

CCINP PC 2024

EXERCICE 1

Racine cubique d'une matrice

Partie I - Etude d'un exemple

Q1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -12 \\ -1 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9\lambda + 8 = (\lambda - 1)(\lambda - 8)$.

χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable. De plus les valeurs propres de A sont 1 et 8 donc A est semblable à la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Par conséquent il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Q2. Soit $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\Delta = P^{-1}BP$. On a donc $B = P\Delta P^{-1}$.

Si $B^3 = A$, alors $\Delta^3 = P^{-1}B^3P = P^{-1}AP = D$.

Si $\Delta^3 = D$, alors $B^3 = P\Delta^3P^{-1} = A$.

On peut alors conclure que B est une racine cubique de A si et seulement si Δ est une racine cubique de D .

Q3. Si $\Delta^3 = D$, alors $\Delta D = \Delta^4 = D\Delta$: Δ et D commutent.

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$\Delta D = \begin{pmatrix} a & 8b \\ c & 8d \end{pmatrix} \text{ et } D\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ 8c & 8d \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont égales donc $8b = b$ et $c = 8c$. On en déduit $b = c = 0$ et $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Q4. D'après ce qui précède, si Δ est une racine cubique de D , alors Δ est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ où a et d sont des nombres réels vérifiant $a^3 = 1$ et $d^3 = 8$. On a donc $a = 1$ et $d = 2$.

Réciproquement, si $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, alors $\Delta^3 = D$.

La seule racine cubique de D est donc $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

D'après la question 2, la seule racine cubique de A est $B = P\Delta P^{-1}$.

Partie II - Dans un plan euclidien

Q5. u est la rotation d'angle θ .

Q6. Soit v la rotation d'angle $\frac{\theta}{3}$.

v^3 est alors la rotation d'angle $3\frac{\theta}{3} = \theta$ donc $v^3 = u$.

La matrice $N = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta}{3}) & -\sin(\frac{\theta}{3}) \\ \sin(\frac{\theta}{3}) & \cos(\frac{\theta}{3}) \end{pmatrix}$ est donc une racine cubique de M .

Q7. Si N est une matrice orthogonale de taille 2 et de déterminant -1 donc N est la matrice en base orthonormée d'une réflexion. En particulier, $N^2 = I$. On a donc $N^3 = N$: N est une racine cubique de N .

Partie III - Racines cubiques et diagonalisation

III.1 - Existence d'une racine cubique polynomiale

Q8. λ est un nombre réel donc $\mu = \sqrt[3]{\lambda}$ existe et vérifie $\mu^3 = \lambda$.

La matrice $H_p(\mu)$ est donc une racine cubique de $H_p(\lambda)$.

Q9. A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ donc, en notant $p_1, \dots, p_d$ les ordres de mul-

tiplicité, A est semblable à la matrice diagonale par blocs $D = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_{p_d}(\lambda_d) \end{pmatrix} :$

$A = PDP^{-1}$ avec P inversible.

Pour tout i , on pose $\mu_i = \sqrt[3]{\lambda_i}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} H_{p_1}(\mu_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & H_{p_d}(\mu_d) \end{pmatrix}.$

Par calcul matriciel par blocs, $\Delta^3 = D$ donc $P^{-1}\Delta P$ est une racine cubique de A .

III.2 - Réduction d'une racine cubique

Q10. $A = A - 0I_n$ est inversible donc 0 n'est pas valeur propre de A . Les valeurs propres de A sont donc non nulles : $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.

Q11. $z = 0$ n'est pas solution de $z^3 = \lambda$.

On cherche z sous la forme $re^{i\alpha}$ avec $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

D'après la formule de Moivre, $z^3 = r^3 e^{3i\alpha}$ donc $z^3 = \lambda$ équivaut à $\begin{cases} r^3 = \rho \\ 3\alpha \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$ soit encore, puisque

$r \in \mathbb{R}, \begin{cases} r = \sqrt[3]{\rho} \\ \alpha \equiv \frac{\theta}{3}[\frac{2\pi}{3}] \end{cases}$ Les solutions de $z^3 = \lambda$ sont donc $\sqrt[3]{\rho}e^{i\theta/3}$, $\sqrt[3]{\rho}e^{i(\theta/3+2\pi/3)}$ et $\sqrt[3]{\rho}e^{i(\theta/3+4\pi/3)}$.

