Spé PC. Année 2024-2025. Révisions [1]

Exercice 1. Soient $r \in [0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} r^n \cos(nx)$ et vérifier que $\displaystyle 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} r^n \cos(nx) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2r\cos(x)+r^2}$.

Exercice 2. *Etude d'une matrice «tridiagonale».* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que si $n \geq 2$,

$$\begin{array}{rrl} \forall i \in \{1,\cdots,n\}, & a_{ii} = & 2 \\ \forall i \in \{2,\cdots,n\}, & a_{ii-1} = & -1 \\ \forall i \in \{1,\cdots,n-1\}, & a_{ii+1} = & -1, \end{array}$$

tous les autres coefficients de A étant nuls, et si $n = 1$, $A = (a_{11}) = (2)$.

1. A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

2. • On rappelle que toute matrice $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $\displaystyle |b_{ii}| > \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$ est inversible.

En déduire que le spectre de A est inclus dans $[0,4]$.

3. *On note $D_n(X) = \det(A - XI_n) = (-1)^n \chi_A(X)$ où $\chi_A(X)$ est le polynôme caractéristique de A.*
Soit $\theta \in]0,\pi[$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(\theta) = D_n(2 - 2\cos\theta)$.

3. a. Montrer que $\forall n \geq 3$, $u_n(\theta) = 2\cos(\theta).\, u_{n-1}(\theta) - u_{n-2}(\theta)$.

3. b. On souhaite définir le réel $u_0(\theta)$ pour que l'égalité précédente soit aussi valable pour $n = 2$.
Quelle valeur faut-il alors attribuer à $u_0(\theta)$?

3. c. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle u_n(\theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}$.

4. Déduire des questions précédentes que $\displaystyle sp(A) = \{4\sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)} / \, k \in \{1,\cdots,n\}\}$.

Problème 1.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $\displaystyle S_n = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$ et $\displaystyle \widetilde{S_n} = 1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

1. a. Vérifier que la suite $\displaystyle (\frac{S_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

1. b. Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle \frac{2}{2k+1} \leq \int_{2k-1}^{2k+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{2}{2k-1}$. En déduire que $\displaystyle S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln n$.

1. c. Soit $x \in [-1,1]$. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{S_n}{n} x^{2n}$. On note $f(x)$ sa somme.

▷ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1,1]$, $\displaystyle u_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{S_n}{n} x^{2n}$.

1. d. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas normalement sur $[-1,1]$.

1. e. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $[-1,1]$.
En déduire que f est continue sur $[-1,1]$.

2. Soit $x \in]-1,1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\displaystyle v_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2. a. Justifier que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n(x)$ converge absolument et rappeler sans démonstration la valeur de sa somme.

2. b. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k(x)\, v_{n-k}(x) = u_{n+1}(x)$. En déduire que $f(x) = (\arctan(x))^2$.

3. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{S_n}{n}$.

4. Soit $I_k = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^k x\, dx$, $k \in \mathbb{N}$.

4. a. Montrer que la suite $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente, et que $\lim\limits_{k\to+\infty} I_k = 0$.

4. b. Vérifier que $I_{2k} + I_{2k+2} = \dfrac{1}{2k+1}$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\widetilde{S_n} = \dfrac{\pi}{4} + (-1)^{n+1} I_{2n}$.

5. *Convergence et somme de la série* $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{S_n}{n}(\widetilde{S_n} - \dfrac{\pi}{4})$.

5. a. Justifier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{S_n}{n}(\widetilde{S_n} - \dfrac{\pi}{4})$.

5. b. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$. Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{S_n}{n} \tan^{2n} t$.

5. c. Déduire de 5. b. et 1. e. que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{S_n}{n}(\widetilde{S_n} - \dfrac{\pi}{4}) = \dfrac{\pi^3}{192}$.

Problème 2. *Moyenne arithmético-géométrique de deux réels strictement positifs.*

I. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère les deux suites de réels strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$a_0 = a,\ b_0 = b, \text{ et, pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2},\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

1. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq a_n$. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$) est décroissante (resp. croissante).

2. Justifier que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, puis qu'elles convergent vers une même limite réelle, notée $M(a,b)$ (que l'on ne cherchera pas à calculer). *Remarque : $M(a,b)$ est appelé moyenne arithmético-géométrique de a et b.*

II. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On pose $I(a,b) = \int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale généralisée $I(a,b)$.

2. Montrer, avec un changement de variable simple, que : $I(a,b) = \dfrac{1}{a} f(\dfrac{b}{a})$ où f est la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0,\ f(x) = I(1,x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2+1)(t^2+x^2)}}.$$

3. Démontrer que f est continue sur $]0,+\infty[$.

III. Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. Soit φ l'application de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\forall t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2}(t - \dfrac{ab}{t})$.

1. Montrer que φ est une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ en déterminant l'unique antécédent $\varphi^{-1}(u)$ d'un réel u par φ.

2. Soit $t > 0$ et $u = \varphi(t)$. Vérifier que $(t^2+a^2)(t^2+b^2) = 4t^2(u^2 + (\dfrac{a+b}{2})^2)$.

3. Soit $(\varepsilon, T) \in]0,+\infty[^2$ tel que $\varepsilon < T$. Effectuer le changement de variable $u = \varphi(t)$ dans l'intégrale $\int_\varepsilon^T \dfrac{dt}{\sqrt{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}}$.

En déduire que : $I(a,b) = I(\dfrac{a+b}{2}, \sqrt{ab})$.

4. On considère à nouveau les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies dans la partie I. Montrer que la suite $(I(a_n,b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

5. *Relation entre $M(a,b)$ et $I(a,b)$.* Déduire de III. 4, I. 2, II. 2, II. 3 que : $I(a,b) = \dfrac{\pi}{2M(a,b)}$.