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{\Pi}) &= \overrightarrow{\text{grad}} P_1 \cdot \vec{v}_1 + P_1 \text{div}(\vec{v}_1) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} \cdot \vec{v}_1 + P_1 \left(-\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \vec{v}_1 \cdot \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} - P_1 \chi_s \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ &= -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{v}_1^2 \right) - \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} P_1^2 \right) \end{aligned}$$

d'où l'équation locale de conservation de l'énergie acoustique :

$$\boxed{\frac{\partial e_a}{\partial t} + \text{div} \vec{\Pi} = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{e_a = \frac{1}{2} \mu_0 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} \chi_s P_1^2} \quad (\text{II.3})$$

L'énergie volumique acoustique e_a se décompose en un terme d'énergie cinétique volumique, et un autre terme ressemblant à une sorte d'énergie potentielle élastique volumique.

II.2 Intensité acoustique et niveau d'intensité sonore

On définit l'intensité acoustique (ou sonore) comme la moyenne temporelle du vecteur de Poynting acoustique :

$$I = \left\langle \left\| \vec{\Pi} \right\| \right\rangle \quad (\text{II.4})$$

Elle s'exprime également en W m^{-2} .

Or, l'oreille humaine détecte des intensités sonores variant entre 10^{-12} W/m^2 (seuil de détection) et 10 W/m^2 (seuil de douleur), soit sur 13 décades ! On qualifie les capteurs humains (oreilles et yeux) de détecteurs **logarithmiques**. On utilise alors plutôt le **niveau d'intensité sonore**, exprimé en décibel :

$$I_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \quad (\text{II.5})$$

avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$, intensité sonore de référence, correspondant au seuil moyen de perception sonore.

Ordres de grandeurs à connaître :

- Seuil de détection : $I_{dB} = 0 \text{ dB}$
- Conversation normale : $I_{dB} = 60 \text{ dB}$
- Seuil de douleur : $I_{dB} = 120 \text{ dB}$

III Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

III.1 Définition (rappels)

Comme à chaque fois que l'on a rencontré une équation de d'Alembert, une base de solutions est l'ensemble des OPPH se propageant dans toutes les directions de l'espace. Ecrivons, par exemple, la fonction d'onde de surpression d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants :

★ $P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi)$
soit en notation complexe : $\underline{P}_1(x,t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - kx)}$ avec $\underline{P}_{10} = P_{10} e^{j\varphi}$

Cette fonction d'onde caractérise bien une OPPH car :

- *Onde plane* : A t fixé, si $x = \text{cste}$, on a bien $P_1 = \text{cste}$: les surfaces d'onde sont des plans d'équation $x = \text{cste}$.
- *Onde progressive* : Il y a couplage spatio-temporel dans un terme $\omega t - kx$.
- *Onde harmonique* : La fonction d'onde varie sinusoidalement avec t et x .

D'après la théorie de Fourier, toute onde plane progressive (OPP) est somme (éventuellement continue) d'ondes planes progressives harmoniques, et sera également solution de l'équation de d'Alembert. Dans le cas d'une onde progressive dans le sens des x croissants :

$$P_1(M,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P_{1n} \cos(n\omega t - n\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_n)$$

ou $P_1(M,t) = \int_0^{\infty} a(\omega) \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi(\omega)) d\omega$

III.2 Relation de dispersion

Exercice : Déterminer la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert 3D sur la surpression.

★ Une OPPH de la forme $\underline{P}_1(M,t) = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$ est solution de l'équation de d'Alembert si :

$$(j\omega)^2 \underline{P}_1 = c^2 (-j\vec{k})^2 \underline{P}_1 \iff \omega^2 = c^2 k^2 \iff k = \pm \frac{\omega}{c} \quad (\text{III.1})$$

On retrouve la relation de dispersion classique, et les deux solutions possibles pour la norme du vecteur d'onde, caractérisant les deux sens possibles de la propagation d'une OPPH. On en déduit que la vitesse de phase vaut toujours $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \pm c$.

III.3 Caractère longitudinal de l'OPPH sonore

Pour justifier le caractère longitudinal d'une OPPH sonore, il faut montrer que \vec{v}_1 est colinéaire à \vec{k} . On l'obtient avec le PFD linéarisé :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P_1)$$

Comme on étudie une OPPH, le plus simple pour calculer des dérivées spatio-temporelles est de passer en complexes :

$$\underline{P}_1 = \underline{P}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad \text{et} \quad \underline{\vec{v}}_1 = \underline{\vec{v}}_{10} e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

Il va donc nous falloir préciser l'action de l'opérateur vectoriel $\overrightarrow{\text{grad}}$ sur le champ complexe \underline{P}_1 .

Action d'un opérateur d'analyse vectorielle :

$$\vec{\text{grad}}(P_1) = \frac{\partial P_1}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P_1}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P_1}{\partial z} \vec{e}_z = -jk_x P_1 \vec{e}_x - jk_y P_1 \vec{e}_y - jk_z P_1 \vec{e}_z = (-j\vec{k})P_1$$

★ Ainsi, le PFD linéarisé donne :

$$\mu_0 j \omega \vec{v}_1 = -(-j\vec{k})P_1 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0 \omega} \vec{k}$$

Le champ eulérien des vitesses est donc colinéaire au vecteur \vec{k} , ce qui traduit bien le caractère longitudinal : le mouvement des particules de fluide est dans la même direction que la propagation de l'onde.

III.4 Impédance acoustique

On définit la notion d'impédance acoustique comme le rapport, en notation complexe, entre la "cause" de l'onde (grandeur d'excitation, source) sur la "conséquence", ici respectivement la surpression et le champ de vitesse eulérien. Ainsi, on définit l'**impédance acoustique** par (2 définitions possibles) :

$$Z = \frac{P_1(M,t)}{v_1(M,t)} \quad \text{ou parfois} \quad Z = \frac{P_1(M,t)}{D_v(M,t)} \quad (\text{III.2})$$

où $D_v = S v_1(M,t)$ est le débit volumique à travers la surface S à travers laquelle passe l'onde réelle. Dans toute la suite nous utiliserons la première définition.

On souhaite faire le lien entre les champs de vitesse et de surpression : on utilise donc à nouveau le PFD linéarisé.

Pour une OPPH se propageant dans le sens $+\vec{e}_x$, on a :

$$\vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0 \omega} k \vec{e}_x = \frac{P_1}{\mu_0 c} \vec{e}_x \Rightarrow Z = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_s}} = Z_c \quad (\text{III.3})$$

★

Pour une OPPH se propageant dans le sens $-\vec{e}_x$ du type $P_1 = P_{10} e^{j(\omega t + kx)}$ avec $k = \frac{\omega}{c}$, un signe apparaît du fait de la dérivée spatiale :

$$\vec{v}_1 = \frac{P_1}{\mu_0 \omega} (-k \vec{e}_x) = -\frac{P_1}{\mu_0 c} \vec{e}_x \Rightarrow Z = -\mu_0 c = -Z_c \quad (\text{III.4})$$

Relation entre surpression et vitesse pour une OPP

L'impédance étant réelle et indépendante de ω , on généralise la notion d'impédance acoustique à toute OPP :

- pour une OPP se propageant dans le sens $+\vec{u}$, $P_1^+(M,t) = Z_c v_1^+(M,t)$;
- pour une OPP se propageant dans le sens $-\vec{u}$, $P_1^-(M,t) = -Z_c v_1^-(M,t)$;

en posant $Z_c = \mu_0 c$. Citons deux ordres de grandeurs importants (à ne pas connaître) : $Z(\text{air}) = 410 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$ et $Z(\text{eau}) = 1.4 \times 10^6 \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}$.