Q12. Pour k entre 1 et d , on pose $\mu_{1,k}$, $\mu_{2,k}$ et $\mu_{3,k}$ les solutions complexes de $z^3 = \lambda_k$.

On a alors $X^3 - \lambda_k = (X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k})$.

$$Q(X) = \prod_{k=1}^d \left((X - \mu_{1,k})(X - \mu_{2,k})(X - \mu_{3,k}) \right)$$

Si $k \neq l$, $\lambda_k \neq \lambda_l$ donc les $\mu_{i,k}$ sont deux à deux distincts (car, par définition, ils le sont aussi à k fixé).

Le polynôme Q est donc scindé à racines simples.

Q13. A est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ donc $P = \prod_{k=1}^d (X - \lambda_k)$ est un polynôme annulateur de A .

$B^3 = A$ donc $\prod_{k=1}^d (B^3 - \lambda_k I_n) = 0$: Q est un polynôme annulateur de B . Mais Q est scindé à racines simples donc B est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

EXERCICE 2

La fonction $\ln(\Gamma)$

Partie I - Existence de la solution du problème étudié

Q14. Soit $x \in]0; +\infty[$.

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_0(u^2)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = 0$ donc

$$u_n(x) = x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$$

donc

$$u_n(x) = \frac{x^2 - x}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Par comparaison aux séries de Riemann (avec $2 > 1$), on en déduit que la série $\sum u_n(x)$ converge absolument. Cette série est donc convergente. Ceci est vrai pour tout $x \in]0; +\infty[$ donc la série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$x \mapsto 1 + \frac{x}{n}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$ donc, par composition, $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. Par somme, u_n est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} u'_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \frac{x}{n}} \\ &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+x} \\ &= -\frac{1}{n+x} + \frac{1}{n} + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n \end{aligned}$$

où $\varepsilon_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}$.

Avec le développement limité de $\ln(1+u)$ comme ci-dessus, on a $\varepsilon_n \sim -\frac{1}{2n^2}$. Par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \varepsilon_n$ converge absolument.

Q16. Soit $(a, b) \in]0; +\infty[^2$ tel que $a < b$.

Pour $x \in [a; b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, d'après l'inégalité triangulaire, (en remarquant que $x > 0$)

$$|u'_n(x)| \leq \frac{x}{n(n+x)} + |\varepsilon_n|$$

$x \in [a; b]$ donc $n(n+x) \geq n(n+a) > 0$ et $\frac{x}{n(n+x)} \leq \frac{b}{n(n+a)}$ puis

$$|u'_n(x)| \leq \frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n|$$

Quand n tend vers l'infini, $\frac{b}{n(n+a)} \sim \frac{b}{n^2}$ donc, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \frac{b}{n(n+a)}$ converge. De plus, d'après la question précédente, $\sum |\varepsilon_n|$ converge donc, par somme $\sum \left(\frac{b}{n(n+a)} + |\varepsilon_n| \right)$ converge.

On peut alors conclure que la série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur $[a; b]$.

Q17. i) — La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$.

— Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

— La série de fonctions $\sum u'_n$ converge normalement sur tout segment $[a; b]$ inclus dans $]0; +\infty[$ donc elle converge uniformément sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$.

— D'après le théorème de transfert de dérivabilité, $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout segment inclus dans $]0; +\infty[$ donc sur $]0; +\infty[$.

En ajoutant la fonction $\ln$, elle aussi $\mathcal{C}^1$, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

De plus, pour $x > 0$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n(n+x)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_n$$

ii) Soit $x \in]0; +\infty[$.

