TP12

Ondes

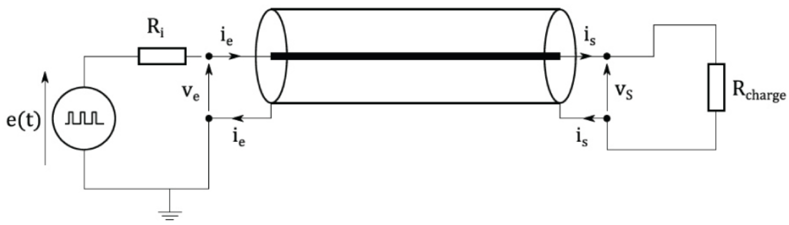
Propagation d'une onde dans un câble coaxial

Ce TP est constitué de deux parties. La première partie, théorique, a pour but d'établir l'équation de d'Alembert pour la propagation d'une onde électrique dans un câble coaxial et d'exprimer le coefficient de réflexion en amplitude de tension à l'issue du câble coaxial. Aucun des résultats établis dans cette première partie n'est à savoir par cœur, seules les méthodes (identiques au reste de la physique des ondes) sont à connaître. La seconde partie du TP, expérimentale, a pour but de confronter le modèle théorique aux résultats expérimentaux.

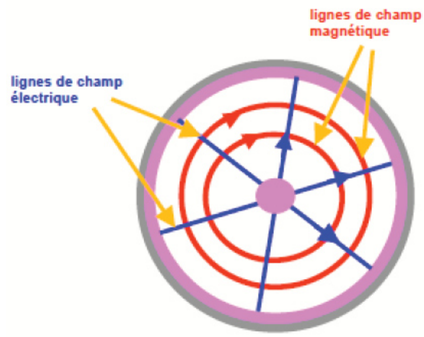
I Théorie : onde électrique dans un câble coaxial

I.1 Présentation

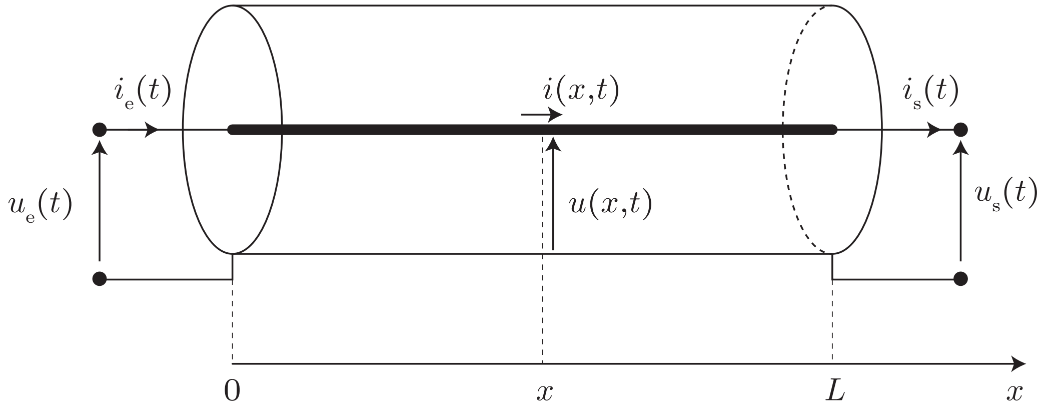
Les câbles coaxiaux sont très couramment utilisés pour transmettre des signaux électriques, par exemple depuis une antenne de transmission vers le décodeur, ou encore en TP. Ils sont constitués d'un conducteur central (appelé l'âme), d'une tresse métallique périphérique en cuivre ou aluminium, le tout séparé par un isolant électrique. En général le conducteur périphérique est porté à la masse.



La tension est appliquée entre les deux conducteurs, et le courant circule en sens inverse dans les deux conducteurs (courant quasi surfaciques dans la tresse). On constate qu'outre des phénomènes résistifs, il y a des effets capacitifs et inductifs liés à la structure spatiale du champ électromagnétique créé par cette structure.



