Spé PC. Année 2024-2025. Révisions [1*]

Exercice 1. `[Normes subordonnées]` Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit $\|\cdot\|$ une norme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / \|X\| = 1\}$.

1. a. Montrer que l'application $f : X \mapsto \|AX\|$ est une application continue de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$.

1. b. En déduire que f est majorée sur C et atteint sa borne supérieure notée $N(A)$.

1. c. *Autre expression de* $N(A)$. Justifier que l'on a aussi : $N(A) = \sup\{\dfrac{\|AX\|}{\|X\|} | / X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}$.

2. Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : on dit que N est la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Montrer que $\forall (U, V) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$, $N(UV) \leq N(U)N(V)$.

Remarque : on dit que N est une norme sous-multiplicative ou d'algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4. *Exemple.* Rappeler la définition de la norme $\|\cdot\|_1$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et déterminer la norme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui lui est subordonnée.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$.

1. Soit $U = (u_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire supérieure. Soit $D_a = \operatorname{diag}(a, a^2, \cdots, a^n)$ avec $a > 0$. Soit $T = D_a^{-1} U D_a = (t_{ij})$.
Calculer t_{ij} et montrer qu'on peut choisir $a > 0$ de sorte que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$, $|t_{ij}| \leq \varepsilon$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que A est semblable à une matrice triangulaire supérieure complexe dont chaque coefficient non diagonal a un module inférieur ou égal à ε.

Remarque : Pour en savoir plus... voir Centrale-Supélec PC 2023 Mathématiques 1. Partie III.

Exercice 3. `[Dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable].`
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, diagonalisable. On considère :

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / \, f \circ g = g \circ f\}.$$

• On admet que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ et (voir interrogation n° 7) que, si $g \in \mathcal{L}(E)$:

$$g \in \mathcal{C}(f) \Leftrightarrow \text{ chaque sous-espace propre de } f \text{ est stable par } g.$$

• On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de f, et, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\mathcal{B}_k$ une base de $E_{\lambda_k}(f)$ et $d_k = \dim E_{\lambda_k}(f)$.

• On rappelle que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_p$ est une base de E (dite adaptée à la décomposition $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(f)$).

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $g \in \mathcal{C}(f)$ si et seulement si sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, c'est-à-dire de la forme :

$$M = \operatorname{diag}(M_1, \cdots, M_p) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & M_p \end{pmatrix}$$

où, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $M_k \in \mathcal{M}_{d_k}(\mathbb{K})$.

2. En déduire que $\dim \mathcal{C}(f) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} d_k^2$.

Exercice 4. Etude des deux lemmes de Borel-Cantelli (voir exercices corrigés-Probabilités).

Problème. *Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable.*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n, dont les valeurs propres deux à deux distinctes sont notées $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ (avec $p \in [\![1, n]\!]$).

On a donc : $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_{\lambda_i}(f)$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $E_{\lambda_i}(f) = \operatorname{Ker}(f - \lambda_i Id_E)$.

Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on note :

$\triangleright$ p_i la projection vectorielle sur $E_{\lambda_i}(f)$, parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_{\lambda_j}(f)$,

$\triangleright$ L_i le polynôme (de Lagrange) défini par : $L_i(X) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq p, \\ j \neq i}} \dfrac{X - \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j}$.

1. Soit $i \in [\![1, p]\!]$. Démontrer que $p_i = L_i(f)$.

Remarque : p_i est donc un polynôme en l'endomorphisme f.

2. `[Description des sous-espaces stables par` f`]`. Soit F un sous-espace vectoriel de E.

2. a. Démontrer si F est stable par f alors $F = \bigoplus_{i=1}^{p} (F \cap E_{\lambda_i}(f))$.

2. b. En déduire que F est stable par f si et seulement si $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, où, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, F_i est un sous-espace vectoriel de $E_{\lambda_i}(f)$.

2. c. *Autre méthode.* On suppose F stable par f. Rappeler la définition de l'endomorphisme induit par f sur F, noté f_F ; (re)démontrer que f_F est un endomorphisme diagonalisable de F et retrouver le résultat de **2. a.**

3. A quelle condition f admet-il un nombre fini de sous-espaces stables ? et dans ce cas les dénombrer.

4. On suppose E de dimension 3. Décrire les droites et les plans stables par f en distinguant les cas suivants :

i) f admet trois valeurs propres distinctes $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

ii) f admet une valeur propre simple λ_1 et une valeur propre double λ_2,

iii) f admet une valeur propre triple λ.

5. *Exemple.* Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. a. Démontrer que f est diagonalisable.

5. b. Déterminer tous les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.

Exercice 2. Solution proposée :

1. *i*) On supposera U non diagonale. Introduisons quelques notations afin d'effectuer ce produit matriciel sans « poser les matrices». Notons : $D_a = (d_{ij})$, $D_a^{-1} = \operatorname{diag}(a^{-1}, a^{-2}, \cdots, a^{-n}) = (\delta_{ij})$ et $V = UD_a = (v_{ij})$.

Alors $v_{ij} = \sum_{k=1}^{n} u_{ik} d_{kj} = u_{ij} d_{jj} = u_{ij} a^j$ et enfin $t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \delta_{ij} v_{kj} = \delta_{ii} v_{ij} = a^{-i} u_{ij} a^j = a^{j-i} u_{ij}$.

Remarque : T est aussi triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les mêmes que ceux de U.

ii) Notons $M = \max_{1 \leq i < j \leq n} |u_{ij}|$ et <u>supposons désormais $a \in]0, 1]$</u>.

D'après *i*) pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$, $|t_{ij}| \leq M a^{j-i} \leq M a$ car $j - i \in \mathbb{N}^*$.
En choisissant $a = \min(1, \frac{\varepsilon}{M})$, on obtient que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i < j$, $|t_{ij}| \leq \varepsilon$.

2. Par théorème, A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à une matrice triangulaire $T_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (que l'on peut supposée triangulaire supérieure) (cf. cours). De plus d'après 1. cette matrice T_1 est semblable à une matrice triangulaire supérieure T_2 dont chaque coefficient non diagonal a un module inférieur ou égal à ε. D'où le résultat demandé car A est semblable à T_2.