Spé PC. Année 2024-2025. Révisions [2]

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) \geq 0$. *Rappel : On dit que f est convexe sur $\mathbb{R}$.*

1. *Inégalité de convexité.* Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u < v$.
Prouver que pour tout $t \in [0,1]$, $f((1-t)u+tv) \leq (1-t)f(u)+tf(v)$.
Interpréter graphiquement cette inégalité.

2. Vérifier que $\forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$, $f(\dfrac{x_1+x_2}{2}) \leq \dfrac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$, et $f(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}) \leq \dfrac{1}{3}(f(x_1)+f(x_2)+f(x_3))$.
Indication : pour la seconde inégalité, introduire : $x_1' = \frac{x_1+x_2}{2}$.
Montrer plus généralement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a :

$$f(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}) \leq \frac{1}{n}(f(x_1)+\cdots+f(x_n)).$$

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $(x_1,\dots,x_n) \in]0,+\infty[^n$, $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}$.
Indication : considérer la fonction exponentielle.

4. *Application.* Montrer que pour tout $(x,y) \in]0,+\infty[^2$, $x^2+y^2+\dfrac{32}{xy} \geq 16$.

5. *Application.* Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres positives. Montrer que $\det(A) \geq 0$ et que

$$\sqrt[n]{\det(A)} \leq \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A).$$

6. Soit $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq f(x)\}$. Prouver que $\mathcal{C}$ est une partie convexe et fermée de $\mathbb{R}^2$.

7. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geq f(a)+f'(a)(t-a)$ et interpréter graphiquement cette inégalité.

8. *Application.* Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ telle que X et $f(X)$ sont d'espérance finie. Déduire de **7.** *l'inégalité de Jensen* :

$$E(f(X)) \geq f(E(X)).$$

Exercice 2. `[Polynômes de Tchebychev]`.

I. On considère la suite de polynômes $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$T_0(X) = 1,\ T_1(X) = X, \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ T_{n+1}(X) = 2X\,T_n(X) - T_{n-1}(X).$$

1. Calculer T_n pour $n \in \{2,3,4\}$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos t) = \cos(nt)$. *Indication : récurrence « forte ».*

3. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $|T_n(x)| \leq 1$. *Indication : utiliser 2.*

4. Montrer que T_n est de degré n et calculer le monôme de plus haut degré de T_n.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer les racines de T_n. *Indication : utiliser 2.*

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.

6. a. Calculer $T_n(1)$ et $T_n(-1)$.

6. b. Montrer que $\forall x \in [-1,1]$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. En déduire que T_n est pair (resp. impair) si n est pair (resp. impair).

II. Soit $E = \mathcal{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.

1. Soit $u \in E$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{u(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ converge.

On *admet* que l'on définit un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$ sur E en posant, pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f,g \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

2. On note $\lfloor\ \rfloor$ la fonction partie entière. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left((\cos t + i\sin t)^n\right)$, montrer que

$$\cos(nt) = \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} \cos^{n-2p}(t)\sin^{2p}(t).$$

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $T_n(x) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^p \binom{n}{2p} x^{n-2p}(1-x^2)^p$.

3. Prouver avec un changement de variable que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de l'espace préhilbertien $(E,\ \langle\ ,\ \rangle)$.

Solution proposée pour la partie I de l'exercice 2 :

1. La relation de récurrence donne immédiatement : $T_2(X) = 2X^2 - 1$, $T_3(X) = 4X^3 - 3X$, $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}$ (fixé). Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $T_k(\cos t) = \cos(kt)$. »

Initialisation. $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont clairement vraies car $T_0(\cos t) = 1 = \cos(0 \cdot t)$ et $T_1(\cos t) = \cos t$!

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Il reste donc à prouver que

$$T_{n+1}(\cos t) = \cos((n+1)t).$$

D'après $\mathcal{P}_n$, on a : $T_n(\cos t) = \cos(nt)$ (cas $k = n$) et aussi $T_{n-1}(\cos t) = \cos((n-1)t)$ (cas $k = n-1$) donc

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos t) &= 2\cos t\, T_n(\cos t) - T_{n-1}(\cos t) \\ &= 2\cos t \cos(nt) - \cos((n-1)t) \\ &= (\cos((n+1)t) + \cos((n-1)t)) - \cos((n-1)t) = \cos((n+1)t) \end{aligned}$$

car $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$.

En conclusion, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\cos t = x$ (par exemple, $t = \arccos x$).

D'après 2. $|T_n(x)| = |T_n(\cos t)| = |\cos(nt)| \leq 1$.

4. On montre sans difficultés avec une récurrence « forte » que T_n est de degré n, de monôme de plus haut degré : $2^{n-1}X^n$.

5. Comme T_n est un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels, on sait d'avance que T_n admet au plus n racines réelles distinctes.

Posons pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $x_k = \cos(\frac{2k+1}{2n}\pi)$. Comme cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, on a :

$$1 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > -1$$

et d'après 2. $T_n(x_k) = \cos((2k+1)\frac{\pi}{2}) = 0$. Donc T_n admet exactement n racines réelles dans $]-1, 1[$:

$$\text{les réels } x_k = \cos(\tfrac{2k+1}{2n}\pi) \text{ avec } k \in [\![0, n-1]\!].$$

Exemple et application : D'après 5. les 4 racines réelles de T_4 sont : $x_0 = \cos(\frac{\pi}{8})$, $x_1 = \cos(\frac{3\pi}{8})$, $x_2 = \cos(\frac{5\pi}{8}) = -x_1$, $x_3 = \cos(\frac{7\pi}{8}) = -x_0$.

Comme $T_4(X) = 8X^4 - 8X^2 + 1 = \underline{\underline{8}}(X - x_0)(X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)$, on a donc :

$$T_4(0) = 1 = 8x_0x_1x_2x_3 = 8(\cos(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8}))^2.$$

D'où $\cos(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8}) = \sqrt{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ car $\cos(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8}) > 0$.

Remarque : On peut obtenir ce résultat beaucoup plus rapidement : $\cos(\frac{\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{2}(\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(\frac{\pi}{4})) = \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{4})$.

6. a. D'après 2. $T_n(1) = T_n(\cos 0) = \cos(n \cdot 0) = \cos(0) = 1$, $T_n(-1) = T_n(\cos \pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$.

6. b. Soit $x \in [-1, 1]$. Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $\cos t = x$. D'après 2. :

$$T_n(-x) = T_n(-\cos t) = T_n(\cos(t + \pi)) = \cos(nt + n\pi) = (-1)^n \cos(nt) = (-1)^n T_n(\cos t) = (-1)^n T_n(x).$$

Donc $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$ car le polynôme $T_n(-X) - (-1)^n T_n(X)$ est le polynôme nul puisqu'il admet une infinité de racines, à savoir tous les réels de $[-1, 1]$. Donc si n est pair, T_n est pair car $T_n(-X) = T_n(X)$ et si n est impair, T_n est impair car $T_n(-X) = -T_n(X)$.