De manière globale :

$$Z(\text{solide}) \gg Z(\text{liquide}) \gg Z(\text{gaz}) \quad (\text{III.5})$$

III.5 Aspects énergétiques d'une OPPH

Partons d'une OPPH se déplaçant dans le sens $+\vec{e}_x$ dans l'air :

$$P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad \text{et} \quad v_1(x,t) = v_{10} \cos(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{III.6})$$

avec $P_1(x,t) = Z_c v_1(x,t) \Rightarrow P_{10} = Z_c v_{10}$ où $Z_c = \mu_0 c$.

Exercice : Dans le cas particulier d'une OPPH, déterminer l'expression des deux énergies volumiques, les comparer. Exprimer enfin le vecteur de Poynting en fonction de e_a .

Écrivons les deux énergies volumiques ainsi définies :

$$\frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \quad (\text{III.7})$$

tandis que l'équivalent d'énergie potentielle s'écrit :

$$\star \quad \frac{1}{2}\chi_s P_1^2 = \frac{\chi_s}{2} P_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\chi_s \mu_0^2 c^2}{2} v_{10}^2 \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{\mu_0 v_{10}^2}{2} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 \quad (\text{III.8})$$

On observe donc que les deux énergies sont égales à tout instant : on parle d'**équipartition de l'énergie**. (Ce résultat est général pour une OPP.)

Donc, $e_a = \mu_0 v_1^2$. Enfin le vecteur de Poynting acoustique s'écrit :

$$\vec{\Pi} = P_1 \vec{v}_1 = \mu_0 c v_1^2 \vec{e}_x = \boxed{e_a c \vec{e}_x} \quad (\text{III.9})$$

faisant le lien entre le vecteur densité de courant énergétique, la densité volumique d'énergie et la vitesse de propagation de l'énergie !

III.6 Justification de l'approximation acoustique

Grâce aux OPPH, nous allons pouvoir vérifier *a posteriori* que les approximations sur lesquelles s'appuie la théorie de propagation d'une onde acoustique sont bien vérifiées quantitativement.

a Validation des linéarisations à l'ordre 1

Vérifions quantitativement que l'amplitude de la vitesse, la surpression et le déplacement a vérifient bien $v_{10} \ll c$, $P_{10} \ll P_0$ et $a \ll \lambda$. Plaçons-nous à une fréquence $f = 1$ kHz, et avec $I_{dB} = 120$ dB, c'est-à-dire $I = I_0 10^{I_{dB}/10} = 1 \text{ W m}^{-2}$ (seuil de douleur).

On a :

$$I = \left\langle \left| \vec{\Pi} \right| \right\rangle = \langle P_1 v_1 \rangle = Z \langle v_1^2 \rangle = Z \langle v_{10} \cos^2(\omega t - kx + \varphi) \rangle = \frac{1}{2} \mu_0 c v_{10}^2 \quad (\text{III.10})$$

On en déduit $v_{10} = \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}}$. Puis :

$$P_{10} Z v_{10} = \mu_0 c \sqrt{\frac{2I}{\mu_0 c}} = \sqrt{2I \mu_0 c}$$

L'amplitude du mouvement vaut alors (leur dire que $x(t) = \int v_1(t) dt$) : $a \simeq \frac{v_{10}}{\omega}$.

A.N. : Pour l'air, avec $\mu_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3$ et $c = 340 \text{ m/s}$, on a : $v_{10} = 7 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1} \ll c$ et $P_{10} = 3 \times 10^1 \text{ Pa} \ll P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ et $a = 1 \times 10^{-5} \text{ m} \ll \lambda = \frac{c}{f} = 0.3 \text{ m}$

Les linéarisations à l'ordre 1 sont largement vérifiées quantitativement.

b Validation du fait de négliger la pesanteur

On souhaite vérifier que $\|\mu \vec{g}\| \ll \left| -\overrightarrow{\text{grad}}(P) \right|$. Il faut comparer des termes d'ordre 1 entre eux (les termes d'ordre 0 correspondent au cas d'équilibre, donc sans onde). Ainsi, on doit vérifier :

$$\mu_1 g \ll \frac{P_1}{\lambda} \iff \mu_0 \chi_s P_1 g \ll \frac{P_1}{\lambda} \iff g \lambda (\mu_0 \chi_s) = \frac{g \lambda}{c^2} \ll 1 \iff \frac{g}{c f} \ll 1 \iff f \gg \frac{g}{c}$$

Pour l'air, on a $\frac{g}{c} = 29 \times 10^{-3} \text{ Hz}$. Donc, cette approximation est largement vérifiée également pour des sons audibles.

c Validation du caractère adiabatique

On souhaite vérifier que les phénomènes de diffusion thermique sont négligeables à l'échelle caractéristique d'évolution de l'onde, soit en terme spatial, que la longueur de diffusion thermique $L_{\text{diff}} \ll \lambda$.

Pour l'air, le coefficient de diffusion thermique $D_{\text{diff}} \sim 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. En ordre de grandeur :
 $L_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{D_{\text{diff}}}{f}}$.

Ainsi, on souhaite vérifier que :

$$L_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{D_{\text{diff}}}{f}} \ll \lambda = \frac{c}{f} \iff f \ll \frac{c^2}{D_{\text{diff}}} = 6 \times 10^9 \text{ Hz}$$

Le caractère adiabatique est donc, là encore, largement validé quantitativement.

IV Réflexion et transmission sur une interface plane

IV.1 Modélisation de l'onde plane

La propagation d'ondes acoustiques avec un changement de milieu est un phénomène courant en physique. Citons par exemples le cas des ondes ultrasonores qui passent de la sonde à l'air (ou au gel appliqué sur le corps), puis aux tissus de la peau, puis aux os, etc. lors d'une échographie.

On étudie alors la propagation d'une OPPH incidente de pulsation ω dirigée selon $+\vec{e}_x$, rencontrant une interface plane située en $x = 0$ sous incidence normale séparant deux milieux non miscibles caractérisés par leur impédance Z_1 et Z_2 et leur célérité c_1 et c_2 . Étant donné le changement d'impédance, on ne peut pas avoir, avec une seule OPPH (champs P_1 et v_1), $P_1 = Z_1 v_1 = Z_2 v_1$: il est nécessaire d'avoir une onde réfléchie (indiquée r) et une onde transmise (indiquée t) :

$$\begin{aligned} \underline{P}_i(x,t) &= \underline{P}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} & \text{et} & & \underline{\vec{v}}_i &= \underline{v}_{i0} e^{j(\omega t - kx)} \vec{e}_x \\ \underline{P}_r(x,t) &= \underline{P}_{r0} e^{j(\omega t + k_r x)} & \text{et} & & \underline{\vec{v}}_r &= \underline{v}_{r0} e^{j(\omega t + k_r x)} \vec{e}_x \\ \underline{P}_t(x,t) &= \underline{P}_{t0} e^{j(\omega t - k_t x)} & \text{et} & & \underline{\vec{v}}_t &= \underline{v}_{t0} e^{j(\omega t - k_t x)} \vec{e}_x \end{aligned}$$

Plusieurs remarques sur cette modélisation des ondes :

Prise de notes (car déjà fait plein de fois) :

- L'onde réfléchie se propage selon $-\vec{e}_x$, alors que les ondes incidente et transmise se propagent selon $+\vec{e}_x$: attention au $\pm kx$.
- Par linéarité des phénomènes de propagation acoustique, la pulsation temporelle de l'onde est conservée au cours de la propagation (même ω).
- ★ Pour que ces ondes soient solutions de l'équation de d'Alembert, il est nécessaire que $k = \frac{\omega}{c_1} = k_r$ et que $k_t = \frac{\omega}{c_2}$.
- Il y a un lien entre la surpression et la vitesse : $\underline{P}_{i0} = Z_1 \underline{v}_{i0}$; $\underline{P}_{r0} = -Z_1 \underline{v}_{r0}$ et $\underline{P}_{t0} = Z_2 \underline{v}_{t0}$.
- On pourrait imposer l'un des déphasages à l'origine des temps et de l'espace nul sans perte de généralité.