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x)$$

où

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) - \ln(n+x+1) + \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n) \\ &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+x) - \ln(n+1+x) \end{aligned}$$

Par télescopage, pour $N \geq 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N v_n(x) &= \ln(N+1) - \ln(1) + \ln(1+x) - \ln(N+1+x) \\ &= \ln(1+x) - \ln\left(1 + \frac{x}{N+1}\right) \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient $\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\ln(x+1) + \ln(x) + \ln(1+x) - 0$ donc

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = \ln(x)$$

iii) $x \mapsto -\frac{1}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n(x) = \frac{x}{n(n+x)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$.

Pour $x > 0$, $v'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2} \geq 0$ donc v_n est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Par somme, on en déduit que φ' est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(1) = 0$ et $\ln(1) = 0$ donc $\varphi(1) = 0$.

La fonction φ vérifie donc les conditions de (C).

Partie II - Unicité de la solution

Q18. D'après la condition ii) de (C), vérifiée par φ et par g , pour $x > 0$, $h(x+1) - h(x) = \ln(x) - \ln(x) = 0$:

$$\forall x > 0, h(x+1) = h(x)$$

h est la différence de deux fonctions $\mathcal{C}^1$ (i) de (C)) donc on peut dériver de part et d'autre de cette égalité pour obtenir :

$$\forall x > 0, h'(x+1) = h'(x)$$

Q19. Soient $x \in]0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$h'(x+p) = \varphi'(x+p) - g'(x+p).$$

φ' est croissante et $p \leq x+p \leq p+1$ donc $\varphi'(p) \leq \varphi'(x+p) \leq \varphi'(1+p)$.

De même $g'(p) \leq g'(x+p) \leq g'(1+p)$ donc $-g'(1+p) \leq -g'(x+p) \leq -g'(p)$. En additionnant, on obtient

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leq h'(x+p) \leq \varphi'(1+p) - g'(p)$$

En dérivant la condition ii), on obtient $g'(1+p) - g'(p) = \frac{1}{p}$ donc $g'(1+p) = g'(p) + \frac{1}{p}$.

Par définition de h , $h'(p) = \varphi'(p) - g'(p)$ donc $\varphi'(p) = h'(p) + g'(p)$.

En faisant la différence des deux relations obtenues,

$$\varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}$$

On a donc $h'(x+p) \geq h'(p) - \frac{1}{p}$ puis $h'(x+p) - h'(p) \geq -\frac{1}{p}$.

En échangeant les rôles joués par φ et g dans ce qui précède, on obtient $h'(x+p) - h'(p) \leq \frac{1}{p}$.

On a donc l'encadrement

$$-\frac{1}{p} \leq h'(x+p) - h'(x) \leq \frac{1}{p}$$

ce qui correspond à $|h'(x+p) - h'(x)| \leq \frac{1}{p}$.

Q20. Soit $x \in]0; 1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

D'après Q18., h' est 1-périodique donc, $h'(x+p) = h'(x)$ et $h'(p) = h'(1)$. La question précédente devient alors :

$$|h'(x) - h'(1)| \leq \frac{1}{p}$$

Ceci est vrai pour tout p donc en le faisant tendre vers l'infini, $|h'(x) - h'(1)| = 0$: $h'(x) = h'(1)$. h' est donc constante sur $]0; 1]$. Par ailleurs, elle est 1-périodique et continue donc elle est constante sur $]0; +\infty[$.

Q21 On note $c \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x > 0$, $h'(x) = c$.

On a alors, pour tout $x > 0$, $h(x) = c(x-1)$ ($h(1) = 0$).

On a aussi, pour tout $x > 0$, $h(x+1) = h(x)$ donc $cx = cx - c$ et $c = 0$.