Comparativement à ce que l'on fait d'habitude en électronique, on ne va pas se placer dans les conditions de l'ARQS, car les lignes de transmission avec des câbles coaxiaux peuvent être très longues, de sorte que $L > \lambda = \dfrac{c}{f}$, c'est-à-dire qu'il faut prendre en compte le temps de propagation. C'est particulièrement le cas à haute fréquence. On note alors $i(x,t)$ et $u(x,t)$ la tension et le courant à une abscisse x du câble :



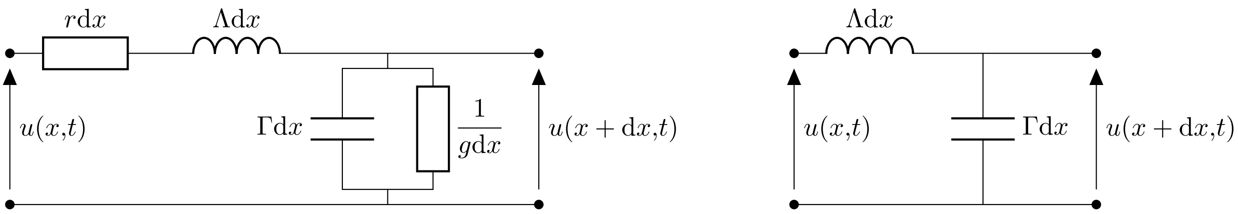
Un exemple concret d'application de cette théorie, lorsqu'on ne respecte plus l'ARQS, est la propagation d'information dans un câble éthernet : avec des fréquences de l'ordre de 10 MHz, la longueur d'onde est de l'ordre de la dizaine de mètres. Or les réseaux ont souvent des longueurs très grandes devant cette longueur d'onde !

I.2 Modélisation à constantes réparties

La modélisation du câble coaxial, ne respectant plus l'ARQS, nécessite un découpage en tronçons de longueur élémentaire $\mathrm{d}x$.

★ Sur ces tronçons de longueur $\mathrm{d}x$, les lois des mailles et nœuds sont applicables.

Pour prendre en compte les effets résistifs, capacitifs et inductifs, la modélisation électrique d'un câble est la suivante :



où $r\mathrm{d}x$ est la résistance en série (le long des conducteurs), $\Gamma\mathrm{d}x$ la capacité, $\Lambda\mathrm{d}x$ l'inductance, et $g\mathrm{d}x$ la conductance latérale de fuite (isolant imparfait). Ces grandeurs étant extensives, on introduit leurs équivalents linéïques.

Dans toute la suite de cette partie théorique, on se limitera à l'étude d'un modèle sans perte (i.e. sans effet Joule) (modèle de droite) : on parle de modèle à **constantes réparties**.

> **Odg typiques (cas d'un câble coaxial de TP) :** $\Gamma = 100\,\mathrm{pF\,m^{-1}}$ et $\Lambda = 0.25\,\mathrm{\mu H\,m^{-1}}$, quasi-constants jusqu'à des fréquences de l'ordre du GHz.

I.3 Equations couplées et équation de d'Alembert

> **Exercice :** Appliquer la loi des mailles et la loi des nœuds pour déterminer les équations aux dérivées partielles couplant $u(x,t)$ et $i(x,t)$. En déduire l'équation de d'Alembert sur $u(x,t)$.

On écrit la loi des mailles que l'on développe au premier ordre en $\mathrm{d}x$:

$$u(x,t) = \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + u(x+\mathrm{d}x,t) \Longrightarrow \Lambda \mathrm{d}x \frac{\partial i}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x = 0 \Longrightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}} \tag{I.1}$$

et la loi des nœuds :

$$i(x,t) = i(x+\mathrm{d}x,t) + \Gamma \mathrm{d}x \frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} \tag{I.2}$$

Or,

★

$$\frac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(u(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)\mathrm{d}x = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x}\mathrm{d}x$$

avec le dernier terme qui donnera un ordre 2 en $\mathrm{d}x$: on le néglige.

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}} \tag{I.3}$$

En dérivant la première par rapport à x et la deuxième par rapport à t, on aboutit à :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{1}{\Lambda}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{\Gamma\Lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \tag{I.4}$$

On reconnaît là une équation de d'Alembert, en posant $c = \dfrac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} \sim 2 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. On peut de même montrer que i vérifie l'équation $\dfrac{\partial^2 i}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 i}{\partial x^2}$.