Ainsi, dans la zone $x \leq 0$, la surpression **totale** est, par superposition : $\underline{P}_1(x,t) = \underline{P}_i(x,t) + \underline{P}_r(x,t)$. Dans la zone $x \geq 0$, la surpression **totale** vaut : $\underline{P}_2(x,t) = \underline{P}_t(x,t)$.

IV.2 Conditions aux limites à l'interface $x = 0$

a Cas général

On considère l'interface fixe en $x = 0$, car, d'après l'approximation acoustique, l'amplitude des déplacements est très petite devant la longueur caractéristique de l'onde λ . Il y a alors deux conditions aux limites à respecter en $x = 0$:

1. **Continuité du débit volumique** Dans le cas contraire, il y aurait mélange des deux fluides ou création de vide.
2. **Condition aux limites pour la surpression** L'idée est d'appliquer le PFD sur l'interface, en prenant en compte les forces de pression appliquées par les deux fluides de part et d'autre.

b Cas particulier : interface (sans masse) entre deux fluides non miscibles

Dans toute la suite du cours, on traitera uniquement le cas particulier où l'on place deux fluides non miscibles dans un récipient. La surface de contact est de dimension S . Traduisons les deux conditions aux limites dans ce cas particulier.

- Les ondes étant planes, la vitesse associée est constante sur la section S . Donc, la continuité du débit volumique s'écrit :

$$Sv_i(0,t) + Sv_r(0,t) = Sv_t(0,t) \Rightarrow v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)$$

Il y a continuité de la vitesse.

- PFD à une tranche d'épaisseur 2ε autour de $x = 0$, projeté selon \vec{e}_x :

★

$$\delta m(\varepsilon) \frac{\partial v}{\partial t} = S(P_0 + P_i(-\varepsilon,t) + P_r(-\varepsilon,t)) - S(P_0 + P_t(+\varepsilon,t))$$

À la limite $\varepsilon \rightarrow 0$, on a $\delta m(\varepsilon) \rightarrow 0$ et $\frac{\partial v}{\partial t}$ borné, conduisant à :

$$P_i(0,t) + P_r(0,t) = P_t(0,t)$$

Il y a continuité de la surpression, dans le cas où l'interface n'a pas de masse (pas de cloison).



IV.3 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitudes

On peut ensuite chercher à déterminer les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour la vitesse et la pression :

$$\underline{r}_v = \frac{v_{r0}}{v_{i0}} \quad , \quad \underline{t}_v = \frac{v_{t0}}{v_{i0}} \quad , \quad \underline{r}_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} \quad \text{et} \quad \underline{t}_p = \frac{P_{t0}}{P_{i0}} \quad (\text{IV.1})$$

Ces coefficients sont définis avec les caractéristiques des ondes au niveau de l'interface.

Réécrivons les conditions aux limites en termes d'impédances et de vitesse :

$$\underline{v}_{i0} e^{j\omega t} + \underline{v}_{r0} e^{j\omega t} = \underline{v}_{t0} e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{v}_{i0} + \underline{v}_{r0} = \underline{v}_{t0} \quad \text{et} \quad Z_1 \underline{v}_{i0} - Z_1 \underline{v}_{r0} = Z_2 \underline{v}_{t0} \quad (\text{IV.2})$$

puis on utilise les coefficients de réflexion et transmission en amplitude pour les vitesses :

$$\underline{v}_{i0}(1 + \underline{r}_v) = \underline{t}_v \underline{v}_{i0} \quad \text{et} \quad Z_1(1 - \underline{r}_v) \underline{v}_{i0} = Z_2 \underline{t}_v \underline{v}_{i0} \iff 1 + \underline{r}_v = \underline{t}_v \quad \text{et} \quad Z_1(1 - \underline{r}_v) = Z_2 \underline{t}_v \quad (\text{IV.3})$$

conduisant à



$$Z_1(1 - \underline{r}_v) = Z_2(1 + \underline{r}_v) \iff \underline{r}_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = r_v \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \underline{t}_v = 1 + \underline{r}_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = t_v \in \mathbb{R}.$$

D'autre part,

$$\underline{r}_p = \frac{P_{r0}}{P_{i0}} = \frac{-Z_1 \underline{v}_{r0}}{Z_1 \underline{v}_{i0}} = -r_v = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = r_p \in \mathbb{R}$$

$$\text{et} \quad \underline{t}_p = \frac{Z_2 \underline{v}_{t0}}{Z_1 \underline{v}_{i0}} = \frac{Z_2}{Z_1} t_v = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} = t_p \in \mathbb{R}.$$

On constate à nouveau qu'il n'y a pas d'onde réfléchie dans le cas d'adaptation d'impédance $Z_1 = Z_2$.

Prise de notes : Il existe cependant des situations où il est impossible de modifier Z_1 ou Z_2 : on peut alors ajouter un milieu supplémentaire pour limiter les réflexions. C'est le cas des sous-marins allemands utilisés pendant la guerre : eau / couche de caoutchouc mousse / fer. Attention au cas de la sonde d'échographie : changement de milieu intermédiaire : utilisation d'un gel dans l'unique but de limiter la présence d'une couche d'air qui n'est pas adaptée au niveau des impédances (on passe de sonde / air / peau à sonde / gel / peau). On peut aussi changer la section : cas des hauts-parleurs.



IV.4 Coefficients de réflexion et de transmission en puissances

On définit également des coefficients de réflexion et transmission en puissance :

$$R = \frac{\langle P_{\text{son},r}(x=0) \rangle}{\langle P_{\text{son},i}(x=0) \rangle} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle P_{\text{son},t}(x=0) \rangle}{\langle P_{\text{son},i}(x=0) \rangle}$$

Pour des ondes planes, le vecteur de Poynting est identique sur toute la section S de l'interface, à chaque instant. On peut donc sortir les surfaces $S_1 = S_2 = S$ des intégrales précédentes :

$$R = \frac{\langle \left\| \vec{\Pi}_r(x=0) \right\| \rangle S_1}{\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0) \right\| \rangle S_1} = \frac{I_r(0)S_1}{I_i(0)S_1} = \frac{I_r(0)}{I_i(0)} \quad \text{et} \quad T = \frac{\langle \left\| \vec{\Pi}_t(x=0) \right\| \rangle S_2}{\langle \left\| \vec{\Pi}_i(x=0) \right\| \rangle S_1} = \frac{I_t(0)S_2}{I_i(0)S_1} = \frac{I_t(0)}{I_i(0)}$$

Comme $I_i = \langle ||P_i \vec{v}_i|| \rangle = Z_1 \langle v_i^2 \rangle$ et $I_r = Z_1 \langle v_r^2 \rangle$, il vient

$$R = \frac{v_{r0}^2/2}{v_{i0}^2/2} = r_v^2 = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2 \quad (\text{IV.4})$$

tandis que le coefficient de transmission en puissance vaut :

$$T = \frac{Z_2 \langle v_t^2 \rangle}{Z_1 \langle v_i^2 \rangle} = \frac{Z_2 t_v^2}{Z_1} = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (\text{IV.5})$$

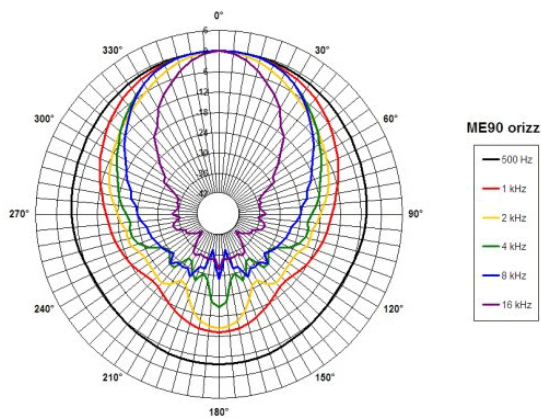
On vérifie alors que $R + T = 1$, traduisant la conservation de l'énergie à l'interface.