On a finalement, pour tout $x > 0$, $h(x) = 0$; par conséquent

$$\varphi = g$$

Partie III - La formule de duplication

Q22. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N (\ln(n+1) - \ln(n)) - \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{2n+1}{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(N+1) - \ln \left(\frac{\prod_{n=1}^N (2n+1)}{\prod_{n=1}^N (2n)} \right) \end{aligned}$$

$\prod_{n=1}^N (2n) = 2^N N!$ et en multipliant, divisant par ce produit des pairs pour compléter le produit des

impairs, $\prod_{n=1}^N (2n+1) = (2N+1) \frac{\prod_{k=1}^{2N} k}{2^N N!}$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(N+1) - \ln \left(\frac{(2N+1)(2N)!}{(2^N N!)^2} \right)$$

et, avec les propriétés du $\ln$,

$$\exp \left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) \right) = \frac{\sqrt{N+1} (2^N N!)^2}{(2N+1)(2N)!}$$

Q23. D'après la formule de Stirling, $N! \sim \sqrt{2\pi} N^{N+1/2} e^{-N}$ donc $(2N)! \sim \sqrt{2\pi} (2N)^{2N+1/2} e^{-2N}$.
Par produit et quotient d'équivalents,

$$\begin{aligned} \exp \left(\sum_{n=1}^N u_n \left(\frac{1}{2} \right) \right) &\sim \frac{N^{1/2} 2^{2N} (2\pi) N^{2N+1} e^{-2N}}{(2N) \sqrt{2\pi} (2N)^{2N+1/2} e^{-2N}} \\ &\sim \frac{\sqrt{2\pi} 2^{2N} N^{2N+3/2}}{2^{2N+3/2} N^{2N+3/2}} \\ &\sim \frac{\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

Par continuité de la fonction $\exp$, $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(\pi) - \ln(2)$ puis $\varphi \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \ln(\pi)$.

Mais $\psi(1) = 0 + \varphi(1/2) + \varphi(1) - \frac{1}{2} \ln(\pi)$ avec $\varphi(1) = 0$ donc $\psi(1) = 0$.

Q24. Montrons que ψ vérifie les conditions (C) :

(i) Par composition et somme, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

(ii) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned}
 \psi(x+1) - \psi(x) &= \ln(2) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+2}{2}\right) - \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) \\
 &= \ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2} + 1\right) - \varphi\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln(2) + \ln\left(\frac{x}{2}\right) \\
 &= \ln(x)
 \end{aligned}$$

(iii) Pour $x > 0$,

$$\psi'(x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}\varphi'\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

φ' est croissante donc, par somme de deux fonctions croissantes, ψ' est croissante sur $]0; +\infty[$.

(iv) D'après ce qui précède, $\psi(1) = 0$.

ψ vérifie les conditions (C) donc, par unicité, $\psi = \varphi$ ce qui conduit à

$$\forall x > 0, (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi)$$

EXERCICE 3

Temps d'attente avant une collision

Partie I - Une expression de l'espérance de T

Q25. Par définition de T_n , $T_n(\Omega) \subset \llbracket 2; n+1 \rrbracket$.

Par ailleurs, si k est dans cet ensemble, l'événement $(X_1 = 1) \cap \dots \cap (X_{k-1} = k-1) \cap (X_k = 1)$ est inclus dans $T_n = k$ donc k est une valeur prise par T_n .

On peut alors conclure que $T_n(\Omega) = \llbracket 2; n+1 \rrbracket$.

Q26. Par définition, chaque X_i prend des valeurs entre 1 et n donc Z prend des valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket^k$.

Soit $(i_1, \dots, i_k) \in \llbracket 1; n \rrbracket^k$.

Par indépendance des X_i ,

$$\begin{aligned}
 P(Z = (i_1, \dots, i_k)) &= P(X_1 = i_1, \dots, X_k = i_k) \\
 &= P(X_1 = i_1) \cdots P(X_k = i_k) \\
 &= \frac{1}{n^k}
 \end{aligned}$$

Z suit donc la loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket^k$.

Q27. A est l'ensemble des k listes d'éléments deux à deux distincts pris entre 1 et n donc le cardinal

de A est $\frac{n!}{(n-k)!}$.