I.4 Impédance caractéristique du câble

On a vu que la tension et l'intensité dans un câble coaxial obéissaient à des équations de d'Alembert identiques. Toutefois, on ne peut pas les résoudre indépendamment l'une de l'autre, car ces deux grandeurs restent couplées par les équations établies à l'aide de la loi des mailles et des nœuds.

Si on cherche u sous la forme d'une OPH se propageant dans le sens des x croissants, quel sera le lien avec i ?

$$\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)} \qquad \text{et} \qquad \underline{i}^+(x,t) = \underline{i}_0^+\, \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)} \qquad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c} \tag{I.5}$$

★

Le système étant linéaire, il s'agit de la même pulsation ω.
D'où, avec $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \dfrac{\partial i}{\partial t}$:

$$-jk\underline{u}^+ = -\Lambda j\omega \underline{i}^+ \Longrightarrow \frac{\underline{u}^+}{\underline{i}^+} = \frac{\Lambda\omega}{k} = \Lambda c = \frac{\Lambda}{\sqrt{\Lambda\Gamma}} = \boxed{\sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_\mathrm{c} \in \mathbb{R}} \tag{I.6}$$

Pour une onde se propageant dans le sens des x décroissants, on pose $\underline{u}^-(x,t) = \underline{u}_0^-\, e^{j(\omega t + kx)}$ et $\underline{i}^-(x,t) = \underline{i}_0^-\, e^{j(\omega t + kx)}$.
On obtient alors :

$$jk\underline{u}^- = -\Lambda j\omega \underline{i}^- \Rightarrow \underline{u}^- = -\frac{\Lambda\omega}{k}\underline{i}^- = -Z_c \underline{i}^-$$

Comme l'impédance est réelle, ces deux relations sont valables également pour les fonctions d'ondes réelles :

Relation courant-tension dans un câble coaxial

Dans le cadre d'ondes progressives harmoniques se propageant dans un câble coaxial d'impédance caractéristique Z_c, on observe les relations suivantes :

$$u_0 \cos(\omega t - kx) = Z_c i_0 \cos(\omega t - kx) \tag{I.7}$$
$$u_0 \cos(\omega t + kx) = -Z_c i_0 \cos(\omega t + kx) \tag{I.8}$$

avec $Z_c \sim 50\,\Omega$ l'impédance caractéristique (pour un câble coaxial de TP) représentant le lien entre l'onde de tension et celle de courant. Elle s'exprime bien en ohms.

Par décomposition en transformée de Fourier, ces deux relations sont toujours valables entre une onde progressive (non harmonique) de tension et de courant allant dans des sens identiques.

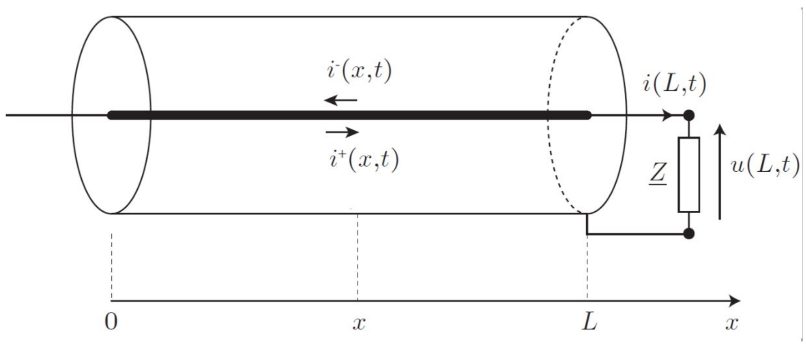
⚠ ★ En revanche, on ne peut rien dire sur une onde quelconque de tension et de courant : pour $u = u^+ + u^-$ et $i = i^+ + i^-$, on a : $u = Z_c(i^+ - i^-) \neq Z_c i$!

Sens physique associé à l'impédance caractéristique

★
- On a déterminé cette impédance Z_c alors même qu'il n'y aucune perte dans le modèle effectué du câble coaxial (pas de résistance dans le modèle du coax). Cette impédance n'est donc pas une impédance dissipative : il n'y a aucun effet Joule dans le câble ! Ainsi, l'impédance fait juste le lien entre les deux grandeurs couplées qui se propage : on parle d'impédance propagative.
- Cette impédance est une grandeur caractéristique du milieu de propagation. Un changement d'impédance se traduira par un changement de milieu de propagation, et donc par une réflexion partielle de l'onde.