★ On remarque que si $Z_1 = Z_2$, alors $R = 0$ et $T = 1$: il y a transfert maximal de puissance entre l'onde incidente et l'onde transmise. On parle alors d'adaptation d'impédances.

V Ondes sphériques

V.1 Ondes sphériques progressives

Une source sonore réelle n'émet jamais dans une seule direction, mais souvent de manière anisotrope dans plusieurs directions. On peut d'ailleurs mesurer, à distance fixée, un diagramme de directivité d'un haut-parleur en traçant l'intensité sonore en fonction de l'angle. La modélisation en ondes planes semble donc peu adaptée pour décrire une onde acoustique réelle...



V.2 Cas d'une onde sphérique progressive harmonique divergente

Considérons le cas d'une sphère pulsante située en $r = 0$ imposant localement une perturbation sinusoidale de sa surface, à l'origine d'une onde acoustique sphérique divergente. On peut alors écrire la surpression avec une dépendance harmonique du type :

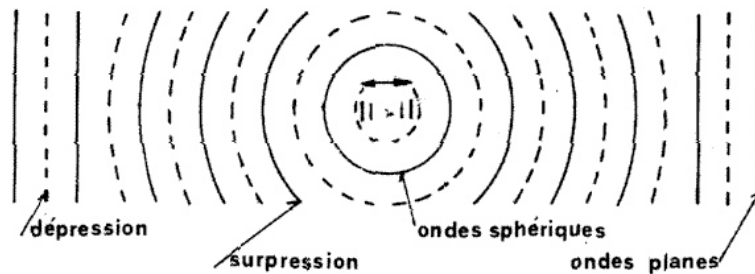
$$P_1(r,t) = A_0 \frac{\cos(\omega t - kr + \varphi)}{r} \quad (\text{V.1})$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$ d'après la relation de dispersion.

On peut commenter cette expression :

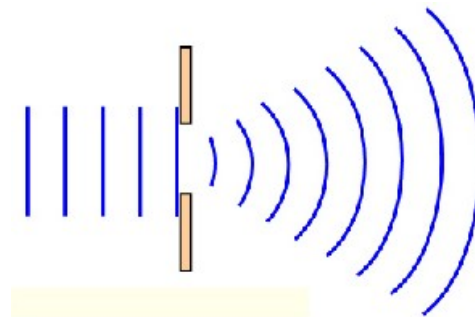


- Les surfaces d'onde sont des sphères concentriques. Le centre $r = 0$ de ces sphères est appelé foyer de l'onde sphérique.
- L'amplitude des ondes décroît en $1/r$, mais ce n'est PAS dû à de la dissipation d'énergie. En effet, aucun phénomène dissipatif n'est pris en compte dans les équations du mouvement. Si l'amplitude diminue, c'est que la puissance de l'onde, qui reste constante, est répartie sur une surface de plus en plus grande, de valeur $4\pi r^2$. (Le vecteur de Poynting acoustique est proportionnel à $\frac{1}{r^2}$.) On parle d'atténuation géométrique (et surtout pas d'absorption).
- À grande distance de l'émetteur isotrope, les surfaces d'ondes, qui sont des sphères de rayon r , deviennent localement assimilables à des ondes planes (à condition de se placer dans une zone d'extension spatiale de petite dimension devant le rayon de courbure de l'onde sphérique).



V.3 Onde plane / sphérique et diffraction

Notons enfin l'importance de la diffraction. En effet, si on place sur le parcours d'une onde plane (ou assimilée) un obstacle de dimension caractéristique $a \leq \lambda$, l'onde cesse d'être plane en aval de l'obstacle, et les fronts d'onde se déforment. L'onde en aval s'approche alors d'une onde sphérique.



Définir le demi-angle d'ouverture de diffraction $\theta \sim \frac{\lambda}{a}$ sur le schéma.

Exercices


Ex. 1 Modes propres dans un instrument à vent

Un tuyau d'orgue est assimilable à un tuyau d'axe (Ox) de longueur $\ell = 1$ m fermé à l'une de ses extrémités (en $x = 0$) et ouvert à l'autre (en $x = \ell$).

Les pressions, température et masse volumique moyennes de l'air contenu dans le tuyau sont : $P_0 = 1,013 \cdot 10^5$ Pa ; $T_0 = 290$ K ; $\mu_0 = 1,22$ kg.m⁻³. L'air est assimilé à un gaz parfait de coefficient $\gamma = 1,4$.

- Montrer que les conditions aux limites imposent, d'un côté, un nœud de vitesse, et de l'autre, un nœud de surpression.
- On cherche les modes propres. On pose pour cela l'onde de surpression sous la forme $P_1(x,t) = P_{10} \cos(\omega t) \cos(kx + \psi)$.
 - Rappeler la définition d'un mode propre et commenter le choix de la forme de la fonction d'onde de surpression. Quel est le lien entre ω et k ?
 - Déduire de la fonction d'onde de surpression, la forme sous laquelle on recherche la fonction d'onde de vitesse. Commenter la structure des ondes de vitesse et de surpression, et en particulier les positions respectives des nœuds de surpressions et des ventres de vitesses.
 - Déterminer numériquement les fréquences ν_0 et ν_1 du fondamental et du premier harmonique d'amplitude non nulle.
- À la fréquence ν_1 , on a mesuré une amplitude maximale des élongations de l'air à $a_0 = 1$ mm. En déduire l'amplitude correspondante P_{10} pour la surpression et T_{10} pour la température.

Correction de l'exercice 1

- On considère que la membrane fermée est en $x = 0$, alors que l'ouverture est en $x = \ell$.
 - Une membrane fermée fixe impose un nœud de vitesse, car le fluide ne peut pas pénétrer dans la membrane solide : $v_1(x = 0, t) = 0, \forall t$.
 - Concernant l'ouverture en $x = \ell$, la condition aux limites est un peu plus délicate à déterminer. Étant donné que l'onde acoustique se développe dans un tube, on peut supposer raisonnablement que cette onde est plane (une seule direction de propagation $\pm \vec{e}_x$). Donc, en $x = \ell$, la surpression est constante sur tout le plan d'onde que constitue l'ouverture du tuyau. Or, en $x = \ell$ et au bord du tuyau, cette surpression vaut forcément $P_1 = 0$, par continuité avec la pression atmosphérique extérieure. Donc, nécessairement, vu que l'onde dans le tuyau est plane : $P_1(x = \ell, t) = 0, \forall t$.
- Mode propre : onde plane stationnaire harmonique solution de l'équation de d'Alembert et respectant les CL. La forme proposée convient donc. D'après la relation de dispersion de l'équation de d'Alembert : $k = \frac{\omega}{c}$.
 -  Pour faire le lien avec $v_1(x,t)$, on ne peut pas utiliser l'impédance acoustique car on n'a pas une onde plane **progressive** !
À partir de la loi de la quantité de mouvement linéarisée, on en déduit le champ de vitesse correspondant :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} = +P_{10} k \cos(\omega t) \sin(kx + \psi) \iff v_1(x,t) = \frac{P_{10}}{\mu_0 c} \sin(\omega t) \sin(kx + \psi) + f(x) \quad (\text{Ex.1})$$

où l'on prend $f(x) = 0$ car une fonction de l'espace uniquement ne peut pas représenter une onde (qui est caractérisée par un couplage spatio-temporel).