$T_n > k$ est réalisé si et seulement si lors des k premiers tirages on obtient k numéros distincts c'est-à-dire si et seulement si Z prend une valeur dans A : $(T_n > k) = (Z \in A)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
 P(T_n > k) &= P(Z \in A) \\
 &= \sum_{a \in A} P(Z = a) \\
 &= \sum_{a \in A} \frac{1}{n^k} \\
 &= \frac{\text{card}(A)}{n^k}
 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$P(T_n > k) = P(Z \in A) = \frac{n!}{(n-k)!n^k}$$

Q28. $T_n(\Omega)$ est fini donc T_n est d'espérance finie.

De plus, T_n est à valeurs dans $\mathbb{N}$ donc $E(T_n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_n \geq k)$.

T_n prend des valeurs entre 2 et $n+1$ donc, si $k > n+1$, $P(T_n \geq k) = 0$.

Par conséquent, $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n \geq k)$.

$(T_n \geq k) = (T_n > k-1)$ (car k entier et T_n à valeurs entières) donc $E(T_n) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_n > k-1)$.

Le changement d'indice $l = k-1$ conduit alors à $E(T_n) = \sum_{l=0}^n P(T_n > l)$ soit, avec la question précédente,

$$E(T_n) = \sum_{l=0}^n \frac{n!}{(n-l)!n^l}$$

Partie II - Une expression intégrale de l'espérance

Q29. Soit $k \in \mathbb{N}$.

La fonction $f_k : t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et, par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 f_k(t) = 0$

donc $f_k(t) = o(1/t^2)$. $2 > 1$ donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ et donc f_k aussi.

f_k est donc intégrable sur $[0; +\infty[$ ce qui démontre la convergence de l'intégrale I_k .

Q30. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(k) : \ll I_k = k! \gg$.

$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie.

$$I_{k+1} = \int_0^{+\infty} t^{k+1} e^{-t} dt.$$

On pose, pour $t \in [0; +\infty[$, $u(t) = t^{k+1}$ et $v(t) = -e^{-t}$.

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$ et, pour $t \geq 0$, $u'(t) = (k+1)t^k$ et $v'(t) = e^{-t}$.

D'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} uv'$ converge et par croissance comparée $\lim_{t \rightarrow +\infty} uv(t) = 0$.

On peut donc utiliser l'intégration par parties qui nous donne la relation

$$I_{k+1} = [-t^{k+1} e^{-t}]_0^{+\infty} + (k+1) \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (k+1) I_k$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $I_{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!$. $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.

On peut alors conclure par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $I_k = k!$.

Q31. D'après la formule du binôme, pour $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \frac{1}{n^l} t^l e^{-t}$$

Par conséquent $t \mapsto \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t}$ est une somme de fonctions intégrables donc est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

De plus, par linéarité d'intégrales impropres convergentes,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt &= \sum_{l=0}^n \frac{\binom{n}{l}}{n^l} I_l \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{n!}{(n-l)! l! n^l} l!\end{aligned}$$

Après simplification et avec la partie précédente,

$$E(T_n) = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n e^{-t} dt$$

Partie III - Un équivalent de l'espérance

III.1 Etude de la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q32. La fonction $t \mapsto t - n$ est $\mathcal{C}^1$ bijective strictement croissante de $[n; +\infty[$ dans $[0; +\infty[$ donc on peut effectuer le changement de variable $v = t - n$ pour obtenir

$$J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{n+v}{n}\right)^n e^{-(v+n)} dv$$

donc

$$J_n = e^{-n} \int_0^{+\infty} \left(2 + \frac{v}{n}\right)^n e^{-v} dv$$

Q33. Pour $v \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq 1 + \frac{v}{2n} \leq e^{v/2n}$ et la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $0 \leq \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n \leq e^{v/2}$. De plus $e^{-v} \geq 0$ donc $0 \leq \left(1 + \frac{v}{2n}\right)^n e^{-v} \leq e^{-v/2}$. $\frac{1}{2} > 0$ donc $v \mapsto e^{-v/2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ ce qui autorise à intégrer l'encadrement ci-dessus :

$$0 \leq K_n \leq \int_0^{+\infty} e^{-v/2} dv$$

donc

$$0 \leq K_n \leq 2$$

La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée.