I.5 Réflexion en amplitude sur une impédance terminale

Considérons la propagation d'une onde progressive harmonique de tension à l'intérieur d'un câble coaxial branché sur une impédance terminale, d'impédance $\underline{Z}$. L'onde est a priori partiellement absorbée par l'impédance terminale, partiellement réfléchie. Comment choisir $\underline{Z}$ afin que toute la puissance de l'onde soit absorbée par le récepteur ?



On ne s'intéresse pas ici aux conditions aux limites en $x = 0$. On note $\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$ l'onde incidente qui se dirige dans le sens des x croissants. L'impédance à l'extrémité du câble impose la condition aux limites :

$$\underline{u}(L,t) = \underline{Z}\underline{i}(L,t) \tag{I.9}$$

<u>Nécessité de l'existence d'une onde réfléchie</u> :

★ Dans le cas général, $\underline{Z} \neq Z_c$. Supposons un instant qu'il n'y ait pas de réflexion de l'onde de tension : $u(L,t) = u^+(L,t) = Z_c i^+(L,t) = Z_c i(L,t)$ incompatible avec la condition limite. Nécessairement, il existe une onde réfléchie se propageant dans le sens des x décroissants.

<u>Coefficient de réflexion en amplitude de tension</u> :

L'onde totale s'écrit :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{u}^+(x,t) + \underline{u}^-(x,t) \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = \underline{i}^+(x,t) + \underline{i}^-(x,t) = \frac{1}{Z_c}\left(\underline{u}^+(x,t) - \underline{u}^-(x,t)\right) \tag{I.10}$$

Appelons $\underline{r_u} = \dfrac{\underline{u}^-(L,t)}{\underline{u}^+(L,t)} \in \mathbb{C}$ le coefficient de réflexion en amplitude de la tension en $x = L$. On a alors

$$\underline{u}(L,t) = \underline{u}^+(L,t)(1+\underline{r_u}) \quad \text{et} \quad \underline{i}(L,t) = \underline{u}^+(L,t)\frac{1-\underline{r_u}}{Z_c} \tag{I.11}$$

★

La condition aux limites donne alors :

$$\begin{aligned}
\underline{u}(L,t) &= \underline{Z}\underline{i}(L,t) \\
(1+r_u)\underline{u}^+(L,t) &= \frac{\underline{Z}}{Z_c}(1-r_u)\underline{u}^+(L,t) \\
(1+\underline{r_u})Z_c &= (1-\underline{r_u})\underline{Z} \\
\underline{r_u} &= \frac{\underline{Z} - Z_c}{\underline{Z} + Z_c}
\end{aligned}$$

Analyse

Regardons quelques cas particuliers :

- si $\underline{Z} = Z_c$, il n'y a pas de réflexion : on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**, car l'onde incidente est totalement absorbée par la charge résistive ;
- si $\underline{Z} = 0$, on est en **court-circuit**, et $\underline{r_u} = -1$: il y a alors réflexion totale de l'onde incidente avec changement de signe de la tension. Un calcul supplémentaire montre alors qu'on a une onde stationnaire à la fois pour la tension et pour l'intensité, mais qu'elles sont en quadrature spatiale et temporelle (donc aucune puissance n'est transportée en moyenne)
- si $|\underline{Z}| \to +\infty$, on est en **circuit ouvert**, et $\underline{r_u} = +1$, il y a également réflexion totale sans changement de signe de la tension. On peut également montrer que les ondes sont en quadrature.

II Expérimentation : étude d'un câble coaxial pour la télévision

II.1 Analyse de la fiche technique

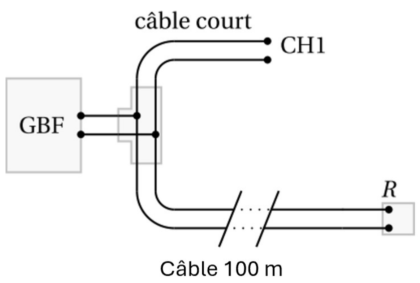
La fiche technique du câble coaxial étudié dans ce TP est donnée en fin d'énoncé. On précise par ailleurs que le câble étudié a une longueur $\ell = 100\,\mathrm{m}$.