Par conséquent, l'onde de vitesse est elle aussi plane stationnaire harmonique. Pour des positions x telles que $\cos(kx + \psi) = 0$, on a un nœud de surpression, mais aussi $\sin(kx + \psi) = \pm 1$ et donc un ventre de vitesse. Réciproquement, chaque nœud de vitesse correspond à un ventre de pression.

- En utilisant les deux conditions aux limites, il vient :

$$v_1(x = 0, t) = 0 \forall t \implies \sin \psi = 0 \implies \psi = 0 \quad \text{ou} \quad \pi \quad \text{Choix : } \psi = 0 \quad (\text{Ex.2})$$

$$P_1(x = \ell, t) = 0 \forall t \implies \cos(k\ell + \psi) = 0 \implies \cos(k\ell) = 0 \implies k\ell = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \quad (\text{Ex.3})$$

soit avec $k = \frac{2\pi\nu}{c}$, $\nu_n = \frac{c}{4\ell} + n\frac{c}{2\ell}$. On trouve numériquement : $c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} = 340$ m/s, puis $\nu_0 = 85$ Hz et $\nu_1 = 255$ Hz = $3\nu_0$. Dans un instrument à vent, seules les harmoniques impaires existent, contrairement aux instruments à cordes : c'est ce qui explique leur nette différence de timbre !

3. Comme $\frac{P_{10}}{\mu_0 c}$ est l'amplitude maximale de la vitesse, mais qu'elle vaut aussi $a_0 \omega$ à partir de l'amplitude maximale de l'élongation, il vient

$$P_{10} = a_0 \omega \mu_0 c = 2\pi \mu_0 c a_0 \nu_1 = 670 \text{ Pa} \quad (\text{Ex.4})$$

Concernant la température, on a forcément besoin d'une loi thermodynamique. On utilise le fait que la transformation est adiabatique réversible pour un gaz parfait, soit en différenciant logarithmiquement une des lois de Laplace :

$$P^{1-\gamma} T^\gamma = \text{cste} \iff (1-\gamma) \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dT}{T} = 0 \implies \frac{P_{10}}{P_0} (1-\gamma) + \gamma \frac{T_{10}}{T_0} = 0 \implies T_{10} = \frac{(\gamma-1) T_0 P_{10}}{\gamma P_0} = 0.55 \text{ K} \quad (\text{Ex.5})$$

On constate que la température évolue sensiblement peu lorsque l'instrument est sollicité (ce qui valide encore et toujours l'approximation harmonique : $T_{10} \ll T_0$).

Ex. 2 Lévitacion acoustique (*Ecrit Mines-Ponts PSI 2020*)

La lévitation acoustique consiste à maintenir de la matière en suspension au sein d'un milieu fluide ambiant, l'air par exemple, en opposant au poids de l'objet lévitant la force résultant de la pression de radiation d'ondes sonores intenses.

Les vecteurs seront surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires (\hat{e}) et d'une flèche dans le cas général (\vec{a}). Ainsi dans l'espace cartésien on notera $\vec{a} = a_x \hat{e}_x + a_y \hat{e}_y + a_z \hat{e}_z$. À l'exception de j , tel que $j^2 = -1$, les nombres complexes seront soulignés.

I. — La lévitation grâce à une onde sonore

Le dispositif de lévitation acoustique est présenté et modélisé sur la figure 1.

Un transducteur, de surface $S = 10 \text{ cm}^2$, est en vibration au voisinage de la hauteur h à la vitesse $\vec{u}_m(t) = U_m \sin(\omega t) \hat{e}_z$ avec $U_m = 10 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$. Il génère une onde sonore de fréquence $f = 20 \text{ kHz}$ supposée plane, harmonique, et progressive selon la verticale descendante. Cette onde est *totalemment* réfléchiée par une paroi fixe placée en $z = 0$.

Le milieu de propagation est de l'air, supposé homogène et compressible. Il est caractérisé au repos (en l'absence d'onde sonore) par une masse volumique $\mu_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ uniforme. Les champs de température et pression sont eux aussi stationnaires; la température T_0 étant en outre uniforme alors que la pression est une fonction de z soit $P_0 = P_0(z)$.

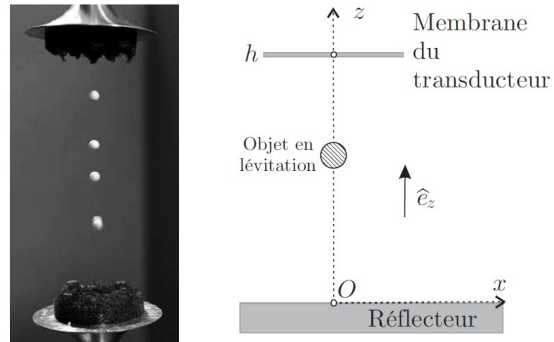


FIGURE 1 – À gauche : lévitation acoustique de particules de polystyrène expansé. À droite : schéma de principe du dispositif de lévitation acoustique.

Aide : Vu que la pression au repos dépend de z , cela implique que, dans ce problème, on ne néglige pas la pesanteur lors de la modélisation des ondes acoustiques.

On suppose que la propagation est unidimensionnelle, de célérité $c = 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans le milieu. Dans l'approximation acoustique, les champs de pression, masse volumique, et vitesse sont alors décrits respectivement par :

$$\begin{cases} P(z,t) = P_0(z) + p_1(z,t) \\ \mu(z,t) = \mu_0 + \mu_1(z,t) \\ \vec{v}(z,t) = v_1(z,t) \hat{e}_z \end{cases}$$

Les termes p_1 et μ_1 sont perturbatifs : pour toutes les valeurs de t et de z concernées on a donc $|p_1| \ll |P_0|$ et $|\mu_1| \ll |\mu_0|$. L'évolution du fluide mis en mouvement par l'onde sonore est supposée adiabatique et réversible. Le coefficient de compressibilité isentropique sera noté χ_S et assimilé à une constante.

□ 1 — Rappeler les hypothèses de l'approximation acoustique. Sauf mention contraire, on suppose ces hypothèses vérifiées par la suite.

□ 2 — On considère une particule fluide, de volume $d\tau$, mise en mouvement par le passage de l'onde sonore. Montrer que, dans l'approximation acoustique, son accélération peut s'écrire

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}.$$

□ 3 — Écrire, en projection sur \hat{e}_z , l'équation aux dérivées partielles obtenue en appliquant la relation fondamentale de la dynamique à une particule de fluide de volume $d\tau$ et de masse $\mu_0 d\tau$. Que donne cette relation si la particule est au repos ? Compte-tenu de cette seconde relation, déterminer finalement une équation aux dérivées partielles reliant les seules grandeurs μ_0 , v_1 et p_1 .

□ 4 — Donner les expressions linéarisées des relations locales traduisant, d'une part la conservation de la masse, et d'autre part le caractère isentropique de l'évolution du fluide sous l'effet de l'onde acoustique.

□ 5 — Montrer que le champ des vitesses $v_1(z,t)$ vérifie une équation de propagation de la forme

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = 0$$

Quel est le nom de cette équation ? Exprimer c en fonction des paramètres pertinents.