Q34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = e^{-n} 2^n K_n$ donc $J_n = \left(\frac{2}{e}\right)^n K_n$.

$\left|\frac{2}{e}\right| < 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$. De plus $(K_n)_n$ est bornée donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$$

III.2 - Etude de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Q35. Le changement de variable $u = \frac{t}{\sqrt{n}}$ conduit à

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} f_n(u) du.$$

Par ailleurs, si $u > \sqrt{n}$, $f_n(u) = 0$ donc

$$I_n = \sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} du = \sqrt{n} \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

Q36. Soit $u \in]0; \sqrt{n}[$.

Par propriétés du $\ln$, $\ln(f_n(u)) = n \ln \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}$.

On utilise le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1+x)$:

pour $x \in]-1; 1[$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

$\frac{u}{\sqrt{n}} \in]-1; 1[$ donc

$$\begin{aligned} \ln(f_n(u)) &= n \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{u^k}{n^{k/2}} - u\sqrt{n} \\ &= u\sqrt{n} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^{k/2-1}} u^k - u\sqrt{n} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\ln(f_n(u)) = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^{k/2-1}} u^k$$

Q37. Soit $u \in]0; \sqrt{n}[$.

Le premier de cette somme, pour $k=2$ est $-\frac{1}{2n^{1-1}}u^2 = -\frac{u^2}{2}$ donc $\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{kn^{k/2-1}} u^k$.

On pose, pour $k \geq 2$, $a_k = \frac{u^k}{kn^{k/2-1}} > 0$.

$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+1} \frac{u}{\sqrt{n}} < 1$ donc $a_{k+1} < a_k$.

La série $\sum (-1)^{k-1} a_k$ est donc une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère spécial des séries alternées. Le reste est donc majoré en valeur absolue par la valeur absolue de son premier terme. On a donc : $\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3n^{3/2-1}}$ soit :

$$\left| \ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \right| \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}}$$

En particulier $\ln(f_n(u)) + \frac{u^2}{2} \leq \frac{u^3}{3\sqrt{n}} \leq \frac{u^2}{3}$. On en déduit $\ln(f_n(u)) \leq -\frac{u^2}{6}$.

Q38. La fonction $f : u \mapsto e^{-u^2/2}$ est continue sur $[0; +\infty[$. $u^2 f(u) = u^2 e^{-u^2/2}$ donc, par croissance comparée, $\lim_{u \rightarrow +\infty} u^2 f(u) = 0$ donc $f(u) = o(1/u^2)$. $2 > 1$ donc, par comparaison, f est intégrable sur $[0; +\infty[$.

Par croissance de la fonction $\exp$, pour $u \in]0; \sqrt{n}[$, $f_n(u) \leq e^{-u^2/6}$.

De plus, $f_n(u) \geq 0$ donc $|f_n(u)| \leq e^{-u^2/6}$.

Cette majoration est encore valable pour $u \geq \sqrt{n}$ donc :

$$\forall u \in]0; +\infty[, |f_n(u)| \leq e^{-u^2/6}$$

Comme ci-dessus, $u \mapsto e^{-u^2/6}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$.
 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.
 Soit $u > 0$.
 Pour n assez grand, $u < \sqrt{n}$ et

$$\begin{aligned} f_n(u) &= \left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-u\sqrt{n}} \\ &= \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) - u\sqrt{n}\right) \end{aligned}$$

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o_0(x^2)$ donc, quand n tend vers l'infini, $\ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{n}}\right) = \frac{u}{\sqrt{n}} - \frac{u^2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ puis

$$f_n(u) = \exp\left(-u^2/2 + o(1)\right)$$

Par continuité de la fonction $\exp$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) = e^{-u^2/2}$.

La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement sur $]0; +\infty[$ vers f .
 f est continue par morceaux sur $]0; +\infty[$.

On peut alors utiliser le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u) du = \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} du$$

III-3 - Conclusion

Q39. $E(T_n) = I_n + J_n$ d'après la relation de Chasles.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ et $I_n \sim \sqrt{n} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ qui diverge vers l'infini donc

$$E(T_n) \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$$