- Repérer dans la fiche technique la valeur de la vitesse de propagation c d'une onde électrique dans le câble coaxial et la valeur de l'impédance caractéristique Z_c.

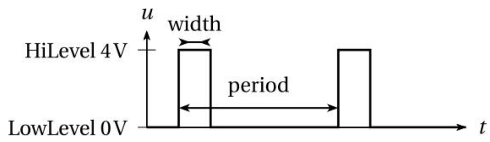
II.2 Etude dans le cadre du modèle sans perte

a Etude en impulsions

- Réaliser le montage ci-contre à l'aide d'un « T » à la sortie du GBF. La résistance R est un potentiomètre que l'on placera à l'extrémité du câble.



- On souhaite régler le GBF afin qu'il délivre des impulsions (pulse) périodiques positives rectangulaires de largeur (width) τ espacées de T, de niveau 4 V avec une base à 0 V. Comment doit-on choisir τ et T pour être capable de déterminer le temps de propagation ?



- Observer et analyser l'allure du signal sur l'oscilloscope en fonction de la résistance R.

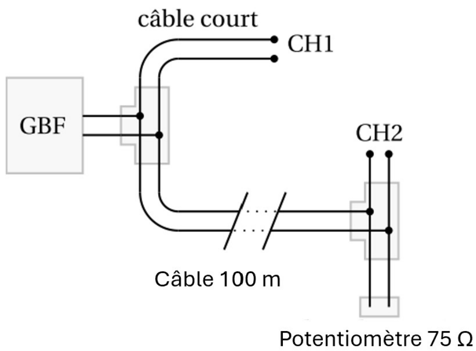
- Déterminer la vitesse de propagation de l'onde dans le câble coaxial. Cette vitesse est-elle en réalité une vitesse de groupe ou une vitesse de phase ?

- Proposer une méthode de mesure de la résistance caractéristique Z_c du câble et déterminer expérimentalement un ordre de grandeur de sa valeur.

- Déduire de ces mesures une estimation de l'inductance linéïque Λ et de la capacité linéïque Γ.

b Etude en ondes progressives harmoniques

- Réaliser le montage ci-contre à l'aide d'un « T » à la sortie du GBF.
- Justifier la nécessité de régler le potentiomètre sur 75 Ω dans le but d'obtenir une onde progressive harmonique de tension dans le câble coaxial.
- Déterminer la différence de phase Φ (en s) entre l'entrée et la sortie de la ligne pour des fréquences de 100 kHz à 1000 kHz avec un pas de 100 kHz. En déduire la vitesse de propagation.



- La vitesse mesurée est-elle une vitesse de groupe ou une vitesse de phase ? Comparer avec la valeur obtenue dans la sous-partie précédente.

c Etude en ondes stationnaires

On reprend le montage de la sous-partie II.2.a, avec la sortie du coaxial ouverte. Le GBF délivre un signal sinusoïdal de haute fréquence, i.e. supérieure au MHz.

- Justifier expérimentalement que l'on a bien à faire à une onde stationnaire.

Théoriquement, avec un câble parfait, on devrait observer des nœuds et des ventres. On observe plutôt, dans un câble réel, des minima et maxima.

- Noter d'une part, quelques fréquences correspondant à un ventre de tension à l'entrée de l'oscilloscope, et d'autre part, celles correspondant à un nœud de tension.

- Exploiter ces résultats pour obtenir une nouvelle valeur de la célérité des ondes dans le câble.

II.3 Détermination des caractéristiques du câble coaxial dans le modèle avec pertes

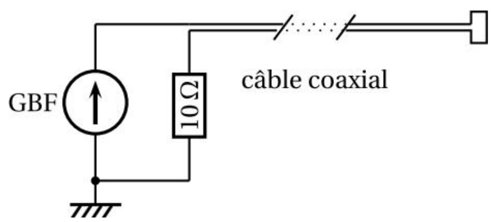
a Utilisation d'un multimètre

- En utilisant un multimètre, essayer de mesurer la conductance linéique du câble. On négligera désormais g.

- Mesurer la résistance série du câble coaxial complet (âme + gaine) et en déduire r.