□ 7 — On note $z_m(t)$ la position de la membrane du transducteur au voisinage de h . Exprimer puis calculer l'amplitude Z_m de vibration de $z_m(t)$. On pourra prendre $(4\pi)^{-1} = 8,0 \times 10^{-2}$.

□ 8 — On s'intéresse à l'onde sonore résultante entre le transducteur et le réflecteur. Justifier la condition aux limites

$$u_m(t) \approx v_1(h,t)$$

□ 9 — Déterminer complètement la vitesse $v_1(z,t)$ dans l'espace $0 \leq z \leq h$ et exprimer son amplitude maximale V_1 en fonction de U_m , h , ω et c .

□ 11 — Exprimer la surpression $p_1(z,t)$ associée à $\vec{v}_1(z,t)$. On considère une bille, de rayon $a \ll \lambda$ et donc assimilable à un volume élémentaire sans influence sur la propagation de l'onde acoustique. Déterminer la résultante \vec{F} des forces de pression s'exerçant sur la bille, ainsi que sa moyenne temporelle $\langle \vec{F} \rangle$. Le modèle étudié jusqu'à présent permet-il d'interpréter la lévitation de cette bille ?

Remarque : Pour expliquer le phénomène de lévitation acoustique, il faut alors effectuer un traitement des ondes acoustiques à l'ordre 2 (on sort de l'approximation acoustique).

Correction de l'exercice 2

Corrigé ci-après. *J'avais donné cet exercice en DS : les erreurs sont des erreurs fréquentes commises dans les copies.*

□ 1 L'approximation acoustique est en réalité déjà présente dans l'énoncé : elle consiste à supposer que les grandeurs acoustiques (indiquées 1) sont des infiniment petits d'ordre 1, alors que les grandeurs au repos (indiquées 0) sont d'ordre 0 : $|p_1| \ll P_0$ et $|\mu_1| \ll \mu_0$ et $|v_1| \ll c$. On fait alors un raisonnement en se limitant à l'ordre 1.

Rq : Le fait de négliger les phénomènes dissipatifs est une hypothèse faite ici, mais qui ne fait pas strictement partie de l'approximation acoustique.

□ 2 L'accélération d'une particule de fluide est la dérivée particulière de la vitesse. Donc :

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = \underbrace{\frac{\partial v_1}{\partial t} \vec{e}_z}_{\text{ordre 1}} + \underbrace{v_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} \vec{e}_z}_{\text{ordre 2}} \simeq \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

à l'ordre 1.

Erreur : Dériver un terme d'ordre 1 donne toujours un ordre 1. C'est le produit de deux ordres 1 qui crée un terme d'ordre 2.

□ 3 On prend comme système une particule de fluide dont le volume au repos est $d\tau$.

On lui applique le théorème de la résultante dynamique dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen.

$$D'où : \mu_0 d\tau \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \text{grad} P d\tau + \mu_0 d\tau \vec{g}.$$

Erreur : La résultante volumique des forces de pression dépend bien de la pression totale P , et non de la surpression p_1 . Ceci est à prendre en compte ici vu que $P_0(z)$.

Erreur : Attention au piège : la masse du système choisi (qui est invariable puisque c'est un système fermé) est $\mu_0 d\tau$, aussi bien dans le premier membre que dans le second. Certes, la masse volumique varie avec la propagation de l'onde, mais le volume de la particule de fluide varie également. (On devrait donc, rigoureusement, introduire un volume $d\tau_0 + d\tau_1$ pour la résultante des forces de pression. Mais je ne pense pas qu'ils attendaient ce niveau de compréhension, et de toute manière, ne change pas le résultat final à l'ordre 1.)

Après projection sur \vec{e}_z et simplification par $d\tau$, il vient :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{-dP}{dz} - \mu_0 g \quad (1)$$

Dans le cas particulier du repos, cette équation devient (relation de la statique des fluides) :

$$0 = \frac{-dP_0}{dz} - \mu_0 g \quad (2)$$

L'équation (1) peut encore s'écrire :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{-dP_0}{dz} - \frac{\partial p_1}{\partial z} - \mu_0 g \quad (3)$$

Puis en faisant (3) - (2), on obtient :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{-\partial p_1}{\partial z} \quad (4)$$

□ 4 L'équation locale de conservation de la masse $\text{div}(\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0$ donne en 1D, après linéarisation :

$$\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{-\partial \mu_1}{\partial t} \quad (5)$$

L'équation locale traduisant l'évolution isentropique du fluide est $\chi_s = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial P} \right)_s$; après linéarisation,

$$\mu_1 = \mu_0 \chi_s p_1 \quad (6)$$

Rq : On demande de donner et non d'établir, donc soyez rapides.

□ 5 En utilisant (5) et (6), on obtient $\mu_0 \frac{\partial v_1}{\partial z} = -\mu_0 \chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t}$, puis

$$\frac{\partial v_1}{\partial z} = -\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \quad (7).$$

En dérivant (4) par rapport au temps, il vient $\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{-\partial^2 p_1}{\partial t \partial z}$, et le théorème de Schwarz permet d'écrire :

$$\mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = \frac{-\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} \quad (8)$$

En dérivant (7) par rapport à z, il vient

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = -\chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial z \partial t} \quad (9)$$

Enfin, (8) combinée avec (9) donne $\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \chi_s \mu_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2}$, ce qui est bien de la forme proposée par l'énoncé avec

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}.$$

Il s'agit de l'équation de propagation 1D de d'Alembert.

Erreur : Il ne faut pas se perdre dans les calculs. On veut une dérivée seconde sur v_1 , donc il faut forcément dériver (4) par rapport au temps.

Erreur : Il faut passer toutes les équations en 1D directement, et ne pas rester avec les opérateurs vectoriels. Sinon, on fait apparaître $\text{grad}(\text{div}(\vec{v}_1)) = \vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{v}_1 + \Delta \vec{v}_1$, et il faut alors justifier pourquoi $\vec{\text{rot}} \vec{v}_1 = \vec{0} \dots$. Donc, si vous pouvez passer en 1D, faites le systématiquement : ça simplifie !

□ 7 On détermine la position de la membrane en intégrant la vitesse par rapport au temps.

$$z_m(t) = \int_0^t U_m \sin(\omega t') dt' = -\frac{U_m}{\omega} \cos(\omega t) + \text{cste}$$

Erreur : Il n'est pas nécessaire d'explicitier la constante. Mais il ne faut pas dire qu'elle est nulle !! En effet, la membrane vibre autour de $z=h$, donc $\text{cste}=h$ ici.

En régime harmonique, l'amplitude U_m de la vitesse est liée à l'amplitude Z_m de vibration par la pulsation :

$$Z_m = \frac{U_m}{\omega}.$$

Erreur : L'amplitude est toujours positive.

Numériquement, $Z_m = \frac{0,1}{2\pi \times 20.10^3} = \frac{10^{-5}}{4\pi} \simeq 8,0.10^{-7} \text{ m}$, en utilisant l'indication $\frac{1}{4\pi} \simeq 8,0.10^{-2}$.

□ 8 La condition aux limites $u_m(t) \simeq v_1(h, t)$ se justifie par le fait que la membrane du transducteur est imperméable au fluide, et qu'il serait inconcevable qu'une poche de vide se forme entre le fluide et le transducteur. Ainsi, il y a continuité du champ des vitesses à l'interface transducteur/fluide.

Erreur : On n'est pas dans la situation du cours avec une interface sans masse entre deux fluides. La conservation du débit volumique n'a donc pas de sens, car le débit volumique de la membrane (c'est-à-dire d'un solide !) n'existe pas.

Rq : Ici, le correcteur cherche les mots-clés : imperméable + pas de vide. Faites les apparaître.

□ **9** La condition aux limites en $z=0$ (paroi imperméable, donc $v_1(z=0,t)=0$), amène à chercher la solution de l'équation 1D de d'Alembert ici sous forme d'onde plane stationnaire harmonique :

$$v_1(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{\omega}{c} z + \psi\right).$$

Erreur : La solution ne peut pas être une OPPH car on a un nœud avec la CL en $z=0$.
Donc, posez directement la solution sous forme d'OSH, c'est le plus efficace.

Erreur : Vous n'avez pas le droit de choisir $\varphi=0$ et/ou $\psi=0$, car l'origine des temps est imposé par la fonction $u_m(t)$ et l'origine de l'espace est déjà imposée par l'origine des z sur le schéma.

Erreur : On peut donner directement $k = \omega/c$, car c'est la relation de dispersion de d'Alembert (c'est du cours). Et donc, dans la même idée, il ne sert à rien d'injecter la fonction d'onde dans l'équation de d'Alembert, vous ne retrouverez que la relation de dispersion... Ce sont les CL qu'il faut utiliser ici !

La condition aux limites $v_1(0,t)=0$ à tout instant t conduit à $\cos(\psi)=0$, donc par exemple $\psi = \frac{-\pi}{2}$, puis

$$v_1(z,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right).$$

La condition aux limites $u_m(t) \simeq v_1(h,t)$ à tout instant t conduit à $U_m \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi) \sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)$,

donc par exemple $\varphi = \frac{-\pi}{2}$ et $A = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)}$.

Finalement, $v_1(z,t) = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \sin(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right)$ avec $V_1 = \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)}$

□ **11** On repart de l'équation (7) : $\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{-1}{\chi_s} \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{-1}{\chi_s} \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \frac{\omega}{c} \sin(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right)$.

Et puisqu'on est en régime harmonique, il n'y a pas de constante d'intégration additive :

$$p_1(z,t) = \frac{1}{\chi_s} \frac{U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \frac{1}{c} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right)$$

Ou encore $p_1(z,t) = \frac{\mu_0 c U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \cos(\omega t) \cos\left(\frac{\omega}{c} z\right)$.

La résultante des forces de pression sur la bille est $\vec{F} = \frac{-4}{3} \pi a^3 \overrightarrow{\text{grad}} P = \frac{-4}{3} \pi a^3 \overrightarrow{\text{grad}} (P_0 + p_1)$

D'où $\vec{F} = \frac{-4}{3} \pi a^3 \left(\frac{dP_0}{dz} + \frac{\partial p_1}{\partial z} \right) \vec{e}_z$.

En utilisant l'équation (2) et le résultat ci-dessus, on a

$$\vec{F} = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\mu_0 g + \frac{\mu_0 \omega U_m}{\sin\left(\frac{\omega}{c} h\right)} \cos(\omega t) \sin\left(\frac{\omega}{c} z\right) \right) \vec{e}_z$$

Et sa moyenne temporelle est $\text{moy}(\vec{F}) = \frac{4}{3} \pi a^3 \mu_0 g \vec{e}_z$.

Cette force moyenne permet la sustentation d'un objet de même densité que l'air (ou l'air lui-même) mais pas d'un objet plus dense que l'air, donc pas une bille, car le poids de cette bille est $\frac{4}{3} \pi a^3 \mu_b g \vec{e}_z$.

Remarque : Cette force est la poussée d'Archimède : en moyenne, les forces subies par la bille sont les mêmes qu'en statique des fluides.

Ex. 3 Isolation phonique

Une cloison est modélisée par une membrane de masse volumique ρ et d'épaisseur e en translation au voisinage de $x = 0$ dans un tuyau sonore de section S rempli d'air à la température de 20°C de masse volumique $\rho_0 = 1,2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. L'air est donc présent à gauche et à droite de la cloison.

On cherche à déterminer les ondes transmises et réfléchies en $x = 0$ pour une onde de vitesse incidente $\underline{v}_i = v_0 e^{j(\omega t - kx)}$ pour $x < 0$.

1. On considère que la membrane se trouve constamment en $x = 0$. À quelle condition cette approximation est-elle valable ?
2. Écrire les conditions aux limites en $x = 0$.
3. Donner la forme des ondes de pression et de vitesse du côté (1) : $x < 0$ et du côté (2) : $x > 0$.
4. Montrer que le coefficient complexe de transmission en vitesse $\underline{\tau}(j\omega)$ peut se mettre sous la forme

$$\underline{\tau}(j\omega) = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec ω_c une constante que l'on exprimera et dont on explicitera le sens physique. En déduire l'expression du coefficient de transmission en puissance $T(\omega)$. Quels instruments d'un groupe de rock entend-on le mieux à travers un mur ?

5. Pour $\rho = 1800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, quelle est l'épaisseur du mur permettant une atténuation de 20 dB à 400 Hz ?

Correction de l'exercice 3

1. L'amplitude de déplacement du piston est de l'ordre de $a \ll \lambda$ (approximation acoustique). Donc, on peut négliger la variation de position du piston si $a \ll e$, dont une condition suffisante est $\lambda \ll e$. Dans ce cas, on peut également supposer que le piston est d'épaisseur nulle du point de vue des ondes acoustiques se propageant.
2. Écrivons les conditions aux limites, en considérant qu'il y a une onde réfléchie et une onde transmise. D'une part on a continuité du champ de vitesse à l'interface :

$$v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t) \quad (\text{Ex.6})$$

et d'autre part, on n'a pas continuité de la surpression, car il faut appliquer la loi de la quantité de mouvement à la membrane, qui se déplace en bloc à la vitesse $v_t(0,t)$:

$$\rho S e \frac{\partial v_t(0,t)}{\partial t} = (p_i(0,t) + p_r(0,t) - p_t(0,t)) S \quad (\text{Ex.7})$$

3. On écrit les ondes de la manière suivante :

$$\underline{v}_r(x,t) = v_{r0} e^{j(\omega t + kx + \varphi_r)} \quad \text{et} \quad \underline{v}_t(x,t) = v_{t0} e^{j(\omega t - kx + \varphi_t)} \quad (\text{Ex.8})$$

et pour la pression :

$$\underline{p}_r(x,t) = Z \underline{v}_r \quad , \quad \underline{p}_t(x,t) = -Z \underline{v}_t \quad \text{et} \quad \underline{p}_i(x,t) = Z \underline{v}_i \quad (\text{Ex.9})$$

en posant $Z = \rho_0 c$.

4. En injectant les formes précédentes dans les conditions aux limites, en introduisant le coefficient de transmission en vitesse $\underline{\tau}(j\omega) = \frac{\underline{v}_t(0,t)}{\underline{v}_i(0,t)}$ (et par analogie celui en réflexion $\underline{r}(j\omega)$) :

$$1 + \underline{r} = \underline{\tau} \quad \text{et} \quad \rho e j \omega \underline{\tau} = Z(1 - \underline{r} - \underline{\tau}) \quad (\text{Ex.10})$$

soit en réinjectant \underline{r} dans la seconde équation, il vient après réarrangement :

$$\underline{\tau}(j\omega) = \frac{2Z}{2Z + \rho e j \omega} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} \quad (\text{Ex.11})$$

$$\text{avec } \omega_c = \frac{2Z}{\rho e} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e}$$

On a donc un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_c (ce qui était relativement attendu, car les basses fréquences sont souvent plus difficiles à filtrer que les hautes fréquences).