- Mesurer la capacité du câble coaxial et en déduire Γ.

b Etude d'un filtre



- Le GBF délivre un signal sinusoïdal, la sortie du câble est en court-circuit. Jusqu'à 250 kHz environ, le câble entier est équivalent, vu depuis l'entrée, à sa résistance en série avec son inductance.
- On réalise donc le circuit suivant, comprenant le GBF, le câble et la boite AOIP réglée sur $10\,\Omega$. Déterminer l'inductance du câble coaxial. En déduire Λ.

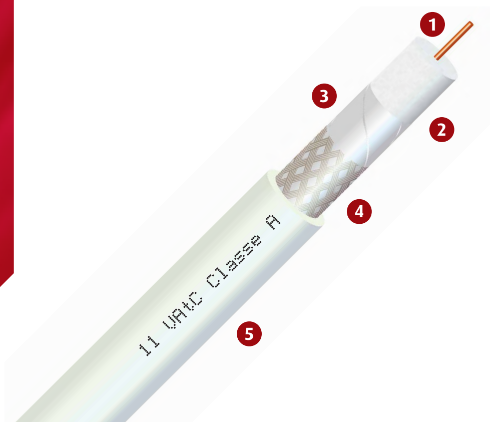
TS CABLES®

FT 5005

TELEVISION 75 ohms satellite, numérique

11 VAtC classe A

câbles coaxiaux



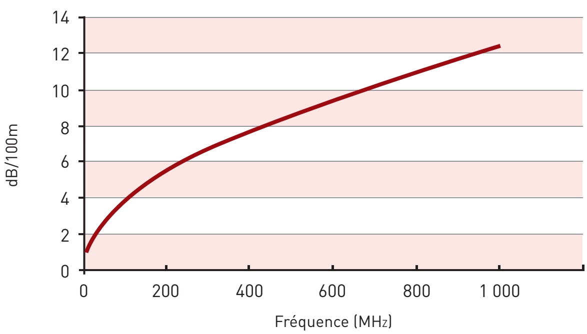
RPC CONFORME EN 50575 CERTIFIE EUROCLASSES

1 *Âme massive cuivre nu*
Composition nominale : 1 x 1.68 mm
2 *Diélectrique : polyéthylène cellulaire*
Diamètre nominal : 7.0 mm
3 *Ruban polyester/aluminium*
4 *Tresse cuivre étamé*
5 *Gaine : PVC*
Diamètre nominal : 10.3 mm
Couleur standard : blanc RAL 9003

Affaiblissements

Fréquence (MHz)	Affaiblissement linéique maximal (dB/100m)	Affaiblissement de réflexion (dB/100m)
5	0.9	23.0
50	2.7	23.0
100	3.8	23.0
200	5.4	23.0
400	7.7	23.0
800	11.0	20.0
862	11.5	20.0
950	12.1	
1000	12.4	

Affaiblissement linéique maximal



Caractéristiques

- Impédance : 75 ohms
- Capacité nominale : 50 pF/m
- Efficacité d'écran à 1 GHz : ≥ 85 dB
- Vitesse de propagation : 88 %
- Masse linéique approximative : 106 kg/km
- Rayon de courbure minimal : 55 mm
- Température d'utilisation : -30°C à +80°C
- Non propagateur de la flamme catégorie C2 selon NF C 32-070, IEC 60332-1

Marquage

EN 50117-2 11VAtC 1.7/6.9 Classe A 3 GHz

Homologations - Normes

UTE C 90-132, NF EN 50117-1, NF EN 50117-2-1, NF C 32-070, IEC 60332-1

Conditionnement

Bobines. Tourets.

Options

Autres couleurs : nous consulter.

Applications

Câble coaxial de raccordement conçu pour les réceptions difficiles ou longues distances. Ce câble est utilisé pour le câblage intérieur des points d'interface dans les habitations à usage collectif.
Plage d'utilisation jusqu'à 1000 MHz.

Parc d'Assignies • 32, av. de St-Etienne • F 42160 Andrézieux-Bouthéon
Tél. : +33 (0)4 77 36 07 00 • Fax : +33 (0)4 77 36 07 10 • E-mail : polycable@omerin.com • www.omerin-polycable.com

omerin division polycable