Concernant le coefficient en puissance :

$$T(\omega) = \frac{I_t(0)S}{I_i(0)S} = \frac{\langle P_t(0,t)v_t(0,t) \rangle}{\langle P_i(0,t)v_i(0,t) \rangle} = \frac{Z \langle v_t(0,t)^2 \rangle}{Z \langle v_i(0,t)^2 \rangle} = \frac{v_{t0}^2/2}{v_{i0}^2/2} = \left(\frac{v_{t0}}{v_{i0}} \right)^2$$

On accède à $\frac{v_{t0}}{v_{i0}}$ grâce au **module** de $\underline{\tau}(j\omega)$:

$$T(\omega) = |\underline{\tau}|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \quad (\text{Ex.12})$$

qui est bien un coefficient réel (heureusement, il s'agit d'un rapport de puissances moyennes).

Pour un groupe de rock, on entendra très certainement la basse et la batterie (basses fréquences) !!

5. Si on veut une atténuation de 20 dB à 400 Hz, il faut que :

$$I_t = I_i \times T \Rightarrow I_{dB,t} = I_{dB,i} + 10 \log(T) \Rightarrow 10 \log(T) = -20 \text{ dB} \Rightarrow T = 10^{-2}$$

En réinjectant l'expression de $T(\omega)$:

$$T = \frac{1}{100} = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2} \iff \omega_c = \frac{\omega}{\sqrt{99}} = \frac{2\rho_0 c}{\rho e} \iff e = \frac{2\rho_0 c \sqrt{99}}{\omega \rho} = 1.8 \text{ cm} \quad (\text{Ex.13})$$

sachant que $c = 343 \text{ ms}^{-1}$. On pourrait vérifier (non demandé) a posteriori que $e \ll \lambda = \frac{c}{f} = 86 \text{ cm}$, ce qui valide la Q.1.

Ex. 4 Ondes acoustiques sphériques progressives

Une sphère pulsante de centre O fixe dont le rayon $a(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega t)$ varie sinusoïdalement avec une amplitude $a_1 \ll a_0 \ll \lambda$ émet des ondes sonores dans tout l'espace extérieur à la sphère, rempli d'air de masse volumique μ_0 où la célérité des ondes sonores vaut c . Compte tenu de la symétrie du problème, on cherche en coordonnées sphériques de centre O des champs de la forme $p_1(M, t) = p_1(r, t)$ et $\vec{v}_1(M, t) = v_1(r, t) \vec{e}_r$.

On rappelle que pour un champ scalaire ne dépendant que de r en coordonnées sphériques le laplacien peut s'écrire : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r f(r, t))$.

1. Donner l'équation de d'Alembert sur $p_1(r, t)$. Justifier que l'on doit choisir $p_1(r, t) = \frac{1}{r} f(t - r/c)$.
2. Dans la suite, on pose $k = \omega/c$ et on cherche une solution de la forme $p_1 = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr - \alpha)$. On souhaite déterminer le champ de vitesse associé. Expliquer pourquoi on ne peut pas utiliser l'impédance acoustique. Montrer néanmoins que :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} + k \cos(\omega t - kr - \alpha) \right) \vec{e}_r$$

3. **Onde en champ proche** Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r \ll \lambda$ et déterminer A et α en exploitant la condition aux limites sur la sphère.
4. **Onde en champ lointain**
 - (a) Simplifier l'expression du champ des vitesses pour $r \gg \lambda$ et montrer qu'on retrouve un résultat typique des ondes planes progressives.
 - (b) Montrer que la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de centre O et de rayon $r \gg \lambda$ est une constante. Commenter. Expliquer pourquoi les enceintes acoustiques sphériques sont d'autant plus grandes que le son émis est grave.

Correction de l'exercice 4

1. Partons de l'équation de d'Alembert vérifiée par le champ de surpression :

$$\Delta p_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \iff \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r p_1(r, t))}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} \quad (\text{Ex.14})$$

soit en posant $b(r, t) = r p_1(r, t)$, on a une équation de d'Alembert 1D vérifiée par $b(r, t)$, d'où :

$$p_1(r, t) = \frac{f\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{g\left(t + \frac{r}{c}\right)}{r} \quad (\text{Ex.15})$$

On choisit ici une onde progressive se dirigeant selon $+\vec{e}_r$, car il n'y a aucune condition aux limites pour de grandes valeurs de r qui expliquerait qu'en plus de l'onde progressive émise par la sphère pulsante, il y a une onde réfléchie.

2. Pour déterminer le champ de vitesse, on ne peut pas utiliser l'impédance, car on n'a pas une onde plane progressive (onde **sphérique** progressive). Partons du PFD linéarisé que l'on intègre par rapport au temps (on peut aussi passer le PFD linéarisé en notation complexe, puis finalement repasser en réels) :

$$\mu_0 \frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = -\vec{\text{grad}} p_1 = A_0 \left(\frac{\cos(\omega t - kr - \alpha)}{r^2} - \frac{k \sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} \right) \vec{e}_r \quad (\text{Ex.16})$$

puis par intégration :

$$\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \left(\frac{\sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} + k \cos(\omega t - kr - \alpha) \right) \vec{e}_r + \vec{f}(t) \quad (\text{Ex.17})$$

avec $\vec{f}(t) = \vec{0}$, car ce terme ne décrit pas une onde (pas de couplage spatio-temporel), il n'a donc pas de sens physique.

3. En notant que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, on remarque que la condition $r \ll \lambda$ permet de négliger le deuxième terme devant le premier dans l'expression de \vec{v}_1 : $\vec{v}_1 = \frac{A}{\mu_0 r \omega} \frac{\sin(\omega t - kr - \alpha)}{r} \vec{e}_r$

On utilise ensuite la condition aux limites de continuité de la vitesse en $x \simeq a_0$ (comme $a_1 \ll a_0$) :

$$v_1(r = a_0, t) = -a_1 \omega \sin(\omega t) = \frac{A}{\mu_0 a_0 \omega} \frac{\sin(\omega t - k a_0 - \alpha)}{a_0} \quad (\text{Ex.18})$$

conduisant à $A = \mu_0 a_1 a_0^2 \omega^2$ et $k a_0 + \alpha = \pi$, soit $\alpha = \pi - k a_0 \simeq \pi$, car $k a_0 = \frac{2\pi a_0}{\lambda} \ll 1$.

4. (a) Pour $r \gg \lambda$ (ne surtout pas utiliser la condition aux limites), on a alors

$$v_1(r, t) \simeq \frac{A}{\mu_0 r c} \cos(\omega t - k r - \alpha) = \frac{p_1(r, t)}{\mu_0 c} \quad (\text{Ex.19})$$

et l'on retrouve donc le lien entre surpression et vitesse pour une onde plane progressive harmonique ! Cela confirme le fait qu'à grande distance de la source, une onde sphérique peut être considérée comme plane.

- (b) En champ lointain, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r vaut :

$$\mathcal{P} = \langle p_1 4\pi r^2 v_1(r, t) \rangle = 4\pi \frac{A^2}{\mu_0 c} \langle \cos^2(\omega t - k r - \alpha) \rangle = \frac{2\pi A^2}{\mu_0 c} = \frac{2\pi \mu_0 \omega^4 a_0^4 a_1^2}{c} \quad (\text{Ex.20})$$

qui est bien une constante indépendante de r . Cela est logique car aucun phénomène dissipatif n'a été pris en compte dans l'approximation acoustique.

Comme la puissance est proportionnelle à $(a_0 \omega)^4$, pour obtenir une même puissance, il faut augmenter a_0 pour permettre d'avoir ω plus faible. Plus le son émis doit être grave, plus l'enceinte doit être large (c'est courant quand vous devez choisir une enceinte) !